

# LEHRBUCH DER BALLISTIK

VON

**DR. C. CRANZ**

GEH. REG.-RAT UND O. PROFESSOR AN DER TECHN. HOCHSCHULE  
BERLIN

ERSTER BAND  
ÄUSSERE BALLISTIK



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1925

# ÄUSSERE BALLISTIK

ODER THEORIE DER BEWEGUNG DES GESCHOSSES  
VON DER MÜNDUNG DER WAFFE AB BIS ZUM  
EINDRINGEN IN DAS ZIEL

IN FÜNFTER AUFLAGE HERAUSGEGEBEN VON

**DR. C. CRANZ**

GEH. REG.-RAT UND O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN  
HOCHSCHULE BERLIN

UNTER MITWIRKUNG VON

**PROFESSOR O. VON EBERHARD**

UND

**MAJOR DR. K. BECKER**

REFERENT BEI DER INSPEKTION FÜR  
WAFFEN UND GERÄT IN BERLIN

MIT 132 TEXTABBILDUNGEN

UND EINEM ANHANG

TABELLEN UND DIAGRAMME.

Published and distributed in the Public Interest by Authority of the  
Alien Property Custodian under License No. A-202

Photo-Lithoprint Reproduction

**EDWARDS BROTHERS, INC.**

PUBLISHERS

ANN ARBOR, MICHIGAN

1943

**BERLIN**

**VERLAG VON JULIUS SPRINGER**

1925



ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1925 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

Copyright vested in the Alien Property Custodian, 1943, pursuant to law.

DRUCK VON OSCAR BRANDSTETTER IN LEIPZIG.

**DEM ANDENKEN SR. EXZELLENZ  
DES HERRN GENERALS DER ARTILLERIE**

**A. VON KERSTING (†)**

**IN TREUER VEREHRUNG  
UND DANKBARKEIT  
GEWIDMET**



## Aus dem Vorwort zur ersten Auflage von Band I 1910

(zugleich zweiten Auflage des „Kompendsiums der theoretischen äußeren Ballistik“; Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, 1896).

Das vorliegende Werk hat die gesamte theoretische und experimentelle Ballistik zu seinem Gegenstand. Die theoretische Ballistik beschäftigt sich mit der Untersuchung der Geschößbewegung und der daran sich anschließenden Fragen auf Grund der Mathematik und Mechanik. Diese Disziplin zerfällt naturgemäß in zwei Teile; hiervon verfolgt die sogenannte innere Ballistik das Geschöß von dem Moment ab, wo es sich im Innern des Rohrs in Bewegung setzt, bis zum Passieren der Mündung; die äußere weiterhin von dem letzteren Moment bis zum Eindringen in das Ziel. Die experimentelle Ballistik hat es mit den zugehörigen Messungs- und Beobachtungsmethoden zu tun.

Da das Buch sich seinen Leserkreis in sehr verschiedenen Berufsarten suchen muß, so war es notwendig, es in einer Form abzufassen, die auch dem Halb- und Nichtmathematiker die Benützung ermöglicht. Zu diesem Zwecke wurden die Einzelberechnungen ausführlicher gehalten, als es in einem ausschließlich für Mathematiker oder Physiker bestimmten Werk der Fall wäre; ferner sind von Zeit zu Zeit die Resultate samt Schlüssel der Bezeichnungen zusammengestellt. Das dynamische Maßsystem durfte, so sehr dies auch in meinem Sinne gelegen hätte, mit Rücksicht auf den Charakter des Buches nicht wohl verwendet werden. Dies wird in der Ballistik erst dann möglich sein, wenn sich auch die Techniker entschlossen haben werden, jenes System von Maßeinheiten allgemein anzunehmen. Solange aber in der Technik das statische System benützt wird, z. B. Gasdrücke pro Flächeneinheit in  $\text{kg}/\text{qcm}$  statt in  $\text{Dyn}/\text{qcm}$ , lebendige Kräfte in  $\text{mkg}$  statt in  $\text{Erg}$  usw. angegeben werden, muß dies auch in der Ballistik geschehen. Damit möge man es erklären, daß hier, wie es in der Waffentechnik noch allgemein üblich ist, von Geschößgewichten, Ladungsgewichten usw. auch da gesprochen wird, wo der Physiker die Ausdrücke „Geschößmasse“ „Ladungsmasse“ usw. erwartet.

Der Inhalt der einzelnen Bände des Buches ist in den Inhaltsverzeichnissen aufgeführt und nach fortlaufenden Nummern geordnet. Die Abgrenzung des Stoffes nach den Seiten der Waffenlehre und Waffenkonstruktionslehre, der Chemie der Explosivstoffe und der praktischen Schießlehre ist in mancher Hinsicht Sache der subjektiven Auffassung und daher nicht ganz frei von einer gewissen Willkür. Im vorliegenden Falle war diese Abgrenzung dadurch gegeben, daß das Werk aus den Vorträgen entstanden ist, die ich seit 1905 an der militärtechnischen Akademie abhalte. Solche Leser, denen etwa das Schießwesen der Praxis nicht weitgehend genug berücksichtigt erscheint, mögen das Werk als theoretische Ergänzung betrachten zu den „Schießvorschriften“, sowie zu den „Schießlehren für Infanterie und Artillerie“ von Generalleutnant a. D. H. Rohne, der sich bekanntlich um die Anwendung der ballistischen Wissenschaft auf die militärische Praxis hervorragende Verdienste erworben hat. Auch auf die Arbeiten von Freih. von Zedlitz und von Krause, sowie auf das gründliche und vorzüglich klar geschriebene Werk von Viktor Ritter von Niesiolowski-Gawin, „Ausgewählte Kapitel der Technik mit besonderer Rücksicht auf militärische Anwendungen“, 2. Aufl., Wien 1908, sei bei diesem Anlaß aufmerksam gemacht.

Durchweg habe ich gesucht, die verschiedenen Fragen in möglichst objektiver Weise kritisch zu behandeln, die Grundlagen der einzelnen Berechnungen auf ihre Zuverlässigkeit zu prüfen und damit die Theorien auf ihren richtigen Wert zurückzuführen. So sind z. B. einer kritischen Betrachtung unterzogen: Die verschiedenen Luftwiderstandsgesetze und Luftwiderstandsversuche; die Berechnungen über die Schiefstellung der Geschosachse, über die Spitzenkoeffizienten und über die günstigste Geschosform; das übliche Verfahren zum Erschießen von Formwerten; das Übertragen von Formwerten der Artilleriegeschosse auf Infanteriegeschosse; die Methoden des Schwenkens einer Flugbahn; die Berechnungen über das Eindringen von Geschossen; mehrere innerballistische Berechnungs- und Messungsmethoden usw. Wenn es sich dabei gezeigt hat, daß zahlreiche Ergebnisse und Methoden, die bisher als feststehend galten, tatsächlich recht unsicherer Natur sind, daß überhaupt die gesamte theoretische und experimentelle Ballistik weniger weit, als manche glauben und behaupten, bis jetzt gefördert ist, so ist diese Tatsache zwar an sich zu bedauern, aber ihre Hervorhebung und Begründung kann für eine gedeihliche Weiterentwicklung dieser Disziplin nur förderlich sein. Die Gründe für die verhältnismäßig langsame Entwicklung der Ballistik sind darin zu suchen, daß es sich tatsächlich um Probleme von äußerster Kompliziertheit handelt, ferner darin, daß in der äußeren Ballistik die Luftwiderstandsversuche usw. früher nicht immer in rationeller Weise

angestellt wurden und in der inneren Ballistik die Geschwindigkeits- und Gasdruckmessungen auf sehr große Schwierigkeiten stoßen, endlich darin, daß ein freier Austausch der wissenschaftlichen Forschungen in dieser Disziplin nicht ebenso ermöglicht ist, wie in anderen Disziplinen.

Auf der anderen Seite darf die Genauigkeit der ballistischen Berechnungen auch nicht unterschätzt werden, wie es mitunter geschieht. In der äußeren Ballistik ist es mit den neueren Methoden immerhin möglich geworden, z. B. eine Schußweite von 8 Kilometern aus den Dimensionen und der Masse des Geschosses, aus dessen Anfangsgeschwindigkeit und Abgangswinkel, sowie aus der Tagesluftdichte auf 0,5 bis 1 Prozent genau voraus zu berechnen (vgl. Band I, Tabelle Seite 227). Eine richtige Würdigung der Bedeutung der Theorie scheint sich namentlich unter den Vertretern der Praxis mehr und mehr Bahn zu brechen. Seltener als früher kommt es vor, daß ein Praktiker eine Formel ohne Prüfung ihres Gültigkeitsbereichs herausgreift und bei mangelhafter Übereinstimmung zwischen Rechnungs- und Schießresultat über die Theorie im allgemeinen den Stab bricht. Zu der richtigen Einschätzung des ballistischen Rechnungs- und Messungswesens trägt ohne Zweifel die Tätigkeit der staatlichen Prüfungskommissionen und der großen Geschütz-, Gewehr- und Pulverfabriken wesentlich bei. Die Klagen über einen angeblichen Gegensatz zwischen Theorie und Praxis werden vollends verschwinden, wenn der Theoretiker die Grundlagen und den Genauigkeitsgrad seiner eigenen Berechnungen stets deutlich hervortreten läßt und mit seiner Theorie nach Möglichkeit der Praxis zu dienen sucht, und wenn der Praktiker einwandfreie Unterlagen für die Theorie schafft und bei der Anwendung von Formeln auf die Praxis berücksichtigt, daß eine Theorie inhaltlich nicht mehr bieten kann und will, als durch die Voraussetzungen und Erfahrungen in anderer Form in sie hineingelegt worden war. Dann wird der Praktiker den Hauptnutzen der Theorie doch dankbar anerkennen; und dieser besteht auch hier darin, die Versuche von vornherein in gewisse Grenzen einzuweisen und damit viele Zeit und viele Kosten zu ersparen.

Der vorliegende erste Band behandelt die theoretische äußere Ballistik; er bildet die zweite Auflage meines „Kompendiums der theoretischen äußeren Ballistik“ vom Jahre 1896. Mit Ausnahme des 1. Abschnitts (Wurfbewegung im leeren Raum) sind sämtliche Teile völlig umgearbeitet . . .

Der in kurzem erscheinende Band II behandelt die innere Ballistik. Mit dem Band III soll ein Leitfaden zur experimentellen Ballistik gegeben werden. Der Band IV (Atlas) enthält, außer Diagrammen und Photographien von Momentaufnahmen, insbesondere eine Sammlung

der wichtigsten ballistischen Tabellen. Zum Gebrauch des I. und III. Bandes ist dieser Atlas unentbehrlich.

Irgendwelche Zahlenangaben über neuere Waffen und Geschosse wird man in diesem Werke nicht suchen dürfen (darüber vgl. z. B. die „Waffenlehren“ von Berlin und von R. Wille); die Zahlenbeispiele sind teils den Mitteilungen von F. Krupp und P. Mauser entnommen, teils sind sie frei gebildet. Manche Beispielberechnungen und -messungen, die im Text der sämtlichen Teile erwähnt sind, wurden bei Gelegenheit von Prüfungsarbeiten, die ich an der Militärtechnischen Akademie vorzuschlagen hatte, durch Hörer ausgeführt. Die Namen der betreffenden Herren sind dabei bemerkt.

Die Literaturverzeichnisse, die sich am Schluß der ersten drei Bände finden, sind speziell für die Zwecke der Militärtechnischen Akademie angefügt. Sie werden aber auch anderen Lesern willkommen sein, die sich über eine ballistische Spezialfrage zu orientieren beabsichtigen. Vielleicht tragen sie außerdem dazu bei, daß dem häufig geäußerten Wunsch nach eingehenderem Zitieren auch in der Ballistik mehr und mehr entsprochen wird. Es ließen sich zahlreiche Beispiele dafür anführen, wie, infolge von mangelhafter Kenntnis der Literatur, ballistische Untersuchungen zum zweiten- oder drittenmal durchgeführt, Apparate neu konstruiert wurden, die seit Jahrzehnten veröffentlicht sind usw. Die Namen der Autoren sind in dem vorliegenden Verzeichnis durchweg mittels besonderen Drucks hervorgehoben; im Haupttext ist dies nur bezüglich der Namen derjenigen Autoren geschehen, deren Arbeiten an der betreffenden Stelle eingehender besprochen sind. Auf Vollständigkeit kann auch dieses Verzeichnis trotz seiner Reichhaltigkeit keinen Anspruch machen; auch ist mir nur die größte Mehrzahl der zitierten Aufsätze aus eigener Anschauung bekannt geworden. Um so mehr richte ich an die Herren Fachgenossen das Ersuchen, mich auf etwaige Fehler und Mängel, die sich in diesem Verzeichnis und in den sonstigen Teilen des Buches finden, für die Zwecke einer etwaigen weiteren Auflage direkt aufmerksam machen zu wollen, und füge bei diesem Anlaß die Bitte um Austausch der Sonderabdrücke von Zeitschriftenaufsätzen an.

Herr Oberleutnant Krause hatte die Güte, die sekundären Funktionen zu dem Luftwiderstandsgesetz von Chapel-Vallier-Hojel (Band IV Tabellen 12<sub>a</sub> bis 12<sub>c</sub>) für den vorliegenden Zweck neu zu berechnen und auszugleichen. Ich spreche ihm auch an dieser Stelle den Dank für die Mühe aus, die er mit dieser zeitraubenden Arbeit auf sich genommen hat.

Ebenso ist es mir eine angenehme Pflicht, den Herren Hauptmann Bensberg, Oberleutnant Schatte, Oberleutnant Becker und Oberleutnant Eichelkraut für die mannigfache Unterstützung zu

danken, die sie mir mit der Durchführung zahlreicher Messungen und Berechnungen, die im Text mit Angabe des Namens erwähnt sind, bzw. mit einer zweiten Lesung der Korrekturbogen haben zuteil werden lassen.

Berlin-Charlottenburg.

**Dr. C. Cranz,**

Geh. Reg.-Rat u. Prof. an der Militärtechnischen Akademie.

## **Aus dem Vorwort zur dritten und vierten Auflage von Band I (1916 und 1918).**

Die 1. Auflage dieses Bandes I hat in militärischen und mathematischen Zeitschriften eine sehr freundliche Beurteilung gefunden (getadelt wurde nur, und nur von einer Seite, daß das Buch zu viele unnötige Fremdwörter enthalte). So durfte angenommen werden, daß die Gesamtanlage des Buchs als zweckmäßig angesehen und für die von der Verlagsanstalt gewünschte Neuauflage beibehalten werden könne.

Die wesentlichsten Abänderungen, die bei der Neubearbeitung des Bandes vorgenommen wurden, beziehen sich auf folgendes: Das Schießen im Gebirgskriege, sowie die Ballistik des Luftkriegs mußten in höherem Maße als früher Berücksichtigung finden. In Abschnitt 2 Nr. 9 und Nr. 10 sind Bemerkungen über die neueren Versuche zur Gewinnung eines theoretischen Luftwiderstandsgesetzes hinzugefügt und diese Versuche kritisch besprochen; auch die seit 1910 durchgeführten Luftwiderstandsmessungen fanden gebührende Berücksichtigung. Das Verfahren der Reihenentwicklung, die Verwendung des Restglieds in Integralforn und die Darstellung der Flugbahn durch ganze rationale algebraische Funktionen wurden, für sich abgesondert und ausführlicher als früher, in einer besonderen Nummer abgehandelt. Nahezu vollständig umgearbeitet wurde der Abschnitt, der sich mit den Abweichungen der Geschosse infolge von Geschosßrotationen, insbesondere mit den Bewegungen eines rotierenden Langgeschosses um den Geschosßschwerpunkt beschäftigt. Die analytischen Berechnungen wurden stark gekürzt, dafür ist die graphische Behandlung in den Vordergrund gerückt. Und da mir in den letzten Jahren von mehreren Physikern die Frage vorgelegt worden war, wie es komme, daß ein rotierendes Langgeschosß pfeilartig fliege und daher mit seiner Spitze voran auf den Erdboden aufschlage, und weshalb die Rechtsabweichung eines rotierenden Langgeschosses bei Rechtsdrall nicht später in eine Linksabweichung übergehe, so wurde der scheinbare Pfeilflug eines rotierenden Langgeschosses sowie die Möglichkeit einer Linksabweichung bei



Rechtsdrall, bzw. einer Rechtsabweichung bei Linksdrall in qualitativer Weise erörtert. Bei den zugehörigen Auseinandersetzungen ist von der Vektorendarstellung nur in sehr mäßiger Weise, und nur nach den nötigen Erläuterungen, Gebrauch gemacht. Überhaupt war das Bestreben unter anderem darauf gerichtet, den gesamten Stoff in einer Form darzubieten, die jeden Leser, der wenigstens die Prima eines Gymnasiums hinter sich hat, in den Stand setzt, die sämtlichen ballistischen Aufgaben an der Hand des Buches zu lösen. Zahlreiche Formelzusammenstellungen samt ausführlicher Erläuterung der Bezeichnungen, sowie eine beträchtliche Anzahl von durchgerechneten Zahlenbeispielen dienen dem gleichen Zwecke.

Im übrigen gilt auch für diese Neuauflage alles, was in dem Vorwort zur 1. Auflage über die kritische Behandlung der einschlägigen Fragen, über den Charakter des Buchs als eines Lehrbuchs der theoretischen Ballistik, im Gegensatz zu einer „Waffenlehre“, über die Verwendung der Maßsysteme usw. gesagt ist.

Ein Gewinn für das Buch ist es, daß Herr Hauptmann Becker sich bereit gefunden hat, bei der Herausgabe dieser Auflage mitzuwirken. Er hat alles durchgesehen, manche Verbesserungen im einzelnen angebracht, und von ihm stammt die Umarbeitung des Abschnitts über Schußtafelberechnungen, wodurch dieser Teil für die Zwecke der Praxis geeigneter gestaltet ist. Auf die Anregung von Herrn Hauptmann Becker hin wurden auch zahlreiche Fremdwörter beseitigt. Sehr viel weiter kann jedoch vorläufig nicht gegangen werden. Der Ballistiker muß sich, wenn er verstanden sein will, der Sprachweise des Mathematikers, Physikers, Technikers und Chemikers anbequemen.

Herr Leutnant Ermann und Herr stud. math. L. Bauer hatten die Güte, gleichfalls die Korrekturfahnen bzw. die Druckbogen zu lesen und zu berichtigen. Sie haben dies mit solcher Sorgfalt getan, daß ein Druckfehlerverzeichnis vorläufig nicht erforderlich ist. Wenn sich trotzdem ernstliche Versehen in dem Buche finden sollten, bin ich den Herren Fachgenossen, denen solche Irrtümer aufstoßen, für eine Mitteilung an mich zu Dank verpflichtet.

Die Verlagsanstalt hat keine Kosten und keine Mühe gescheut, dem Buche eine würdige Ausstattung zu geben. Besonders hat sie es ermöglicht, daß am Schluß 2 Tafeln mit 15 elektrischen Momentaufnahmen des fliegenden Geschosses angefügt werden konnten, die sich auf die Lehre vom Luftwiderstand bei großen Geschwindigkeiten beziehen.

Das Buch ist Herrn General der Artillerie z. D. Exzellenz A. von Kersting gewidmet, der sich als Begründer und erster Direktor der Militärtechnischen Akademie (1903—1912) und während

der beiden ersten Jahre des Krieges als Präses der Artillerie-Prüfungs-Kommission in selbstlosem Wirken die größten Verdienste um die deutsche Militärtechnik erworben und dessen Art, zu denken, zu fühlen und zu handeln, ihm die Herzen aller gewonnen hat, die diesen Mann kennen. Ihm verdanken sämtliche Angehörige der Militärtechnischen Akademie sehr viel. Ihm verdanke ich speziell die meiste Förderung meiner ballistischen Studien seit 1903. Und was Exzellenz von Kersting in dem bekannten Werke des Teubnerschen Verlags „Die Kultur der Gegenwart“, Teil IV, Nr. 12, Technik des Kriegswesens, über den „Einfluß des Kriegswesens auf die Gesamtkultur“ geschrieben hat, enthält so viele Goldkörner reifsten Urteils, edelster Ethik und abgeklärter Lebensweisheit, daß jedermann, der diese Schrift mit Aufmerksamkeit liest, dadurch sich bereichert fühlt. Der junge Offizier sollte nicht versäumen, die dort niedergelegten Gedanken, z. B. über das Heer als Bildungsanstalt und Erziehungsanstalt (Abschnitt 9 und 10), aufzunehmen und anzuwenden; sie werden ihm reiche Früchte bringen.

Berlin-Charlottenburg 1916 und 1918.

Carl Cranz.

## Vorwort zur fünften Auflage von Band I.

Seit einigen Jahren ist Band I (Äußere Ballistik) und Band III (Experimentelle Ballistik) vollständig vergriffen. In dankenswerter Weise hat es die Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin übernommen, das gesamte Lehrbuch der Ballistik neu aufzulegen und dabei auch den Band II (Innere Ballistik), der aus mancherlei Gründen bisher nicht veröffentlicht werden konnte, erscheinen zu lassen. Der bisherige Band IV, in dem die ballistischen Tabellen und Diagramme, sowie die photographischen Aufnahmen vereinigt waren, kommt nunmehr in Fortfall; dafür sind die wichtigsten Tabellen und Diagramme in einem Anhang zu Band I, die neueren photographischen Aufnahmen in Anhängen zu Band II bzw. III aufgenommen worden.

Das Bestreben war darauf gerichtet, die Erfahrungen, die der Weltkrieg auf dem Gebiete der Ballistik gebracht hat, tunlichst zu verwerten. Aus diesem Grund spielen die Methoden zur stückweisen Berechnung oder Konstruktion von Steilbahnen (§ 33 bis 39), die Geschosspendelungen (§ 55 bis 60) und die Tageseinflüsse der variablen Luftdichte, des Windes usw. (§ 15 und 43 bis 52) in dem Band I eine größere Rolle als früher.

Der Abschnitt über die Aufstellung der Schußtafeln (in den früheren Auflagen Abschnitt 8, jetzt Schlußabschnitt 12) ist durch

Herrn Major Dr. K. Becker entsprechend den neuzeitlichen Anforderungen völlig neu bearbeitet worden. Von ihm stammt auch der Passus (§ 49 Schluß), der vom ballistischen Wind und ballistischen Luftgewicht handelt.

Der Rechnungsmethode beim Fernschießen, das während des Krieges Frühjahr 1918 jene schießtechnische Überraschung gebracht hat, ist § 40 gewidmet; dieser Teil ist von dem ehemaligen Assistenten im ballistischen Laboratorium Prof. O. von Eberhard bearbeitet; er hat bekanntlich als Erster durch seine Berechnungen die Möglichkeit einer Schußweite von mehr als 100 km bewiesen.

Neu ist ferner die analytische Berechnung der Geschoßpendelungen und Geschoßabweichungen bei Flachbahnen und Steilbahnen unter Berücksichtigung nicht nur des Kreiseffekts, sondern auch des Magnuseffekts (§ 58). Es dürfte damit jetzt festgestellt sein, daß die bei einer gewissen größeren Rohrerhöhung am Ende der Flugbahn beobachteten Linksabweichungen bei Rechtsdrall sich anders erklären als die Ballistiker bisher angenommen hatten, daß nämlich in erster Linie der Magnuseffekt die Ursache bildet.

Was die ballistische Literatur anbelangt, so habe ich gesucht, auch die fremdländischen Publikationen, soweit sie mir zugänglich waren und soweit sie lediglich die Wissenschaft fördern sollen, zu berücksichtigen. Auf eine Vollständigkeit des Literaturverzeichnisses kann übrigens unter den gegenwärtigen schwierigen Verhältnissen kein Anspruch gemacht werden. Um so mehr richte ich an die Herren Fachgenossen die Bitte, Sonderabdrücke ihrer ballistischen Arbeiten mir zuzuschicken. Diese Bitte gilt bei fremdländischen Arbeiten nur dann nicht, wenn sie Zeichen feindseliger Gesinnung gegen das Deutschum enthalten und dadurch als unsachlich gekennzeichnet sind.

Auch an dieser Stelle danke ich den Herren Prof. O. v. Eberhard, Major Dr. Ing. K. Becker und Dipl.-Ing. W. Schmundt für ihre Unterstützung bei der Abfassung und bei der Korrektur, Herrn Professor Rothe für einige Verbesserungsvorschläge und der Verlagsbuchhandlung Julius Springer für die schöne Ausstattung des Werkes.

Berlin-Charlottenburg, September 1925.

Carl Cranz.

# Inhaltsverzeichnis.

(Band I.)

Seite

## Theoretische äußere Ballistik.

### Erster Abschnitt. Wurfbewegung ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand.

1. Flugbahnparabel, Scheitel, Schußweite, Bahngeschwindigkeit, Flugzeit	1
2. Schar der Flugbahnen mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit . . . .	6
3. Schar der Flugbahnen mit konstantem Abgangswinkel und einige andere Flugbahnscharen . . . . .	12
4. Wurf auf geneigtem Boden . . . . .	15
5. Beispiele: einige Anwendungen der Flugbahngleichungen des leeren Raumes . . . . .	22
6. Wurfbewegung im leeren Raum mit Rücksicht auf die Abnahme der Fallbeschleunigung mit der Höhe, die Konvergenz der Vertikalen und die Erdkrümmung . . . . .	27
7. Zusammenstellung der Formeln für die Wurfbewegung im luftleeren Raum (konstante Fallbeschleunigung) . . . . .	33

### Zweiter Abschnitt. Über den Luftwiderstand.

I. Der Luftwiderstand gegen ein Langgeschosß unter der Voraussetzung, daß dessen Längsachse in der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes liegt.	
8. Allgemeine Erörterungen . . . . .	36
9. Theoretische Ansätze zur Gewinnung des Luftwiderstandsgesetzes . .	47
10. Empirisch gewonnene Luftwiderstandsgesetze und zugehörige Experimente . . . . .	54
11. Allgemeine Bemerkungen über die bei der Aufstellung von empirischen Luftwiderstandsgesetzen angewandten Methoden. Kritische Bemerkungen. Vorschläge . . . . .	66
II. Über den Einfluß einer Schiefstellung der Geschosßachse gegenüber der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes.	
12. Ermittlung der Luftwiderstandskomponenten parallel und senkrecht zur Geschosßachse und des Drehmoments um eine Querachse durch den Schwerpunkt. Allgemeine Gleichungen. Beispiele. Bemerkungen über die Unsicherheit der Berechnungen und über die Notwendigkeit von Versuchen . . . . .	72
III. Der Formwert eines Geschosses.	
13. Über die Berechnung der Spitzenkoeffizienten von Geschossen verschiedener Kopfform . . . . .	84
14. Über die Berechnungen bezüglich der günstigsten Spitzenform des Geschosses. Sogen. Augustsche Geschosßspitze . . . . .	91

	Seite
<b>IV. Einfluß der Luftdichte.</b>	
15. Berechnung des Tagesluftgewichtes $\delta$ . . . . .	98
16. Zusammenfassende kritische Schlußbemerkung zu diesem Abschnitt . . . . .	105
<b>Dritter Abschnitt. Das spezielle ballistische Problem. Angabe des Problems und allgemeine Folgerungen für die Flugbahn.</b>	
17. Die allgemeinen Gleichungen . . . . .	107
18. Über die Integrierbarkeit der Hauptgleichung mittels der elementaren Integrationsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen . . . . .	116
19. Ein Umkehrungsproblem . . . . .	126
20. Allgemeine Eigenschaften jeder Flugbahn . . . . .	128
<b>Vierter Abschnitt. Erste Hauptgruppe von Näherungslösungen des speziellen außerballistischen Problems: Berechnung der Flugbahn in einem einzigen Bogen.</b>	
<b>Erste Untergruppe: Lösungen mit Benützung der genauen Hauptgleichung und unter Voraussetzung eines Potenzgesetzes <math>c \cdot v^n</math> für die Verzögerung durch den Luftwiderstand.</b>	
21. Methode von Euler-Otto . . . . .	140
22. Methode von F. Bashforth . . . . .	144
<b>Fünfter Abschnitt. Zweite Untergruppe: Integrationen auf Grund einer angenäherten Hauptgleichung.</b>	
23. Allgemeines. Gegenüberstellung der verschiedenen Methoden . . . . .	147
24. Lösung von J. Didion (1848) . . . . .	154
25. Die Didion-Bernoullische Näherungslösung für die eingliedrigen Potenzgesetze $cf(v) = cv^n$ . . . . .	160
26. Näherungslösung von F. Siacci 1880 („Siacci I“) . . . . .	170
27. Die Lösungsmethoden von Siacci 1888 (Siacci II) und 1896 (Siacci III) . . . . .	175
28. Die Näherungslösung von E. Vallier 1894 . . . . .	178
29. Näherungslösungen von P. Charbarnier . . . . .	188
30. Über die sekundären ballistischen Funktionen . . . . .	186
31. Die ballistischen Abaken von C. Cranz . . . . .	189
<b>Sechster Abschnitt. Dritte Untergruppe: Reihenentwicklungen zur Berechnung einer Flugbahn in einem einzigen Bogen.</b>	
32. Allgemeines. Methode von Piton-Bressant und Hâlie. Formeln der Kommission von Gâvre. Methode von Duchêne. Methode des „Aide-Mémoire“ . . . . .	195
<b>Siebenter Abschnitt. Zweite Hauptgruppe von Näherungslösungen des speziellen außerballistischen Problems: Streckenweise graphische Konstruktion oder stückweise numerische Berechnung einer Flugbahn.</b>	
33. Das graphische Verfahren von Poncelet (1827) und Didion (1848) . . . . .	207
34. Graphisches Verfahren von C. Cranz und R. Rothe mit den Modifikationen von C. Veithen und L. Gumbel . . . . .	209
35. Die graphischen Lösungsmethoden von Th. Vahlen (1918) und von E. A. Brauer (1918) . . . . .	219
36. Stückweise Flugbahnberechnung von C. Veithen (1919) nach C. Runge und W. Kutta . . . . .	222
37. Über die Methoden von O. Wiener (1919) und A. von Brunn (1919) zur stückweisen Berechnung von Flugbahnen . . . . .	225

38. Über die Methoden von Frh. von Zedlitz, von E. Stübler und von J. de Jong zur stückweisen Berechnung einer Flugbahn . . . . .	Seite 230
39. Der lotrechte und der nahezu lotrechte Schuß . . . . .	233
30. Einiges über das Fernschießen. (Bearbeitet von O. von Eberhard) . . . . .	243

**Achter Abschnitt. Über die Methode der „Normalbahnen“ von C. Cranz und ihre Anwendung zur Prüfung der verschiedenen Lösungsmethoden auf deren Genauigkeitsgrad.**

41. Der rein mathematische Fehler und der physikalische Fehler der Lösungsmethoden . . . . .	252
42. Über die Fehler, die speziell bei dem „Schwenken einer Flugbahn“ entstehen können . . . . .	268

**Neunter Abschnitt. Sekundäre Einflüsse. Einseitige Geschosßabweichungen.**

43. Über einseitige Geschosßabweichungen im allgemeinen . . . . .	273
44. Einfluß einer kleinen Änderung des Abgangswinkels $\varphi$ oder der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ oder des (von Kaliber $2R$ , Geschosßgewicht $P$ , Formfaktor $i$ und Luftgewicht $\delta$ abhängigen) ballistischen Koeffizienten $c$ . . . . .	275
45. Geschosßabweichungen durch schiefen Räderstand beim Geschütz bzw. durch Verkanten des Visiers beim Gewehr . . . . .	287
46. Abweichungen durch Wind. Einleitende Bemerkungen . . . . .	289
47. Die Waffe sei in Ruhe bezüglich des Erdbodens. Wind wehe horizontal und parallel der Schußebene . . . . .	292
48. Die Waffe sei in Ruhe bezüglich des Erdbodens. Wind wehe horizontal und senkrecht zur Schußebene . . . . .	299
49. Die Waffe in Ruhe bezüglich des Erdbodens. Wind wehe schief gegen die Schußebene, konstant oder mit der Höhe veränderlich . . . . .	302
50. Fallenlassen eines Körpers aus einem Flugzeug bei Wind . . . . .	311
51. Von einem fahrenden Schiff oder Flugzeug aus wird quer zur Fahrtrichtung geschossen; Wind parallel der Fahrtrichtung . . . . .	313
52. Ein Dampfer fährt auf einem Fluß. In der Luft bewegt sich ein Flugzeug, das bezüglich des Dampfers eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt. Wind weht schief zur Fahrtrichtung des Flugzeugs. Aus dem Flugzeug wird in schiefer Richtung geschossen . . . . .	315
53. Geschosßabweichungen durch die Erdrotation . . . . .	316
54. Die regelmäßigen Seitenabweichungen der Infanteriegeschosse bei aufgestecktem Seitengewehr . . . . .	325
55. Einseitige Abweichungen durch Geschosßrotationen. Abweichungen kugelförmiger Geschosse . . . . .	328
56. Abweichungen der rotierenden Langgeschosse. Erfahrungstatsachen . . . . .	334
57. Wie fliegt ein rotierendes Langgeschosß? Magnuseffekt, Poissoneffekt, Kreiseleffekt. Über die Bedingungen für einen guten Geschosßflug; scheinbare Pfeilwirkung . . . . .	339
58. Berechnung von Flugbahnen rotierender Langgeschosse (von C. Cranz und W. Schmudt) . . . . .	358
59. Näherungsformeln für die durch Geschosßrotation bewirkten Seitenabweichungen von Flachbahngeschossen . . . . .	377
60. Demonstrationsmittel zur Lehre von den Geschosßpendelungen und Geschosßabweichungen . . . . .	381

**Zehnter Abschnitt. Zufällige Geschoßabweichungen. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Ballistik.**

61. Einleitendes . . . . .	385
62. Einige Sätze aus der Wahrscheinlichkeitslehre . . . . .	389
63. Theorie der Geschoßstreuung. Treffgenauigkeitsmaße . . . . .	395
64. Über den Gegensatz zwischen den wahren und den scheinbaren oder „plausiblen“ Abweichungen. Indirekte Messung ballistischer Größen . . . . .	404
65. Sukzessive Differenzen . . . . .	410
66. Wahrscheinlicher Fehler des mittleren Treffpunkts. Zusammenstellung bezüglich der Genauigkeitsmaße . . . . .	413
67. Berechnung des arithmetischen Mittels im Fall gruppenweiser Beobachtungen . . . . .	415
68. Untersuchung einer Beobachtungsreihe. Ausreißer. Symmetrieachsen eines Trefferbildes . . . . .	419
69. Die Gruppierungsachsen eines Trefferbildes . . . . .	425
70. Wahrscheinlichkeit, eine gegebene Fläche zu treffen. Rechteckige Flächen . . . . .	429
71. Wahrscheinlichkeit, eine gegebene Kreisfläche zu treffen . . . . .	441
72. Wahrscheinlichkeit, eine gegebene elliptische Scheibe oder eine Scheibe von beliebigem Umriß zu treffen . . . . .	445
73. Verwendung der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme in der Ballistik . . . . .	450

**Elfter Abschnitt. Über die Wirkung der Geschosse im Ziel.**

74. Eindringen von Infanteriegeschossen und nicht krepierenden Artilleriegeschossen in feste Körper. Berechnung der Eindringungstiefe und Eindringungszeit . . . . .	457
75. Einzelne Erscheinungen. Kritische Bemerkungen . . . . .	461
76. Über die Explosionswirkung von Sprenggeschossen der Artillerie . . . . .	470
77. Über das Eindringen in flüssige und halbflüssige Körper. Scheinbare Explosivwirkung (Dum-Dum-Wirkung) der neueren Infanteriegeschosse . . . . .	480
78. Ablenkungen der Geschoßbahn im Ziel. Streifschüsse. Ricochettieren . . . . .	493

**Zwölfter Abschnitt. Die Aufstellung von Schießbehelfen.**

(Bearbeitet von K. Becker.)

79. Die rein rechnerische Aufstellung der Erdschußtafeln . . . . .	497
80. Die Schußtafelberechnung nach Schußtafelversuchen . . . . .	504
81. Die Aufstellung der Schießbehelfe zur Flugabwehr . . . . .	526
82. Herstellung der Schießbehelfe für den Gebirgskrieg . . . . .	534
83. Die Aufstellung der Korrekctionstafeln zur Ausschaltung der besonderen Einflüsse und der Witterungseinflüsse . . . . .	537
Literaturnoten und Bemerkungen zu Band I . . . . .	540

**Anhang: Ballistische Tabellen und Diagramme.**

**1. Tabellen.**

Nr. 1: Fallbeschleunigung $g$ für verschiedene geographische Breiten und verschiedene Meereshöhen . . . . .	566
Nr. 2: Die natürlichen Werte des sinus, tangens, cosinus . . . . .	566

Nr. 3:	Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes für verschiedene Temperaturen . . . . .	Seite 568
Nr. 4:	Reduktion des Barometerstands auf 0° . . . . .	568
Nr. 5a:	Werte von $e^z$ für $z=0$ bis $z=3$ ; (zu § 24 u. 25 dieses Bandes)	569
Nr. 5b:	Werte von $2 \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^2}$ für $z=0$ bis $z=2,40$ ; (zu § 24 u. 25)	570
Nr. 5c:	Werte von $\frac{e^z - 1}{z}$ für $z=0$ bis $z=2,40$ ; (zu § 24 u. 25) . . .	571
Nr. 6:	Das einheitliche Luftwiderstandsgesetz von F. Siacci 1896; (zu § 10) . . . . .	572
Nr. 7:	Ottosche Tabelle für die Berechnung von Flugbahnen bei Anfangsgeschwindigkeiten kleiner als die Schallgeschwindigkeit und bei beliebigen Abgangswinkeln; (zu § 21) . . . . .	577
Nr. 8a:	Die Werte von $\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta}$ in Funktion von $\vartheta$ ; für $n=1,55$ ; 1,70; 3; 4; 5; 6 . . . . .	583
Nr. 8b:	Die Werte von $\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \xi(\vartheta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + \log \text{nat} \left( 45 + \frac{\vartheta}{2} \right) \right]$ . . . . .	585
Nr. 9:	Schußfaktorentabelle von F. Siacci auf Grund des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes . . . . .	606
Nr. 10a:	Die primären Funktionen $D, J, A, T$ auf Grund des Luftwiderstandsgesetzes von Chapel-Vallier-Hojel, nach E. Vallier . . . . .	608
Nr. 10b:	Zugehörige sekundäre Funktion $E$ . . . . .	613
Nr. 10c:	" " " " $N$ . . . . .	618
Nr. 10d:	" " " " $H$ . . . . .	625
Nr. 10e:	" " " " $L$ . . . . .	631
Nr. 10f:	" " " " $M$ . . . . .	637
Nr. 11:	Die primären Funktionen $D, J, A, T$ zu dem einheitlichen Luftwiderstandsgesetz von F. Siacci . . . . . Dazu die $\beta$ -Tabelle von F. Siacci; (diese $\beta$ -Werte sind besser durch das nachfolgende Diagramm VI dargestellt).	644
Nr. 12:	Wahrscheinlichkeitsfunktion $\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-t^2} \cdot dt$ , nach Czuber. . . . .	675
Nr. 13:	Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfaktoren und Trefferprozente . . . . .	678
Nr. 14:	$\sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ; $\cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ; $\operatorname{tg} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . . . . .	681
Nr. 15:	Tabelle der Werte $Q(v)$ und $M(v)$ für den lotrechten Schuß . . . . .	684
Nr. 16:	Einige bestimmte Integrale; Formeln für Trägheitsmomente . . . . .	686

## 2. Diagramme.

Diagramme Ia bis Id:	Für den lotrechten und nahezu lotrechten Schuß. Aufwärtsbewegung, Funktionen $M, Q, G, P$ . . . . .	688
----------------------	---	-----



Diagramme IIa bis IId:	Für den lotrechten und nahezu lotrechten Schuß. Abwärtsbewegung. Funktionen $M_1, Q_1, G_1, P_1$ .	Seite 696
Diagramme IIIa bis IIIi:	Ballistische Abaken von C. Cranz; Funktionen $A_1$ bis $A_9$ .	700
Diagramme IVa bis IVf:	Graphische Darstellungen für die Zahlenwerte der Ottoschen Lösung (vgl. § 21 und Tabelle Nr. 7), bei Abgangswinkeln $\varphi \leq 45^\circ$ .	706
Diagramm V:	Nomographische Darstellung des Luftgewichts $\delta$ als Funktion von Barometerstand und Lufttemperatur.	707
Diagramm VI:	Graphische Darstellung der Werte $\beta$ zu dem einheitlichen Luftwiderstandsgesetz von F. Siacci; vgl. auch § 27 und die Tabelle Nr. 11 Schluß.	707
(Die Diagramme I und II wurden auf Veranlassung des Verfassers gezeichnet von Hptm. Bensberg und Oblt. Becker, die Diagramme III von Oblt. Schatte und L. Bauer, die Diagramme IV von E. Stübler, das Diagramm V von H. Kritzingen, das Diagramm VI auf Grund einer Neuberechnung der $\beta$ -Werte gezeichnet von L. Bauer.)		
Namenverzeichnis . . . . .		708
Sachverzeichnis . . . . .		712

## Erster Abschnitt.

# Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

### § 1. Flugbahnparabel, Scheitel, Schußweite, Bahngeschwindigkeit, Flugzeit.

Bei den Anwendungen der reinen Mathematik auf die Erscheinungen der wirklichen Welt handelt es sich stets um eine mehr oder weniger große Anzahl von gewissen Vereinfachungen. Denn es ist nicht möglich und nicht nötig, alle Einflüsse, denen ein Körper unterliegt, jederzeit in Rechnung zu ziehen. Nicht möglich, weil selbst auf den ersten Blick als sehr einfach erscheinende Naturvorgänge bei genauerer Betrachtung sich als sehr verwickelt erweisen und weil von den hierbei in Betracht kommenden Einflüssen die wenigsten ihrer mathematischen Gesetzmäßigkeit nach bekannt sind. Nicht nötig, weil nur eine beschränkte Anzahl von den Naturkräften, die überhaupt auf den Körper einwirken, eine so bedeutende Wirkung ausübt, daß diese in Anbetracht der Genauigkeit der Rechnung, die angestrebt wird, berücksichtigt werden muß. Je nach der Natur der zu lösenden Aufgabe und je nach dem Grade der zu erreichenden Genauigkeit können wir den einen oder andern Einfluß unberücksichtigt lassen; und eben darin u. a. liegt die Möglichkeit der Erforschung der Natur. Handelt es sich z. B. in der Astronomie um die Bewegung des Merkurs um die Sonne, so wirkt auf ihn nicht nur die Anziehung der Sonne, sondern auch noch diejenige der Venus, der Erde und der übrigen Planeten, Planetoiden und Monde, ferner die Anziehung der übrigen fernen Sonnen, der Fixsterne; es wird aber in vielen Fällen genügen, lediglich denjenigen Einfluß, den die Rechnung als den bei weitem größten aufweist, nämlich die Anziehung der Sonne, zu berücksichtigen.

Entsprechend verhält es sich in dem Fall der vorliegenden Aufgabe: Es wird ein Körper mit bestimmter Anfangsgeschwindigkeit und unter bestimmtem Neigungswinkel gegen die Wagrechte

geworfen; an welcher Stelle des Raums befindet sich sein Schwerpunkt nach einer gegebenen Anzahl von Sekunden; welches ist die augenblickliche Bewegungsrichtung, Lage und Geschwindigkeit des Körpers? Oder aber, wenn die Stelle bekannt ist, an welcher der Schwerpunkt des mit gegebener Geschwindigkeit geworfenen Körpers nach gegebener Zeit angelangt ist, unter welchem Neigungswinkel zur Wagrechten wurde er abgeworfen? usw. In diesem Fall wirken auf den Körper mehrere Kräfte: die Anziehung der Erde; ferner der normale und tangentielle Widerstand der Luft (dieser Widerstand hängt von der Gestalt und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers, von der fortschreitenden Geschwindigkeit seines Schwerpunkts, von den Relativbewegungen des Körpers in Beziehung auf seinen Schwerpunkt und von der mit der Temperatur der Luft, deren relativer Feuchtigkeit, dem Barometerstand und mit der Erhebung über dem Boden wechselnden Luftdichte ab), außerdem wird die Bewegung des Körpers durch den stets herrschenden Wind, sowie dadurch beeinflusst, daß die Erde selbst sich um ihre Achse dreht, die Schwere des Körpers aber ist mit der geographischen Breite des Ortes, an dem die Wurfbewegung untersucht wird, und mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt auf Grund des Newtonschen Gesetzes veränderlich; auch Gebirgsmassen, die in der Nähe des Körpers sich befinden, ändern die Größe und Richtung der Schwerkraft.

Wir werden also hier ebenso verfahren, wie der Astronom oder der Techniker verfährt, wenn an ihn eine sehr verwickelte Aufgabe herantritt, nämlich die Größe der verschiedenen Einflüsse abschätzen und zuerst nur die wichtigsten berücksichtigen, also die Schwerkraft und den Luftwiderstand. Indes auch so wäre die Aufgabe, wie man weiß, noch eine sehr verwickelte; deshalb löst man vorerst die Aufgabe mit den weitestgehenden vereinfachenden Annahmen, indem man nur die Schwerkraft als äußere Kraft in Rechnung zieht und die Beschleunigung durch dieselbe näherungsweise als eine Konstante  $g$  einführt, auch von der Erdkrümmung und Erdumdrehung vorläufig absieht.

Die Berechnungen über eine Wurfbewegung im leeren Raum können allerdings niemals mit der Wirklichkeit völlig übereinstimmen; doch können die betr. Ergebnisse als erste Annäherungen dem Ballistiker Nutzen bringen, wenn es sich um kleine Geschwindigkeiten schwerer Geschosse handelt, wie z. B. bei Mörsern, oder wenn bei großer Geschwindigkeit eines Geschosses der Luftwiderstand nur eine kurze Zeit einwirkt, bis das Ziel erreicht wird, wie z. B. bei Berechnungen über den Abgangsfehlerwinkel von Infanteriegeschossen; über solche Verwendungen vgl. die Beispiele § 5, 1 und 2 gegen Schluß des Abschnitts.

Ein Achsenkreuz der  $x$  und  $y$  sei folgendermaßen angenommen: Sein Nullpunkt  $O$  sei die Mitte der Mündung der Schußwaffe im Augenblick des Geschosßaustritts (unter der Voraussetzung, daß die Geschosßgeschwindigkeit von da ab nicht durch die nachströmenden Pulvergase weiterhin eine Beschleunigung erfährt; wenn letzteres der Fall ist, möge als Anfangspunkt  $O$  derjenige Flugbahnpunkt gewählt werden, in dem diese Beschleunigung aufhört). Die Geschosßgeschwindigkeit im Punkt  $O$ , die sog. „Anfangsgeschwindigkeit“, sei  $v_0$ , mit dem Horizontalneigungswinkel  $\varphi$  ihrer Richtung;  $\varphi$  heißt „Abgangswinkel“, die Horizontalebene durch  $O$  heißt „Mündungshorizont“ oder „Horizontalebene“, die lotrechte Ebene durch die Anfangstangente „Schußebene“. Diese Schußebene durch  $O$  sei die Ebene des Achsenkreuzes, die  $x$ -Achse wagrecht durch  $O$ , positiv in der Richtung der wagrechten Komponente  $v_0 \cos \varphi$  oder  $v_x$  der Anfangsgeschwindigkeit,

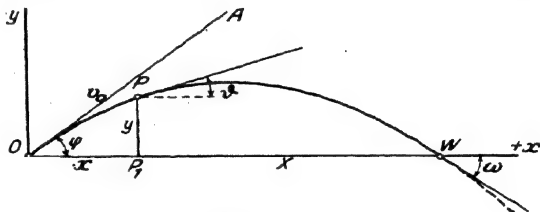


Abb. 1.

der Anfangsgeschwindigkeit, die  $y$ -Achse lotrecht durch  $O$ , positiv nach oben, also im Sinne der lotrechten Komponente  $v_0 \sin \varphi$  oder  $v_y$  der Anfangsgeschwindigkeit. Nach  $t$  Sekunden, von  $O$  ab gezählt, befinde sich der Geschosßschwerpunkt im Punkte  $P(xy)$  und besitze die Bahngeschwindigkeit  $v$  mit der Horizontalneigung  $\vartheta$  ihrer Richtung. Der positive Drehungssinn von  $\vartheta$  ist durch den in der Abbildung angedeuteten Pfeil festgelegt; es ist somit im Anfangspunkt  $O$  der Flugbahn  $\vartheta = \varphi$ , dazu  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $v = v_0$ . Auf dem aufsteigenden Ast der Flugbahn ist  $\vartheta$  positiv und nimmt nach Null ab. Im Scheitel ist  $\vartheta = 0$ ,  $x = x_s$ ,  $y = y_s$  oder  $Y$ ,  $v = v_s$ ,  $t = t_s$ . Auf dem absteigenden Ast der Flugbahn ist  $\vartheta$  überstumpf,  $\tan \vartheta$  negativ. Im „Auffallpunkt“ oder „Endpunkt“ der Flugbahn, d. h. in ihrem zweiten Schnittpunkt  $W$  mit dem Mündungshorizont ist  $\vartheta = \vartheta_s = 360^\circ - \omega$ , wo  $\omega$  der „spitze Auffallwinkel“ ist (vorausgesetzt, daß die Flugbahn die in der Zeichnung angegebene Gestalt besitzt), dabei ist für  $y = 0$ ,  $x =$  „Gesamtschußweite“  $X$ ,  $v =$  „Endgeschwindigkeit“  $v_e$ ,  $t =$  „Gesamtflugzeit“  $T$ .

Durch elementare Betrachtungen auf Grund des Unabhängigkeitsprinzips der Mechanik oder, was dem Inhalt nach dasselbe ist, durch Integration der voneinander unabhängigen Differentialgleichungen der Geschosßbewegung:  $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ , und  $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ , mit

den Anfangsbedingungen:  $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \varphi$ ,  $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \varphi$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  für  $t = 0$ , erhält man für die Lage  $(xy)$  des Geschöschwerpunktes, oder kurz gesagt des Geschosses, nach  $t$  Sekunden die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos \varphi \cdot t = v_1 \cdot t \\ y &= v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = v_2 \cdot t - \frac{g}{2} t^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dies ist die Doppelgleichung der Flugbahn in Parameterform, mit der Zeit  $t$  als Parameter.

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) dasjenige Element, das sich auf den einzelnen Zeitpunkt bezieht, also  $t$ , so erhält man die Gleichung der Flugbahn in der Form

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{4 \cdot h \cdot \cos^2 \varphi}, \quad \left( \text{wo zur Abkürzung } h = \frac{v_0^2}{2g} \right); \quad (2)$$

es ist die Gleichung einer Parabel mit lotrechter Achse.

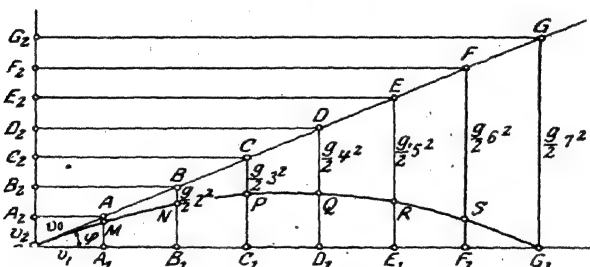


Abb. 2.

Der Gipfel (Scheitel), mit den Koordinaten  $x_s, y_s$ , liegt da, wo die Flugbahntangente wagrecht, also  $y' \text{ oder } \operatorname{tg} \vartheta = 0$  ist; allgemein ist  $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2 \cdot h \cdot \cos^2 \varphi}$ ; somit ist  $x_s = 2 h \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = h \cdot \sin 2 \varphi$ , dazu aus (2)  $y_s = h \cdot \sin^2 \varphi$ . (Hier, im Fall der Parabel mit vertikaler Achse, ist der Gipfel zugleich der Scheitel, d. h. der Punkt stärkster Krümmung.)

Diejenige Höhe  $y_a$ , in der sich das Geschöß durchschnittlich befindet, ist bezüglich der Zeit  $\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y \cdot dt$  und bezüglich der horizontalen Entfernung  $\frac{1}{X} \cdot \int_0^X y \cdot dx$ . Man findet leicht, daß beide Werte gleich  $\frac{2}{3} y_s$  sind. Dagegen diejenige Höhe, über welcher und

unter welcher sich das Geschloß gleich lange Zeit bei seinem Flug befindet, — sie sei die mittlere Flughöhe genannt und mit  $y_m$  bezeichnet —, ist  $y_m = \frac{3}{4} y_s$ , wie leicht abgeleitet werden kann.

Die Gesamtschußweite  $X$  ergibt sich aus (2) zu  $X = 2h \cdot \sin 2\varphi$ .

Die größte Schußweite wird, bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  oder gleichbleibendem  $h$ , dann erhalten, wenn  $\sin 2\varphi$  am größten ist, d. h. wenn  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ; ein Ergebnis, das schon Tartaglia durch den Versuch annähernd erhärtet hatte. In diesem Fall wird die Schußweite  $X = 2h \cdot \sin 2\varphi = 2h$ , also das Doppelte der Flughöhe  $\frac{v_0^2}{2g}$ , die von einem Körper erreicht wird, der mit derselben Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  lotrecht in die Höhe geworfen wird.

Die Geschwindigkeit  $v$  des geworfenen Körpers nach der Zeit  $t$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &= v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi + (v_0 \sin \varphi - gt)^2 = v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 \cdot gt; \end{aligned}$$

nun war  $y = v_0 t \sin \varphi - \frac{g}{2} t^2$  und  $h = \frac{v_0^2}{2g}$ , also ist

$$v^2 = 2g \left( \frac{v_0^2}{2g} - v_0 \cdot t \sin \varphi + \frac{g}{2} t^2 \right),$$

somit kurz

$$v^2 = 2g(h - y).$$

Die Geschwindigkeit des Körpers im Punkt  $(xy)$  oder nach der Zeit  $t$  ist also dieselbe, wie wenn der Körper um die Strecke  $h - y$  frei herabgefallen wäre. Darüber s. w. u.

Die Flugzeit, also diejenige Zeit, die der Körper braucht, um den Punkt  $(xy)$  zu erreichen, ist nach (1)  $t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi}$ ; im besonderen die Zeit, die er braucht, um den gesamten über dem Mündungshorizont liegenden Teil  $OW$  der Flugbahn zu durchlaufen, ist gleich derjenigen Zeit, die die Horizontalprojektion  $P_1$  des Massenpunkts zum Durchlaufen der Gesamtschußweite  $OW$  nötig hat, also gleich

$$\frac{OW}{v_0 \cos \varphi} = \frac{4h \sin \varphi}{v_0}; \text{ gesamte Flugzeit } T = \frac{2 \cdot v_0 \sin \varphi}{g}.$$

Führt man diesen Wert  $v_0 \sin \varphi = \frac{g}{2} T$  in die zweite Gleichung (1) ein, so folgt

$$y = \frac{g}{2} t(T - t).$$

Wenn  $t$  speziell gleich der halben Gesamtflugzeit geworden ist,  $t = \frac{T}{2}$ , so ist, wegen der Symmetrie der Parabel um die Gipfelordinate,  $y$  speziell die Gipfelhöhe  $y_s$ , also

$$y_s = \frac{g}{8} T^2 = 1,226 \cdot T^2.$$

Diese Formel, die auch für den luftgefüllten Raum oft gute Dienste leistet, heißt in Deutschland die Hauptsche, in England die Sladensche Formel, ist aber nichts anderes als die betreffende, seit etwa 17 $\frac{1}{2}$  Jahrhunderten bekannte Formel des leeren Raumes.

Mit Hilfe der abgeleiteten Gleichungen für die Elemente  $x, y, v, t, \vartheta$  eines beliebigen Flugbahnpunkts (bei gegebenem  $v_0$  und  $\varphi$ ) lassen sich je vier von diesen Größen in der fünften ausdrücken. Die zugehörigen Gleichungen findet man in der Zusammenstellung am Schlusse dieses Abschnitts.

Weitere Beziehungen erhält man dadurch, daß man eine Schar von Flugbahnen ins Auge faßt und hierbei die gemeinschaftlichen Eigenschaften aufsucht, die die einzelnen Flugbahnen der Schar verbinden.

## § 2. Schar der Flugbahnen bei gleichbleibender Anfangsgeschwindigkeit.

In derselben Vertikalebene, der Zeichnungsebene, liegen unendlich viele Flugbahnparabeln, die demselben Punkt  $O$  als Abgangspunkt und demselben Wert  $v_0$  der Anfangsgeschwindigkeit (derselben Ladung) zugehören; man erhält diese Schar, indem man dem Abgangswinkel  $\varphi$  der Reihe nach andere und andere Werte zuerteilt.

Zunächst seien aus der Schar zwei Parabeln herausgegriffen, die dadurch zusammengehören, daß beide durch denselben Punkt  $(xy)$  gehen sollen. Man denke sich also  $(x, y)$  als einen gegebenen Punkt (Spitze eines Turmes usw.); unter welchem Abgangswinkel muß geschossen werden, damit dieser Zielpunkt  $(x, y)$  getroffen wird? Es war  $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{4h \cdot \cos^2 \varphi}$ ; mit  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$  und  $\operatorname{tg} \varphi = z$  wird  $4hy + x^2 - 4hxz + x^2 z^2 = 0$ , daraus

$$z = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2h}{x} \pm \frac{1}{x} \cdot \sqrt{4h^2 - 4hy - x^2}. \quad (3)$$

Das doppelte Vorzeichen deutet an, daß derselbe Punkt  $(xy)$  der Ebene bei derselben Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , also demselben Wert von  $h = \frac{v_0^2}{2g}$ , auf doppelte Weise getroffen werden kann; die beiden Abgangswinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  lassen sich aus (3) berechnen; der eine Schuß heißt Flachschuß oder direkter Schuß, der andere

Bogen- oder indirekter Schuß. Eine Winkelbeziehung zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  wird sich weiter unten ergeben. Vorerst betrachte man die beiden Lösungen (3) näher. Offenbar gibt es dann und nur dann zwei voneinander verschiedene reelle Abgangswinkel  $\varphi$ , wenn die Quadratwurzel reell ist, also wenn  $4h^2 > 4hy + x^2$  ist. Beide Lösungen fallen in eine zusammen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel Null ist; wenn endlich  $(xy)$  so liegt, daß  $4h^2 < 4hy + x^2$ , so gibt es (immer bei gegebenem  $h$ , also  $v_0$ ) keinen reellen Abgangswinkel  $\varphi$ , mit dem der Punkt  $(xy)$  getroffen werden könnte.

Also zerfällt die ganze Schußebene in zwei Gebiete; in dem einen Gebiet liegen diejenigen Punkte  $(xy)$ , die auf doppelte Weise getroffen werden können; im andern liegen diejenigen Punkte, die überhaupt nicht getroffen werden; beide Gebiete werden durch die Kurve getrennt, der die Gleichung  $4h^2 = 4hy + x^2$  (mit  $x, y$  als Variablen) zukommt und die den geometrischen Ort der Punkte der Ebene darstellt, die nur auf eine einzige Weise getroffen werden können, für die also der direkte und der indirekte Schuß zusammenfallen.

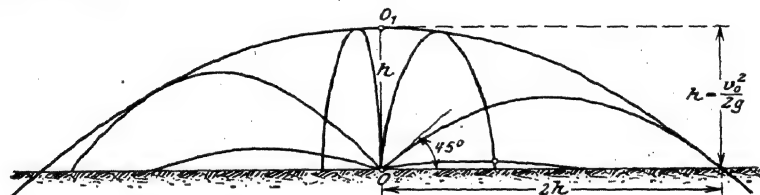


Abb. 3.

Diese Kurve ist eine Parabel, mit Brennpunkt in  $O$ ; man erkennt dies sofort, wenn man den Koordinatenanfang durch Parallelverschiebung des Systems in den Punkt  $O_1(0, h)$  verlegt, der auf der Kurve liegt. Ersetzt man  $y$  durch  $h + y'$  und nimmt sodann  $y'$  negativ, so wird die Kurvengleichung  $4h^2 = 4h(h - y') + x^2$  oder  $x^2 = 4h \cdot y'$ ; d. h. die Kurve  $4h^2 = 4hy + x^2$  stellt eine Parabel dar, deren Scheitel in  $O_1$ , deren Brennpunkt in  $O$  liegt und deren Achse somit lotrecht ist.

Nach dem Vorhergehenden, zusammen mit dem aus der Theorie der Einhüllenden Bekannten, ist zu entnehmen, daß diese Parabel

$$4h^2 = 4hy + x^2 \quad (4)$$

die Einhüllende aller Wurfparabeln der besprochenen Schar darstellt, wie sich auch unmittelbar mit Leichtigkeit ergibt:

Die Gleichung der Flugbahnparabel (2) war

$$\frac{x^2}{\cos^2 \varphi} - 4h \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot x + 4h \cdot y = 0;$$



leitet man diese Gleichung, die mit  $\varphi$  als willkürlichem Parameter zugleich die Gleichung der erwähnten Parabelschar ist, partiell nach  $\varphi$  ab, so folgt

$$+ \frac{2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \cdot x^2 - \frac{4h \cdot x}{\cos^2 \varphi} = 0;$$

es ist also entweder  $x = 0$  und damit  $y = 0$  (d. h. man kann den Abgangspunkt  $O$  als unendlich kleinen Kreis betrachten, der von sämtlichen Parabeln umhüllt wird), oder aber ist der andere Faktor Null,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h}{x}$ ; wird hieraus und aus der Gleichung der Parabelschar das die einzelne Parabel als Individuum kennzeichnende Element, also  $\varphi$ , ausgeschaltet, so bleibt  $x^2 \left(1 + \frac{4h^2}{x^2}\right) - 4h \cdot \frac{2h}{x} \cdot x + 4h \cdot y = 0$  oder  $x^2 + 4h^2 - 8h^2 + 4hy = 0$ , woraus endlich  $4h^2 = 4hy + x^2$ , wie oben.

Dabei war die Betrachtungsweise nur auf die in der vertikal gedachten Zeichnungsebene vor sich gehenden Bewegungen bezogen worden; denkt man sich im Raum von  $O$  aus mit derselben Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  unter allen möglichen Abgangswinkeln  $\varphi$  geschossen, so werden die sämtlichen Wurfparabeln von einem Umdrehungsparaboloid eingehüllt, das den Gipfel in  $O_1$ , den Brennpunkt in  $O$  besitzt.

Um zu den Vorstellungen in einer Schußebene zurückzukehren, so sei gefragt, welches der geometrische Ort der Brennpunkte, sowie derjenige der Gipfel sämtlicher Parabeln der Schar sei.

Die ursprüngliche Gleichung (2) der Wurfparabel

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{4 \cdot h \cdot \cos^2 \varphi}$$

läßt sich in der Form schreiben

$$\left(x - \frac{v_1 \cdot v_2}{g}\right)^2 = - \frac{2 \cdot v_1^2}{g} \left(y - \frac{v_2^2}{2g}\right),$$

wobei wie oben  $v_1 = v_0 \cdot \cos \varphi$ ;  $v_2 = v_0 \sin \varphi$  ist. Aus dieser Form der Gleichung läßt sich ohne weiteres auf die Lage der Leitlinie der Parabel schließen. Da nämlich der doppelte Parameter der Parabel aus der Gleichung sich zu  $\frac{2 \cdot v_1^2}{g}$  ergibt und da die Leitlinie von dem Gipfel um eine Strecke gleich dem halben Parameter absteht, so ist ihr Abstand von der ihr parallelen  $x$ -Achse gleich  $y + \frac{v_1^2}{2g}$  (wo  $y$ , die Ordinate des Gipfels) oder gleich  $\frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} = h$ ; somit hängt dieser Abstand von  $\varphi$  nicht ab und man hat den Satz: alle Parabeln der genannten Schar haben die Leitlinien gemeinschaftlich; ihre Höhe über der Wagrechten, der  $x$ -Achse,

ist gleich der Höhe  $h$ , die ein mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  vertikal aufwärts geworfener Körper erreicht.

Die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers in einem beliebigen Punkt  $(xy)$  der Flugbahn wurde früher gleich  $\sqrt{2g(h-y)}$  gefunden; dieses Ergebnis läßt sich nunmehr auch so ausdrücken. Die fragliche Geschwindigkeit ist dieselbe, die der Körper besitzen würde, wenn er von der Leitlinie aus bis zu jener Stelle der Bahn frei herabgefallen wäre. [Übrigens läßt sich letzteres auch unmittelbar aus dem Satz von der lebendigen Kraft einsehen; denn die lebendige Kraft des Geschosses von der Masse  $m$  in dem beliebigen Bahnpunkt  $(xy)$  ist  $\frac{m}{2} \cdot v^2$ ; der Verlust an kinetischer Energie  $\frac{m}{2} v_0^2 - \frac{m}{2} v^2$  gleich dem Gewinn  $mg \cdot y$  an Energie der Lage; da

$$v_0^2 = 2gh,$$

so ist

$$v^2 = 2g(h-y).]$$

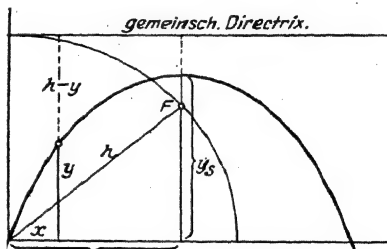


Abb. 4.

Aus der über die Leitlinie gewonnenen Beziehung folgt nunmehr leicht eine solche über die Lage der Brennpunkte sämtlicher Parabeln der Schar. Die Leitlinie jeder der Parabeln hat die unveränderliche Höhe  $h$  über der Wagrechten durch  $O$ ; der Gipfel der

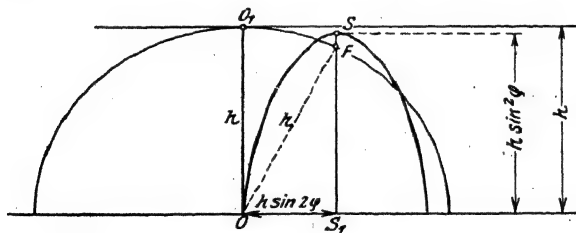


Abb. 5.

dem Abgangswinkel  $\varphi$  zugehörigen Parabel hat die Ordinate  $y_s = h \cdot \sin^2 \varphi$ ; also ist, weil der Gipfel einer Parabel vom Brennpunkt einerseits und von der Leitlinie andererseits gleich weit absteht, die Ordinate des Brennpunkts  $F$  um  $h - h \cdot \sin^2 \varphi$  oder um  $h \cdot \cos^2 \varphi$  kleiner als die Gipfelordinate; folglich ist die Ordinate  $S_1 F$  des Brennpunkts gleich  $h \sin^2 \varphi - h \cos^2 \varphi = -h \cdot \cos 2\varphi$ ; die Abszisse  $OS_1$  des Gipfels und damit des Brennpunkts ist  $OS_1 = h \cdot \sin 2\varphi$ ; dar-

aus  $OF^2 = S_1 F^2 + OS_1^2 = h^2 \cos^2 2\varphi + h^2 \sin^2 2\varphi = h^2$ ;  $OF = h$ , unabhängig von  $\varphi$ . Der geometrische Ort der Brennpunkte  $F$  aller Wurfparabeln der Schar ist danach ein Kreis um  $O$  mit dem Radius  $OO_1$  oder  $h$  (im Raum eine Kugel). Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Wagrechten durch  $O$  (der  $x$ -Achse) entspricht als Brennpunkt betrachtet der Parabel mit der größten Wurfweite, also mit dem Abgangswinkel  $45^\circ$ ; denn für diese ist die Ordinate des Gipfels  $\frac{h}{2}$ , die Abszisse  $h$ .

Andererseits ist der geometrische Ort für die Gipfel aller Wurfparabeln der Schar eine Ellipse mit den Halbachsen  $h$  und  $\frac{h}{2}$ , die die Wagrechte durch  $O$  in  $O$  berührt (im Raum ein Umdrehungsellipsoid); denn für die Koordinaten  $x_s, y_s$  des Gipfels war erhalten worden:

$$\frac{x_s}{h} = \sin 2\varphi; \quad y_s = h \cdot \sin^2 \varphi; \quad \frac{y_s - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\cos 2\varphi.$$

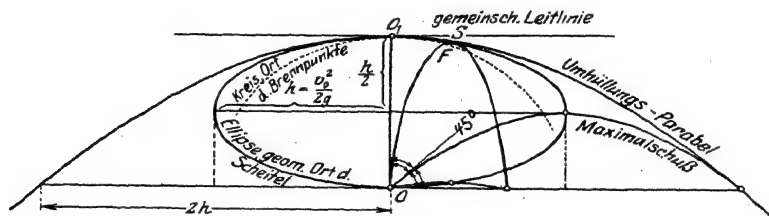


Abb. 6.

Durch Quadrieren und Addieren erhält man  $\left(\frac{x_s}{h}\right)^2 + \left(\frac{y_s - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 = 1$ ,

also das erwähnte Ergebnis.

Ferner ist der geometrische Ort der Schnittpunkte zwischen den Anfangstangenten an die verschiedenen Parabeln der Schar und zwischen den Achsen der betreffenden Parabeln ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der gemeinschaftlichen Leitlinie der Parabelschar liegt und der die  $x$ -Achse im Abgangspunkt  $O$  berührt. Denn für einen solchen Schnittpunkt gelten die Gleichungen  $x = h \cdot \sin 2\varphi$  und  $y = x \tan \varphi$ , woraus folgt:

$$x^2 + (y - h)^2 = h^2.$$

Man kann sich weiterhin die Frage vorlegen: Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, die bei derselben Anfangs-

geschwindigkeit  $v_0$  unter allen möglichen Abgangswinkeln  $\varphi$  nach einer und derselben Anzahl  $t$  von Sekunden erreicht werden? Man denke sich also von  $O$  aus unter allen möglichen Abgangswinkeln, aber mit derselben Anfangsgeschwindigkeit gleichzeitig sehr viele Geschosse abgehen; in einem bestimmten Augenblick, also nach einer bestimmten Anzahl  $t$  von Sekunden, befinden sich die sämtlichen Geschosse auf einer gewissen Fläche; welcher Art ist diese Fläche? [Oder denke man sich, aus einem Vulkan werden gleichzeitig eine große Menge von Steinen mit annähernd derselben Anfangsgeschwindigkeit herausgeschleudert, und setze voraus, daß bei der Berechnung der Luftwiderstand vernachlässigt werden könne, eine Voraussetzung, die freilich in den seltensten Fällen mit der Wirklichkeit genügend übereinstimmen wird, so kann gefragt werden, welches der Umriß der aus dem Vulkan heraustretenden Wolke in irgendeinem Zeitpunkt sei.] Da um die Lotrechte durch  $O$  alles symmetrisch ist, hat man auch hier nur nötig, die Würfe in der lotrechten Zeichnungsebene zu berücksichtigen.

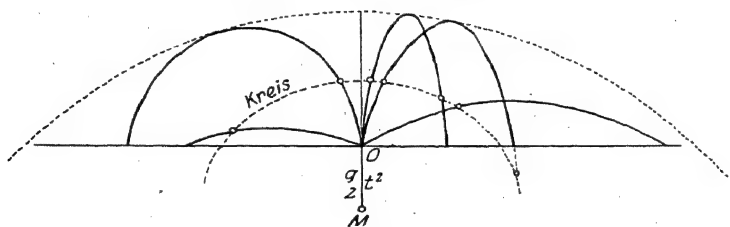


Abb. 7.

Nach  $t$  Sekunden waren die Koordinaten eines solchen Geschosses:

$$x = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t, \quad y = v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Nunmehr ist  $\varphi$  auszuschalten mit Hilfe der Beziehung  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ ; dies gibt  $x^2 + \left(y + \frac{g}{2} \cdot t^2\right)^2 = (v_0 \cdot t)^2$ . Innerhalb der Zeichnungsebene ist dies die Gleichung eines Kreises, dessen Radius  $(= v_0 \cdot t)$  sich proportional der Zeit gleichmäßig vergrößert und dessen Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse abwärts geht; anfangs, für  $t = 0$ , ist der Kreismittelpunkt in  $O$ , nach  $t$  Sekunden ist er um  $\frac{g}{2} \cdot t^2$  unterhalb von  $O$ ; also hat sich der Kreismittelpunkt in dieser Zeit um eine gleiche Strecke auf der negativen  $y$ -Achse von  $O$  entfernt, wie wenn er als ein Massenpunkt infolge der Schwerkraft frei herabgefallen wäre.

Durch Umdrehung der Flugbahnebene um die  $y$ -Achse erhält man als gesuchten geometrischen Ort eine Kugel mit dem Halb-

messer  $v_0 \cdot t$ , deren Mittelpunkt  $M$  nach  $t$  Sekunden in einer Tiefe unter  $O$  sich befindet, die in derselben Zeit von einem frei herabfallenden schweren Massenpunkt erreicht worden wäre.

Wenn man mit gleichbleibendem  $v_0$  und Aufsatzwinkel  $\varphi_1$  schießt, also denselben Winkel  $\varphi_1$  zwischen Anfangstangente und Richtung nach dem Ziel, oder, was beim Schießen auf schieferem Gelände dasselbe bedeutet, den gleichen Winkel  $\varphi_1 = \varphi - E$  zwischen der Anfangstangente und dem schiefen Gelände vom Horizontalneigungswinkel  $E$  anwendet, so ist der geometrische Ort für die Schnittpunkte zwischen Visierlinie und Flugbahn (oder für die Auffallpunkte auf dem schiefen Gelände) die Parabel

$$y = x \cdot \cotg \varphi_1 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \sin^2 \varphi_1}.$$

Dies ist eine Flugbahnparabel mit  $v_0$  und einem Abgangswinkel gleich dem Komplement von  $\varphi_1$ . Für verschiedene Visierwinkel  $\varphi_1$  bei gleichem  $v_0$  hat man eine Schar solcher Parabeln. Diese ganze Schar ist offenbar identisch mit der in dieser Nummer behandelten Schar von Flugparabeln mit gleichbleibendem  $v_0$ . Letztere Schar ist somit gleichzeitig die Kurvenschar gleicher Aufsatzwinkel. Die Ableitung der letzteren Beziehungen wird in § 4 gegeben werden.

### § 3. Schar der Flugbahnen mit gleichbleibendem Abgangswinkel und einige andere Flugbahnscharen.

A. Den vorhergehenden Sätzen über die Gesamtheit der Flugbahnen bei unveränderter Ladung, also gleicher Anfangsgeschwindigkeit, stehen andere gegenüber, die sich auf die Schar der Flugbahnen mit unverändertem Abgangswinkel und verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten beziehen.

Man denke sich also jetzt ein eingespanntes Gewehr oder ein Geschütz mit immer gleichbleibender Neigung  $\varphi$  der Seelenachse gegen die Wagrechte, dagegen immer andere Anfangsgeschwindigkeiten der Geschosse gewählt, und stelle sich die entsprechenden Fragen wie vorher.

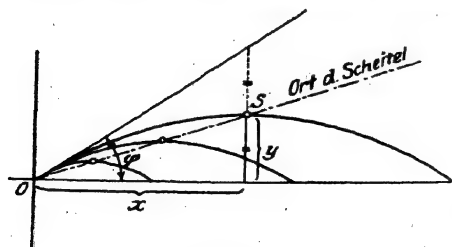


Abb. 8.

Der geometrische Ort der Gipfel aller Wurfparabeln der 2. Schar ist eine gerade Linie, die man erhält; wenn man eine lotrechte Strecke zwischen den Schenkeln des Abgangswinkels  $\varphi$  halbiert und den Halbierungspunkt  $S$  mit  $O$  verbindet. Denn für

den Gipfel war  $x = h \cdot \sin 2\varphi$ ,  $y = h \cdot \sin^2 \varphi$ ; hier ist  $\varphi$  unveränderlich; also ist die von einer Flugbahn zur anderen veränderliche Größe  $h (= \frac{v_0^2}{2g})$  auszuschalten; durch Division wird  $\frac{y}{x} = \frac{\sin^2 \varphi}{\sin 2\varphi}$ ;  $2y:x = \operatorname{tg} \varphi$ , worin der Beweis liegt. Dieser geometrische Ort der Gipfel ist auch der 4. harmonische Strahl zu der wagrechten  $x$ -Achse, der Anfangstangente und zu der lotrechten  $y$ -Achse.

Ebenso ist der geometrische Ort der Brennpunkte eine Gerade; man konstruiert sie, indem man den Abgangswinkel  $\varphi$  verdoppelt und auf dem freien Schenkel dieses Winkels  $2\varphi$  die Senkrechte in  $O$  errichtet.

In der Tat, die Koordinaten des Brennpunkts waren

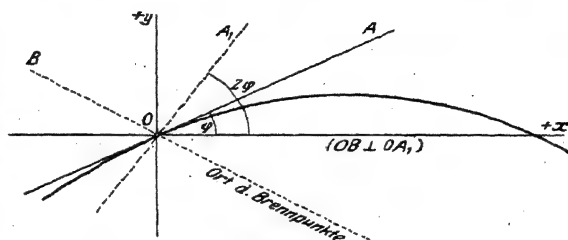


Abb. 9.

$$x = h \cdot \sin 2\varphi \quad \text{und} \quad y = -h \cdot \cos 2\varphi;$$

durch Ausschaltung von  $h$  folgt

$$\frac{y}{x} = -\cot 2\varphi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + 2\varphi \right),$$

also die obige Behauptung.

Denkt man sich endlich unter demselben Abgangswinkel  $\varphi$  mit allen möglichen Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0 (= \sqrt{2gh})$  gleichzeitig in derselben Vertikalebene geschossen, so kann man auch hier fragen, auf welcher Linie finden sich nach einer bestimmten Anzahl  $t$  von Sekunden die sämtlichen geworfenen Körper vor?

Die Lage eines solchen Körpers nach  $t$  Sekunden ist durch dessen Koordinaten festgelegt;  $x = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t$  und  $y = v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t -$

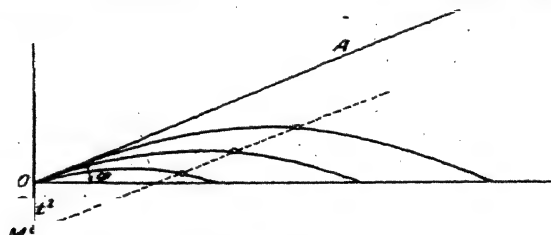


Abb. 10.

ist durch dessen Koordinaten festgelegt;  $x = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t$  und  $y = v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t -$

Durch

Elimination von  $v_0$  erhält man  $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2} \cdot t^2$ .

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie parallel der gleichbleibenden Abgangsrichtung  $OA$ ; ihr Schnittpunkt  $M$  mit der  $y$ -Achse befindet sich um  $\frac{g}{2} t^2$  unterhalb  $O$ ; man hat sich also nur zu denken,

daß, gleichzeitig mit jenen von  $O$  aus geworfenen Körpern, ebenfalls von  $O$  aus eine schwere Masse frei herabfällt. Nach  $t$  Sekunden sei diese Masse in  $M$  angelangt; durch  $M$  ziehe man eine Parallele zu der Abgangsrichtung  $OA$ . Durch Drehung um die  $y$ -Achse findet man sodann als geometrischen Ort für die Lagen der sämtlichen gleichzeitig abgeworfenen Körper im Raum eine Kegelfläche, parallel der Kegelfläche  $OA$ ; ihre Spitze  $M$  rückt von  $O$  aus abwärts, wie eine schwere Masse frei fällt.

Endlich sind leicht folgende Eigenschaften zu beweisen: Denkt man sich vom Abgangspunkt  $O$  aus eine Gerade  $OM_1M_2M_3\dots$ , die die einzelnen Parabeln der Schar in den Punkten  $M_1M_2M_3\dots$  trifft, so sind die Parabeltangente in  $M_1M_2M_3\dots$  unter sich parallel, und die Flugzeiten zum Erreichen dieser Punkte verhalten sich wie die Bahngeschwindigkeiten in diesen Punkten und auch wie die betreffenden Anfangsgeschwindigkeiten. Zieht man ferner eine zweite Gerade  $ON_1N_2N_3\dots$  durch  $O$ , die den Parabeln in  $N_1N_2N_3\dots$  begegnet, so sind die Verbindungslinien  $M_1N_1, M_2N_2\dots$  unter sich parallel.

B. Schar der Wurfparabeln mit unveränderter wagrechter Komponente der Anfangsgeschwindigkeit,  $v_0 \cos \varphi = \text{konst.} = \kappa$ .

Der Ort der Gipfel ist die Parabel  $y = \frac{g}{2\kappa^2} \cdot x^2$ .

(Denn die Koordinaten des Gipfels waren:

$$x_s = \frac{v_0^2}{g} \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\kappa^2}{g} \cdot \text{tg } \varphi, \quad y_s = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi = \frac{\kappa^2}{2g} \cdot \text{tg}^2 \varphi; \text{ durch Elimination von } \varphi \text{ folgt } y_s = \frac{g}{2\kappa^2} \cdot x_s^2.)$$

Der Ort der Brennpunkte ist dieselbe Parabel, aber parallel mit sich nach abwärts versetzt um  $\frac{\kappa^2}{2g}$ .

(Denn die Koordinaten des Brennpunkts waren:

$$x_f = h \cdot \sin 2\varphi = \frac{\kappa^2}{g} \cdot \text{tg } \varphi; \quad y_f = -h \cdot \cos 2\varphi = -\frac{\kappa^2}{2g} (1 - \text{tg}^2 \varphi), \text{ daraus} \\ y_f + \frac{\kappa^2}{2g} = \frac{g}{2\kappa^2} \cdot x_f^2.)$$

Ferner ist der Ort der Punkte, die nach derselben Zeit  $t$  erreicht werden, durch die lotrechte Gerade  $x = v_0 \cos \varphi \cdot t = \kappa \cdot t$  dargestellt.

Endlich ist der Ort der Punkte mit gleicher Tangentenneigung  $\vartheta$  eine Parabel. Denn nach dem Früheren ist:

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}{g} (\text{tg } \varphi - \text{tg } \vartheta) = \frac{\kappa^2}{g} (\text{tg } \varphi - \text{tg } \vartheta) \\ y = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2g} (\text{tg}^2 \varphi - \text{tg}^2 \vartheta) = \frac{\kappa^2}{2g} (\text{tg}^2 \varphi - \text{tg}^2 \vartheta).$$

Durch Elimination von  $\varphi$  ergibt sich  $y = x \cdot \text{tg } \vartheta + \frac{g x^2}{2\kappa^2}$ .

C. Schar der Wurfparabeln mit konstanter Vertikalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit,  $v_0 \sin \varphi = \text{konst.} = m$ , oder, was dasselbe ist, mit konstanter Gesamtflugzeit  $T$  oder auch mit konstanter Gipfelhöhe  $y_s$ .

Der Ort der Gipfel ist die Horizontale  $y_s = \frac{m^2}{2g}$ .

Der Ort der Brennpunkte ist die Parabel  $y = \frac{m^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 m^2}$ .

(Denn es war

$$x_f = \frac{v_0^2}{g} \sin \varphi \cos \varphi = \frac{m^2}{g} \cotg \varphi,$$

$$y_f = -\frac{v_0^2}{2g} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = -\frac{m^2}{2g} (\cotg^2 \varphi - 1).$$

Durch Elimination von  $\cotg \varphi$  und Weglassung des Index  $f$  folgt obiges.)

Endlich der geometrische Ort der Punkte, die nach derselben Zeit  $t$  erreicht werden, ist die Gerade  $y = m \cdot t - \frac{g}{2} t^2$ . Denn es war  $y = v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{g}{2} t^2$ .

Entsprechende Sätze können abgeleitet werden für die Schar der Wurfparabeln (mit demselben Abgangspunkt  $O$ ), die durch denselben Zielpunkt  $O$  gehen, weiter für die Schar der Wurfparabeln, die innerhalb derselben Schußebene eine gegebene Gerade berühren, u. a. m.

Die Ableitung sämtlicher Sätze kann auch mit Hilfe von elementargeometrischen oder projektivisch-geometrischen Betrachtungen erfolgen. Denn z. B. die Schar der Wurfparabeln mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  hat den Abgangspunkt  $O$ , die Achsenrichtung und die Leitlinie gemeinschaftlich, die Schar der Wurfparabeln von gleichem Abgangswinkel  $\varphi$  hat den Punkt  $O$ , die Achsenrichtung und die Tangente in  $O$  gemein usw. Eine derartige Entwicklung der wichtigsten Sätze hat Hauptmann Fr. Kulp (vgl. Lit.-Note) im ballistischen Laboratorium durchgeführt; er hat bei diesem Anlaß einige wie es scheint neue Sätze aufgefunden. Die Arbeit von Fr. Kulp, auf die besonders hingewiesen sein möge, bildet für den mathematischen Unterricht, speziell für Vorträge in projektivischer Geometrie, eine Fundgrube von anregenden Anwendungsbeispielen.

Die Sätze über den geometrischen Ort der Punkte gleicher Flugzeit bei gleichbleibender Anfangsgeschwindigkeit einerseits und bei gleichbleibendem Abgangswinkel andererseits gestatten es, sich ein qualitatives Bild von der Verteilung der Sprengpunkte bei einem idealen, d. h. in sich selbst streunungslosen Zeitzünder zu machen. Man erkennt, daß auch der ideale Zünder Längen- und Höhenstreuungen der Sprengpunkte ergibt. Näheres siehe in der Lit.-Note.

#### § 4. Wurf auf geneigtem Boden.

Es werde jetzt die vorhergehende Aufgabe verallgemeinert: Die (oben als wagrecht vorausgesetzte) Bodenfläche möge nunmehr mit dem Horizont durch den Abgangspunkt den Neigungswinkel  $E$  bilden; der Abgangswinkel  $\varphi$  des Geschosses sei von dem Mündungshorizont aus gerechnet. Wie groß ist bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit die Wurfweite  $OA$ , gemessen auf der schiefen



Ebene? Welches ist die zugehörige Flugzeit? Und unter welcher Bedingung wird die größte Wurfweite erreicht? Die Gleichung der schiefen Ebene ist  $y = x \cdot \operatorname{tg} E$ ; man hat also zusammen  $x = v_1 \cdot t$  und  $y = v_2 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = x \cdot \operatorname{tg} E$ ; aus diesen drei Gleichungen sind  $x$  und  $y$  auszuschalten, wenn man die Zeit  $t$  erhalten will, die verfließt, bis das Geschöß die schiefe Ebene; also den Punkt  $A$  oder  $(x, y)$  erreicht; es wird  $v_2 \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = v_1 \cdot t \cdot \operatorname{tg} E$ , somit ist entweder  $t = 0$  (der Abgangspunkt  $O$  liegt ebenfalls auf der schiefen Ebene), oder

$$t = \frac{2 v_2}{g} - \frac{2 v_1}{g} \cdot \operatorname{tg} E = \frac{2 (v_2 - v_1 \cdot \operatorname{tg} E)}{g};$$

nun ist  $v_1 = v_0 \cdot \cos \varphi$ ;  $v_2 = v_0 \sin \varphi$ , somit wird

$$\text{die Flugzeit } t = \frac{2 v_0}{g} \cdot \frac{\sin (\varphi - E)}{\cos E}.$$

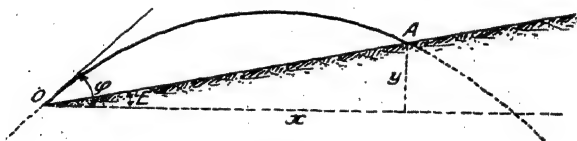


Abb. 11.

Ferner wird die Abszisse von  $A$  gleich

$$x = v_1 \cdot t = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \sin (\varphi - E)}{\cos E},$$

somit ist die Wurfweite  $OA$  auf der schiefen Ebene

$$OA = \frac{x}{\cos E} = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \sin (\varphi - E)}{\cos^2 E},$$

oder auch, wenn der Abgangswinkel gegenüber dem schiefen Gelände (d. i. bei Abgangsfehler Null der Winkel zwischen der Richtung  $OA$  nach dem Ziel  $A$  und der Seelenachse des Geschützes, der Aufsatzwinkel oder Visierwinkel) mit  $\varphi_1$  bezeichnet wird,  $\varphi - E = \varphi_1$ , so ist die Wurfweite

$$OA = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos (E + \varphi_1)}{\cos^2 E}.$$

Für welchen Wert des Abgangswinkels  $\varphi$  wird, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und gegebener Neigung  $E$  des Bodens, die Wurfweite  $OA$  ein Maximum? Der Ausdruck  $\cos \varphi \cdot \sin (\varphi - E)$  ist nach  $\varphi$  abzuleiten. Dies gibt

$$-\sin \varphi \cdot \sin (\varphi - E) + \cos \varphi \cdot \cos (\varphi - E) = 0;$$

$$\operatorname{tg} (\varphi - E) = \cotg \varphi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right);$$

somit muß sein

$$\varphi - E = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + E \right),$$

In diesem Fall ist der Winkel zwischen Anfangstangente der Flugbahn und zwischen der Vertikalen in  $O$  gleich

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{E}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{E}{2};$$

andererseits ist der Winkel zwischen der schiefen Ebene und der Lotrechten  $\frac{\pi}{2} - E$ ; also muß die Wurfrichtung den Winkel zwischen der schiefen Ebene und der Lotrechten des Abgangspunktes halbieren, wenn die Wurfweite, gemessen auf der schiefen Ebene, ein Maximum werden soll. (Dieses Ergebnis gilt auch, wenn die schiefe Ebene von  $A$  aus abwärts, statt aufwärts führt; s. Beispiel unten.)

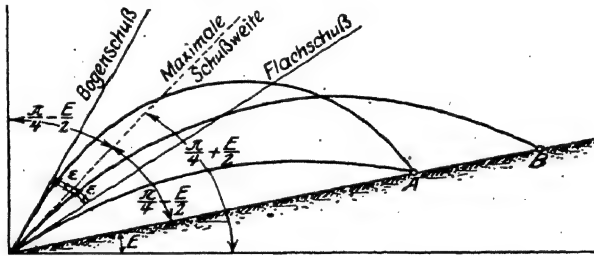


Abb. 12.

Schießt man unter zwei Abgangswinkeln, wovon der eine um den gleichen Betrag  $\varepsilon$  kleiner, wie der andere größer ist, als der eben erwähnte Winkel der Maximalschußweite, so treffen die beiden Schüsse die schiefe Ebene in demselben Punkt  $A$  (Flachschuß; — Bogenschuß).

In der Tat ist der größere der beiden Abgangswinkel

$$\frac{\pi}{4} + \frac{E}{2} + \varepsilon; \quad \text{der andere} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{E}{2} - \varepsilon;$$

folglich ist nach dem Obigen das erste Mal

$$\text{die Wurfweite: } \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{E}{2} + \varepsilon \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{E}{2} + \varepsilon \right)}{\cos^2 E};$$

das zweite Mal

$$\text{die Wurfweite: } \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{E}{2} - \varepsilon \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{E}{2} - \varepsilon \right)}{\cos^2 E}$$

Nun ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{E}{2} + \varepsilon\right) = \text{sinus des Komplements} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{E}{2} - \varepsilon\right)$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{E}{2} + \varepsilon\right) = \text{cosinus des } " = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{E}{2} - \varepsilon\right);$$

also erhalten beide Ausdrücke denselben Wert.

Speziell für  $E = 0$ , also bei wagrechtem Boden, wird die Wurfweite gleich für zwei Wurfinkel, die sich zu  $90^\circ$  ergänzen, oder von denen der eine um denselben Betrag kleiner, wie der andere größer ist als  $45^\circ$ . Dies folgt erstens aus dem Vorhergehenden durch die Spezialisierung  $E = 0$ , und zweitens einfacher unmittelbar aus der Formel für die Wurfweite  $= 2h \cdot \sin 2\varphi$ ; sind  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zwei Abgangswinkel der Art, daß  $\varphi_1 + \varphi_2$

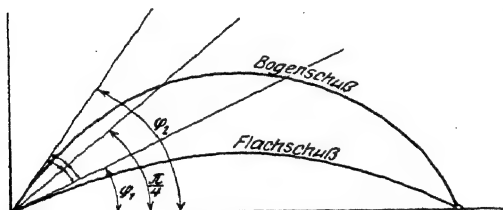


Abb. 13.

so ist

$$\sin 2\varphi_1 = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = \sin 2\varphi_2.$$

Der geometrische Ort der Auffallpunkte  $A$  auf dem schiefen Gelände, bei gleichbleibendem Aufsatzwinkel  $\varphi_1$  und derselben Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , aber bei veränderlichem Geländewinkel  $E$  ist die Parabel

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)} = x \cdot \cotg \varphi_1 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \sin^2 \varphi_1},$$

wie sich sofort ergibt, wenn man aus  $x = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi_1}{g \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}$  und  $y = x \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1)$  den Winkel  $\varphi$  ausschaltet.

Diese Beziehungen mögen des näheren durch die nachfolgende Tabelle erläutert werden. In dieser sind die Schußweiten  $OA = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos(\varphi_1 + E)}{g \cdot \cos^2 E}$ ,

unter der Annahme  $\frac{2 v_0^2}{g} = 10000$  oder  $v_0 \sim 221$  m/sec, für die Geländewinkel  $E = -20, -10, -5, 0, +5, +10, \dots$  bis  $+87$  Grad und für die Aufsatz- oder Visierwinkel  $\varphi_1 = 3, 5, 10, 15, 20, \dots$  bis  $90$  Grad gegeben.

Aus den Zahlen der Tabelle erkennt man zunächst, daß in der Tat bei gleichem Geländewinkel  $E$  die Schußweite dann ein Maximum wird, wenn die Anfangstangente der Flugbahn den Winkel zwischen dem schiefen Gelände und der nach oben gerichteten Vertikalen halbiert; z. B. bei dem Geländewinkel  $E = -20^\circ$  tritt das Maximum von  $7600$  m dann ein, wenn

$$\varphi_1 = \frac{90 + 20}{2} = 55^\circ \text{ ist.}$$

In der Tabelle ist durch dickere Begrenzungsstriche besonders hervorgehoben die Vertikalspalte derjenigen Schußweiten, die man mit dem betreffenden Aufsatzwinkel  $\varphi_1$  auf horizontalem Gelände ( $E = 0$ ) erzielt. Diese Schußweiten mögen die Visierschußweiten heißen. An den Aufsatzvorrichtungen der Geschütze und Gewehre sind vielfach außer den Visierwinkeln  $\varphi_1$  (in Graden) oder auch an Stelle dieser Winkel die erwähnten Visierschußweiten in Metern angeschrieben; dann ist im vorliegenden Fall z. B. die Angabe „Visier 2500“ gleichbedeutend mit der Angabe „Aufsatzwinkel  $15^\circ$ “ oder die Angabe „Visier 5000“ gleichbedeutend mit „Aufsatzwinkel  $45^\circ$ “, (dabei soll, wie schon erwähnt, im folgenden vorausgesetzt sein, daß der Abgangsfehlerwinkel Null sei).

Ist nun ein Ziel, dessen direkte Entfernung vom Geschütz 5000 m beträgt, auf einem schiefen Gelände vom Geländewinkel  $E = 20^\circ$  gelegen und wendet man, um das Ziel zu treffen, das Visier „5000“, d. h. den Aufsatzwinkel  $\varphi_1 = 45^\circ$  an, so macht man dabei stillschweigend die Annahme, daß es zur Erreichung des 5000 m entfernten Ziels bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  nur auf diese Entfernung 5000 m, nicht aber auf den Geländewinkel ankomme. Man dreht in Gedanken die Flugbahn um die Geschütz-mündung, und zwar um den Geländewinkel von z. B.  $+20^\circ$ , wie wenn die Flugbahn eine starre Kurve wäre. Daß letzteres tatsächlich nicht zutrifft, ist schon aus der Abb. 3 ohne weiteres ersichtlich. Man begeht in der Tat bei diesem „Schwenken der Flugbahnen“ im allgemeinen einen Fehler. In dem vorliegenden Beispiel — Geländewinkel  $E = +20^\circ$ , Aufsatzwinkel  $\varphi_1 = 45^\circ$  — wird die Schußweite nicht 5000 m, sondern 3384 m; man hat also Kurzschuß um 1616 m. Bei Geländewinkel  $E = -20^\circ$  und demselben Aufsatzwinkel  $45^\circ$  ist die Schußweite 7258 m statt 5000 m, somit Weitschuß, mit Fehler  $+2258$  m.

Für alle Aufsatzwinkel  $\varphi_1$ , die größer sind als ein gewisser Winkel zwischen  $15^\circ$  und  $20^\circ$  (nämlich  $16^\circ 44'$ , vgl. w. u.), liefert so das Schwenken der Flugbahn bei positivem Geländewinkel Kurzschuß, bei negativem Geländewinkel Weitschuß und zwar ist der Fehler beim Abwärtsschießen unter sonst gleichen Umständen absolut genommen größer als beim Aufwärtsschießen.

In dem erwähnten Bereich der Aufsatzwinkel trifft also, wie die Tabelle zeigt, die bekannte Jägerregel zu:

Bergauf, halt' drauf;  
Bergunter, halt' drunter.

Für kleinere Aufsatzwinkel  $\varphi_1$ , als  $16^\circ 44'$  sind die Verhältnisse etwas verwickelter. Z. B. werde das „Visier 522,6 m“ oder der Aufsatzwinkel  $3^\circ$  angewendet. Der Geländewinkel nehme zu von Null bis  $+87^\circ$ . Bei  $E = 0$  wird die Visierschußweite von 522,6 m, bei  $E = 87^\circ$  (vertikaler Schuß) die Schußweite Null erhalten. Dazwischen nimmt die Schußweite zunächst ein wenig ab, sodann erheblich zu, schließlich wieder sehr rasch nach Null hin ab. Es müssen also, da der Verlauf ein stetiger ist, zwischen den Geländewinkeln  $E = 0^\circ$  und  $E = 87^\circ$  zwei Geländewinkel existieren, für die die Visierschußweite 522,6 m wieder erreicht wird. Für diese speziellen Werte ( $E_1 = 6^\circ 2'$  und  $E_2 = 86^\circ 50'$ ) des Geländewinkels  $E$  ist somit das Schwenken der Flugbahn streng richtig; wenigstens hinsichtlich der erreichten Schußweite entsteht kein Fehler (die übrigen Flugbahngrößen allerdings sind nicht dieselben wie in dem Falle  $E = 0$ , wo das Ziel im Mündungshorizont liegt.)

Ähnliches ist aus den Horizontalreihen der Tabelle für die Aufsatzwinkel  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  und  $15^\circ$  zu ersehen. Man erhält so ein gewisses Gebiet von positiven

[illegible]

Geländewinkeln, innerhalb dessen nicht Kurzschuß, sondern Weitschuß erfolgt (in der Tabelle besonders umrahmt). Die Grenzen dieses Gebiets sind diejenigen Geländewinkel, für welche das Schwenken der Flugbahn dieselbe Schußweite auf dem schiefen Gelände ergibt, wie auf dem horizontalen.

Es entsteht also die Frage: Für welchen Geländewinkel  $E$  ist die Schußweite  $OB$  auf dem schiefen Gelände (vgl. Abb. 14) ebenso groß, wie die Schußweite  $OA$  auf wagrechtem Gelände, falls man gegenüber dem schiefen Gelände denselben Abgangswinkel anwendet, wie gegenüber dem horizontalen ( $\varphi_1 = \varphi$ )?

Die Bedingung lautet:

$$\frac{2v_0^2 \cdot \cos(E + \varphi_1) \cdot \sin \varphi_1}{g \cos^2 E} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi;$$

also bei Anwendung des Prinzips des Schwenkens ( $\varphi_1 = \varphi$ ):

$$2 \cos(E + \varphi) \cdot \sin \varphi = \cos^2 E \cdot \sin 2\varphi.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung, mit  $E$  als Unbekannter, ist  $E = 0$ . Abgesehen von dieser erhält man die Gleichung 3. Grades in  $\cos E$ :  $\cos^3 E - \cos^2 E + \cos E \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi = 0$ . Sie läßt sich auch schreiben:

$$\cos E \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \pm \operatorname{tg} \varphi.$$

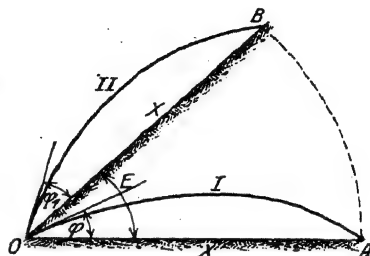


Abb. 14.

Diese Gleichung ist, was die positiven Geländewinkel betrifft, befriedigt:

1. bei Anwendung von  $\varphi = 0$ , wenn  $E_1 = 0$  und  $E_2 = 90^\circ$ ;
2. bei  $\varphi = 3^\circ$ , wenn  $E_1 = 6^\circ 2'$ ,  $E_2 = 86^\circ 50'$ ;
3. bei  $\varphi = 6^\circ$ , wenn  $E_1 = 12^\circ 16'$  und  $E_2 = 83^\circ 12'$ ;
4. bei  $\varphi = 9^\circ$ , wenn  $E_1 = 19^\circ 01'$  und  $E_2 = 78^\circ 54'$ ;
5. bei  $\varphi = 12^\circ$ , wenn  $E_1 = 26^\circ 47'$  und  $E_2 = 73^\circ 26'$ ;
6. bei  $\varphi = 16^\circ$ , wenn  $E_1 = 42^\circ 31'$  und  $E_2 = 60^\circ 38'$ ;

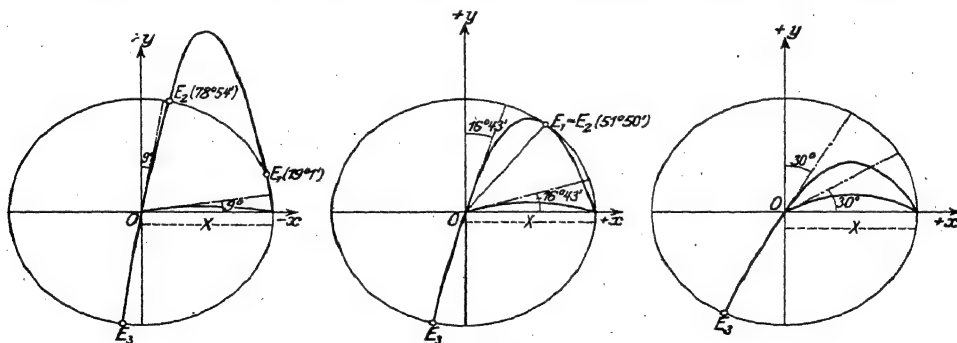


Abb. 15.

7. bei  $\varphi = 16^\circ 44'$ , wenn  $E_1 = E_2 = 51^\circ 50'$  (die dritten Wurzelwerte gehören nicht zum ersten, sondern zum dritten Quadranten). Z. B. wenn das Visier  $\varphi = 3^\circ$  angewendet wird, hat man beim Schwenken Kurzschuß, wenn  $E < 6^\circ 2'$  und wenn  $E > 86^\circ 50'$ ; Weitschuß, wenn  $E$  zwischen  $6^\circ 2'$  und  $86^\circ 50'$  liegt. Dieses Weitschußgebiet verengt sich also mehr und mehr bis Null, wenn  $\varphi$  von Null ab bis  $16^\circ 44'$  wächst. Von da ab nur Kurzschuß.

A. v. Obermayer, der 1901 zuerst diese Verhältnisse (für den luftleeren Raum) untersuchte, gab auch eine einfache geometrische Beziehung für die be-

treffenden Geländewinkel  $E_1$  und  $E_2$  an: Man zeichnet die zu gleichem  $v_0$  gehörige Flugbahnparabel, die den wagrechten Abgangswinkel  $90 - \varphi^0$ , als in dem obigen Beispiel  $90 - 3 = 87^0$  besitzt, beschreibt mit der zugehörigen Horizontalschußweite als Radius einen Kreis um  $O$  und verbindet die beiden im ersten Quadranten liegenden Schnittpunkte der Parabel und des Kreises mit  $O$ . Die Horizontalneigungen dieser beiden Verbindungslinien (bei dem Beispiel  $5^0 57'$  und  $86^0 51'$ ) sind die Geländewinkel  $E_1$  und  $E_2$ , für die das Schwenken gestattet ist. Zugleich ist, wie schon oben angedeutet, die erwähnte Parabel ein geometrischer Ort der Endpunkte aller schiefen Wurfweiten bei gleichem  $v_0$  und gleichem Aufsatzwinkel  $\varphi' = \varphi$ , so daß aus der gegenseitigen Lage von Kreis und Parabel sofort entschieden werden kann, ob bei irgendeinem Geländewinkel  $E$  Kurzschuß oder Weitschuß erhalten würde. Der Kreis  $x^2 + y^2 + X^2$  und die Parabel  $y = x \cdot \cotg \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2 \varphi}$  schneiden sich im 1. Quadranten in zwei Punkten (vgl. Abb. 15), die entweder reell und getrennt oder reell und zusammengefallen oder imaginär sind.

## § 5. Beispiele; einige Anwendungen der Flugbahngleichungen des leeren Raums.

1. Die folgende kleine Tabelle läßt zahlenmäßig erkennen, daß bei relativ kleinen Anfangsgeschwindigkeiten und relativ großen Geschossgewichten die Formeln des leeren Raumes in der Tat oft mit leidlicher Genauigkeit auf den wirklichen Geschosflug angewendet werden können. Als Beispiel ist der französische 22 cm-Mörser Modell 1887 gewählt; kleinste Ladung 1,135 kg,  $v_0 = 90$  m/sec, größte Ladung 6,126 kg,  $v_0 = 230$  m/sec; Geschossgewicht 118 kg. In der Tabelle sind die mit den Formeln des leeren Raums errechneten Schußweiten  $X$ , Flugzeiten  $T$ , Scheitelhöhen  $y_s$ , spitzen Auffallwinkel  $\omega$  und Endgeschwindigkeiten  $v_e$  gegeben; in Klammern sind entsprechende Angaben der Schußtafel hinzugefügt.

$v_0$	$\varphi$	$X$	$T$	$y_s$	$\omega$	$v_e$
230	$66^0 22'$	3961 (3200)	43,0 (40,7)	2263 (2017)	$66^0 22' (70^0 2')$	230 (206)
230	$35^0$	5087 (4300)	26,9 (25,9)	887 (820)	$35^0 0' (39^0 23')$	230 (192)
90	$65^0 15'$	628 (600)	16,7 (16,6)	340 (336)	$65^0 15' (66^0 31')$	90 (88)
90	$34^0 2'$	766 (750)	10,3 (10,2)	129 (127)	$34^0 2' (35^0 1')$	90 (88)

2. Da die Krümmung der tatsächlichen Flugbahn z. B. im Abgangspunkt ( $x=0$ ,  $y=0$ ) dieselbe ist wie diejenige der Flugbahnparabel von gleicher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und gleichem Abgangswinkel, nämlich nach § 20,8 Krümmungsradius  $\rho_0 = \frac{v_0^2}{g \cdot \cos \varphi}$ , so läßt sich in der nächsten Nähe der Mündung die tatsächliche Flugbahn oft mit Vorteil durch die Parabel mit gleichen Werten von  $v_0$  und  $\varphi$  ersetzen (vgl. auch § 20 und Band II) oder in der Nähe des Auffallpunkts durch die Parabel mit gleicher Endgeschwindigkeit  $v_e$  und gleichem Auffallwinkel  $\omega$ .

a) Eine in 100 m Entfernung von der Mündung eines Mörsers aufgestellte Panzerplatte soll beschossen werden.  $v_{00}$  sei = 200 m/sec. Nach welchem Punkt der Platte muß durch das Rohr gezielt werden, damit der beabsichtigte Treffpunkt der Platte erhalten wird? Dabei sei der Abgangsfehlerwinkel zu Null

angenommen. Auf der Platte muß der Zielpunkt um  $\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{100}{200}\right)^2 = 1,23 \text{ m}$  oberhalb des beabsichtigten Treffpunkts liegen.

b) Ermittlung des Abgangsfehlers, nach demselben Prinzip, durch Vergleichung des wirklichen und des errechneten Treffpunkts auf einer in bestimmter Entfernung von der Mündung aufgestellten Scheibe u. dgl.

c) Ermittlung des bestrichenen Raums. Indem man die tatsächliche Flugbahn näherungsweise durch eine Flugbahnparabel ersetzt, die mit ihr die Schußweite  $X$  und den Auffallwinkel  $\omega$  gemeinschaftlich hat, erhält man als bestrichenen Raum für  $h$  Meter Zielhöhe:

$$\frac{X}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4h}{X \cdot \tan \omega}} \right).$$

3. Ist es möglich, von der Spitze der Cheopspyramide aus mit einem Stein über die Basis der Pyramide hinaus zu werfen?

Die Höhe der Pyramide ist 137,2 m; die Länge einer Seite der quadratischen Basis 227,5 m; somit der Neigungswinkel  $ABC = 50^\circ 20'$ . Um die größte Wurfweite zu erhalten, muß von der Spitze  $A$  aus in einer Richtung  $AT$  geworfen werden, welche den Winkel  $BAD$  der schiefen Ebene und der Lotrechten halbiert, somit

$$\begin{aligned} \angle DAT &= \frac{1}{2} \angle DAB \\ &= \frac{90^\circ + 50^\circ 20'}{2} = 70^\circ 10'; \end{aligned}$$

der Abgangswinkel  $\varphi$  also  
 $= 19^\circ 50'$ .

Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  beim Werfen aus freier Hand ist zu 24 m/sec angenommen (Mittel aus 30 Versuchen mit ebenso vielen verschiedenen Personen); die Bahngleichung ist

$$y = x \cdot \tan \varphi - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}.$$

Die Frage ist, wie groß  $y$  geworden ist, wenn  $x$  den Wert 227,5 angenommen hat. Es wird

$$y = 113,7 \cdot \tan(19^\circ 50') - \frac{113,7^2 \cdot 9,81}{2 \cdot 24^2 \cdot \cos^2(19^\circ 50')} = -83,4 \text{ m.}$$

(Mit  $v_0 = 22 \text{ m/sec}$  wird  $y = -107,0 \text{ m}$ ; mit  $v_0 = 20 \text{ m/sec}$  wird  $y = -138,1 \text{ m}$ ). Die Antwort ist also: bei einiger Gewandtheit ist es möglich.

4. Unter welchem Abgangswinkel  $\varphi$  gegen die Wagrechte muß ein Körper geworfen werden, damit er auf einer unter  $E$  Grad geneigten schiefen Ebene (die senkrecht auf der Flugbahnenebene steht) senkrecht auffällt?

Resultat:  $\tan(\varphi - E) = \frac{1}{2} \cot E$ , daraus  $\varphi$ .

5. Dasselbe Ziel wird von zwei Geschossen mit den Anfangsgeschwindigkeiten  $v$  und  $v'$  und den Abgangswinkeln  $\varphi$  und  $\varphi'$  getroffen. Welches ist der Unterschied ihrer Flugzeiten bis zu dem Ziel?

$$\text{Resultat: } \frac{2}{g} \cdot \frac{v \cdot v' \sin(\varphi - \varphi')}{v \cos \varphi + v' \cos \varphi'}.$$

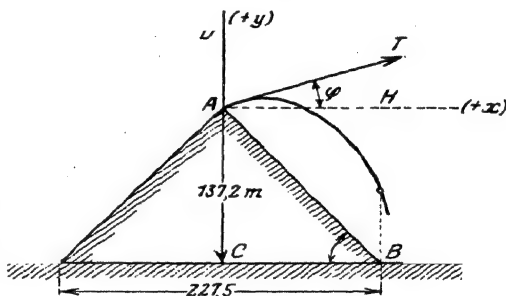


Abb. 16.



6. Ein Schuß trifft den Fuß eines Turmes in der wagrechten Ebene durch das Geschütz nach  $t$  Sekunden. Ein zweiter Schuß mit anderer Ladung und doppeltem Erhöhungswinkel (Abgangsfehler sei Null) trifft die Spitze des Turmes nach  $t'$  Sekunden. Wie weit ist der Turm entfernt? (Die Größe jener Erhöhungswinkel und die Anfangsgeschwindigkeiten sind unbekannt.)

Resultat:  $\frac{1}{2} g t^2 \sqrt{\frac{t'^2 + t^2}{t'^2 - t^2}}$

7. Früher angewendeter Ricochet-Schuß unter bestimmten Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Bodens und des geworfenen Körpers.

Auf horizontaler Fläche wird von  $O$  aus eine Kugel mit der Geschwindigkeit  $v_0$  und unter dem Abgangswinkel  $\alpha_0$  geworfen. Ihre Elastizität sei  $e$  (ein echter Bruch,  $e=0$  bei vollkommen unelastischen,  $e=1$  bei vollkommen elastischen Körpern); die Kugel schlägt bei  $A$  unter demselben Winkel  $\alpha_1 = \alpha_0$  und mit derselben Geschwindigkeit  $v_1 = v_0$  auf dem Boden auf; beginnt von neuem eine Parabel zu beschreiben (aber mit kleinerem Abgangswinkel  $\alpha_2$  und kleinerer Anfangsgeschwindigkeit  $v_2$ ), schlägt bei  $B$  zum zweitenmal auf dem Boden auf usw. (s. Abb. 17). Wie groß ist die gesamte Wurfweite bis zum  $n$ -ten Aufprall und welches ist die zugehörige Flugzeit?

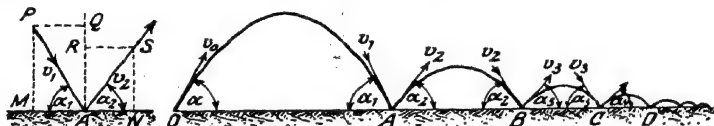


Abb. 17.

Aus dem Newtonschen Gesetz für den senkrechten Stoß zweier elastischer Massen  $m$  und  $M$  läßt sich, indem man die eine Masse  $M$  (Erde) als unendlich groß gegenüber der anderen voraussetzt, leicht die Geschwindigkeit  $v_2$  ableiten, mit der eine Kugel, die mit der Geschwindigkeit  $v_1$  senkrecht auf dem Boden auffällt, wieder zurückspringt. Sie findet sich gleich  $e \cdot v_1$ , wo  $e$  die Elastizität der Kugel darstellt, und ist der Richtung nach entgegengesetzt mit  $v_1$ . Wird also (s. Nebenfigur) eine solche Kugel schief, unter dem Neigungswinkel  $\alpha_1$  gegen die wagrechte Bodenfläche geworfen, so hat man nur nötig, die Stoßbewegung in zwei zueinander senkrechte Bewegungen zu zerlegen: in wagrechter Richtung finde kein Stoß statt und es möge vorausgesetzt werden, daß für die betreffende Bodenbeschaffenheit von der Reibung abgesehen werden könne, dann bleibt die horizontale Komponente der Geschwindigkeit unverändert,  $MA = AN$  oder  $v_1 \cdot \cos \alpha_1 = v_2 \cdot \cos \alpha_2$ ; dagegen in lotrechter Richtung hat man senkrechten Stoß, so daß  $AR = e \cdot AQ$  oder  $v_2 \cdot \sin \alpha_2 = e \cdot v_1 \cdot \sin \alpha_1$  ist. Auf diese Weise kennt man die Richtung  $\alpha_2$  und die Größe  $v_2$  der Geschwindigkeit, mit der die auflappende Kugel die Fläche wieder verläßt; denn es folgt aus den beiden Gleichungen  $\tan \alpha_1 : \tan \alpha_2 = 1 : e$ ; damit kennt man  $\alpha_2$  und hieraus  $v_2$ .

Diese Einzelbetrachtungen sind ebenso oft zu verwenden als die Kugel (in  $A, B, C$  usw.) auf dem Boden aufprallt. Nennt man  $\alpha_n$  den spitzen Winkel, unter dem die Kugel unmittelbar vor dem  $n$ -ten Aufprall gegen die ebene Bodenfläche fliegt,  $v_n$  die zugehörige Geschwindigkeit; es sei ferner  $W_n$  die Wurfweite bis zum  $n$ -ten Aufprall, von  $O$  aus gemessen;  $t_n$  die bis dahin verfllossene Zeit. In wagrechter Richtung erhält man für die verschiedenen Stöße

$$v_0 \cos \alpha_0 = v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2 = \dots = v_n \cos \alpha_n.$$

Dagegen ist in lotrechter Richtung

$$v_2 \sin \alpha_2 = e \cdot v_1 \sin \alpha_1 = e \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0 \quad (\text{weil } \alpha_1 = \alpha_0 \text{ und } \dot{t}_1 = v_0);$$

ebenso

$$v_3 \sin \alpha_3 = e v_2 \cdot \sin \alpha_2, \text{ also } = e^2 \cdot v_1 \cdot \sin \alpha_1 = e^2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0;$$

allgemein wird so

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 \cdot \cos \alpha_0 = v_n \cdot \cos \alpha_n \\ v_0 \cdot \sin \alpha_0 = \frac{1}{e^n - 1} \cdot v_n \cdot \sin \alpha_n. \end{array} \right.$$

Durch Division einerseits, Quadrieren und Addieren andererseits wird

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha_n = e^{n-1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \\ v_n^2 = v_0^2 \cdot \{ e^{2n-2} \cdot \sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \}. \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

Damit läßt sich Richtung und Größe der Geschwindigkeit der Kugel allgemein vor dem  $n$ -ten Aufprall aus dem Anfangszustand  $\alpha_0$ ,  $v_0$  und der Elastizität  $e$  berechnen.

Welche Zeit ist bis zum  $n$ -ten Aufprall verflossen?

Der erste Bogen  $OA$  wird in der Zeit beschrieben:  $t_1 = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0}{g}$ ; der zweite Bogen in der Zeit:  $t_2 - t_1 = \frac{2 \cdot v_2}{g} \cdot \sin \alpha_2 = \frac{2 \cdot e \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0}{g}$  usf. Die Zeit bis zum  $n$ -ten Aufprall ist sonach

$$t_n = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0}{g} \cdot (1 + e + e^2 + e^3 + \dots + e^{n-1}) = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0}{g} \cdot \frac{1 - e^n}{1 - e}. \quad (\text{II})$$

Die Längen der Wurfstrecken  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  usw. sind der Reihe nach:

$$OA = v_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot t_1 = v_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot t_1, \quad \text{wobei} \quad t_1 = \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot \sin \alpha_0,$$

$$AB = v_2 \cdot \cos \alpha_2 (t_2 - t_1), \quad \text{wobei} \quad t_2 - t_1 = \frac{2 \cdot e \cdot v_0}{g} \sin \alpha_0$$

$$\text{und} \quad v_2 \cos \alpha_2 = v_0 \cos \alpha_0 \quad \text{ist,}$$

$$\text{also } AB = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot e \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0}{g} \quad \text{usf.}$$

Die ganze Wurfstrecke  $W_n$  von  $O$  bis zum  $n$ -ten Auffallpunkt ist also

$$= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0}{g} \cdot (1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1}) = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \alpha_0}{g} \cdot \frac{1 - e^n}{1 - e}. \quad (\text{III})$$

Dieser Ausdruck (III) gestattet, entweder  $W_n$  zu berechnen, wenn  $\alpha_0$ ,  $v_0$  und  $e$  bekannt sind, oder auch die Elastizität  $e$  aus  $v_0$ ,  $\alpha_0$  und  $W_n$ .

Theoretisch wird die Kugel unendlich oft auf dem Boden aufschlagen und immer kleinere parabolische Bögen beschreiben. Wiewohl die Zahl dieser von der Kugel beschriebenen Bögen eine unendliche ist, ist dennoch die Gesamtwurfweite von  $O$  aus bis zu dem Punkt, in welchem die Kugel schließlich zur Ruhe kommt, und ebenso die Gesamtzeit, während der die Kugel sich bewegt, eine endliche; eben deshalb, weil die einzelnen Bögen immer kleiner, die Flugzeiten zur Zurücklegung dieser Bögen immer kürzer werden.

Nämlich, für  $n = \infty$  wird (da  $e$  ein echter Bruch, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = 0$  ist), nach (I)  $\alpha_n = 0$ , d. h. die Bögen werden immer flacher, die einzelnen Wurfweiten immer kürzer. Und aus (II) und (III) erhält man

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0}{g} \cdot \frac{1}{1 - e}; \quad W = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \alpha_0}{g} \cdot \frac{1}{1 - e}.$$

Der schließliche Unterschied gegenüber dem Wurf in einem einzigen Bogen, bei derselben Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und demselben Abgangswinkel, besteht also darin, daß sich durch das Ricochettieren die Wurfweite und die Flugzeit vergrößern im Verhältnis  $1:1-e$ ; wobei  $e$  die Elastizität der Kugel ist.

[Der Ricochetschuß war schon im 16. Jahrhundert bekannt; systematisch wurde diese Schußart erst von Vauban, 1688 eingeführt; durch die Anzahl der Aufschläge wollte man ausgleichen, was an Präzision abging. Der Name „Ricochet“ nach Jähns von *ri-côchet* = Hahnenritt; als Verdeutschung schlägt Humbert, der Übersetzer Vaubans „Jungfernschuß“ vor; er erinnert an das Werfen mit flachen Steinen über das Wasser hin, wobei der Stein oftmals wieder über das Wasser emporspringt. Bis zirka Mitte des 18. Jahrhunderts stand die Schußart in Ehren; 1756 schrieb Leutnant Paul Jacobi ein ausführliches Werk über das Ricochettieren und die Regeln, bei deren Befolgung die beste Wirkung erzielt wird. Die mathematische Theorie wurde von Bordoni 1816 entwickelt.] Über das Ricochettieren auf Wasser mit teilweiseem Eindringen vgl. man § 78.

Bei Wasser ist  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Dagegen auf Erdboden zeigt sich häufig, je nach der Bodenart und der Art, wie das Geschoß auftrifft,  $\alpha_2 > \alpha_1$ ; dies z. B. bei Versuchen, die F. Krupp nach dem Verfahren von F. Neesen auf sandigem Boden ausführte. In solchen Fällen müßten also andere Annahmen gemacht werden. Die in dem Beispiel 7 gemachten Annahmen gelten nur für den Fall, daß die tangentielle Stoßreibung vernachlässigt werden kann (vgl. auch z. B. Keck: Vorträge über Mechanik, Bd. II, S. 160 Hannover 1901).

8. In welchem Flugbahnpunkt ist die Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$  der Bahntangente dem absoluten Wert nach ein Maximum?

$$\text{Es ist } \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g \cdot t}{v_0 \cdot \cos \varphi};$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{g \cdot \cos^2 \vartheta}{v_0 \cdot \cos \varphi}, \text{ (mit dem Maximum im Gipfel, für } \vartheta = 0);$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{2g^2}{v_0^2 \cdot \cos^3 \varphi} \cdot \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta.$$

Dies ist bei gegebenen Werten  $v_0$  und  $\varphi$  ein Maximum für  $\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{1}{3}$ , also  $\vartheta = \pm 30^\circ$ .

Im luftgefüllten Raum wird sich später ergeben, daß wenn  $c \cdot f(v)$  die Verzögerung durch den Luftwiderstand bedeutet, die Beziehung besteht:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{g \cdot \cos \vartheta}{v^3} [2g \sin \vartheta + c \cdot f(v)].$$

Hier ist das Produkt  $A \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$  aus dem Trägheitsmoment  $A$  des Langgeschosses um die Querachse durch den Schwerpunkt und aus der Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$  der Bahntangente bei rotationslosen Geschossen maßgebend für das Drehmoment, das der Luftwiderstand in jedem Punkte der Flugbahn auf den Gefederteil des Geschosses ausüben muß, damit sich die Geschoßachse immer wieder in die Bahntangente einstellt, also damit ein richtiger Pfeilflug zustande kommt.

## § 6. Wurfbewegung im leeren Raum mit Rücksicht auf die Abnahme der Fallbeschleunigung mit der Höhe, die Konvergenz der Vertikalen und die Erdkrümmung.

Zur Entscheidung darüber, ob diese Einflüsse groß genug sein können, um bei Berechnung von Flugbahnen unter Umständen in Betracht gezogen werden zu müssen, hat man die Bewegung des Geschosses in Beziehung auf die ruhend gedachte Erde in ähnlicher Weise zu verfolgen, wie die eines Mondes oder eines Planeten um den betreffenden Zentralkörper.

Der Erdmittelpunkt  $M$  (vgl. Abbildung 18) sei Pol eines Polarkoordinatensystems. Ein beliebiger Flugbahnpunkt  $P$  habe die Polarkoordinaten  $MP = \text{radius vector } r$  und  $\angle OMP = \text{Polarwinkel } \alpha$ ; die Richtung  $MO$  der Polarachse, von der aus die Polarwinkel  $\alpha$  gezählt werden, möge vorerst noch unbestimmt gelassen sein. Im Abgangspunkt  $A$  des Geschosses sei  $r = r_0 = \text{Erdradius } 6370300 \text{ m}$ ; die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , der Abgangswinkel  $\varphi$ .

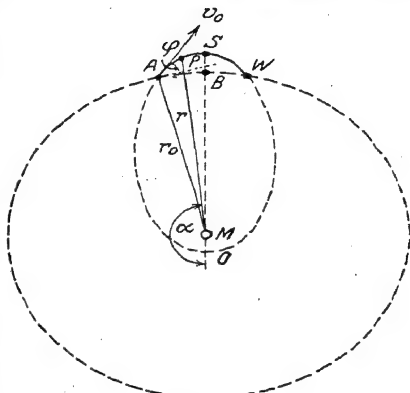


Abb. 18.

Im Punkt  $P$  ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz die Fallbeschleunigung  $= g \cdot \frac{r_0^2}{r^2}$  oder kurz bezeichnet  $= \frac{\mu}{r^2}$ . Ferner ist.

nach dem Flächensatz  $r^2 \cdot \frac{d\alpha}{dt}$  entlang der ganzen Flugbahn eine Konstante  $C$ , die sich aus dem Wert von  $r \cdot \frac{d\alpha}{dt}$  in dem speziellen Punkt  $A$  zu:  $C = r_0 v_0 \cos \varphi$  ergibt, da hier  $r d\alpha = ds \cdot \cos \varphi$  (vgl. Abb. 19,  $ds$  Bogenelement) und  $\frac{ds}{dt} = v_0$  ist; somit

$$r^2 \cdot \frac{d\alpha}{dt} = C = r_0 v_0 \cos \varphi. \quad (1)$$

Für die Bewegung des Geschosses entlang seiner Bahn hat man ferner

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds} \quad \text{oder} \quad v \cdot \frac{dv}{dr} = -\frac{\mu}{r^2};$$

integriert von  $A$  bis  $P$ ,

$$v^2 - v_0^2 = -2\mu \int_{r_0}^r r^{-2} \cdot dr = +2\mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

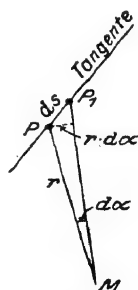


Abb. 19.

oder

$$v^2 = q + \frac{2\mu}{r}, \quad (2)$$

wo  $q = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$  gesetzt ist.

Da  $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$  und  $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$  oder wegen (1)  $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\alpha} \cdot \frac{C}{r^2}$  ist, so läßt sich die Gleichung (2) auch in der Form schreiben:  $q + \frac{2\mu}{r} = \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 \cdot \frac{C^2}{r^4} + \frac{C^2}{r^2}$ , oder nach  $d\alpha$  aufgelöst:

$$d\alpha = \frac{\frac{C}{r^3} \cdot dr}{\sqrt{q + \frac{2\mu}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} \cdot \frac{d\left(\frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{q + \frac{\mu^2}{C^2}}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{q + \frac{\mu^2}{C^2}}}\right)^2}}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Geschosßbahn, mit  $r$  und  $\alpha$  als den beiden Veränderlichen. Die Integration gibt

$$\alpha - \gamma = \arccos \frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{q + \frac{\mu^2}{C^2}}}$$

oder

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\alpha - \gamma)}, \quad (3)$$

wo  $\gamma$  die Integrationskonstante darstellt und wo zur Abkürzung  $p = \frac{C^2}{\mu}$  und  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{q \cdot C^2}{\mu^2}}$  gesetzt ist. Diese Gleichung (3) zeigt, daß die Flugbahn ein Kegelschnitt ist. Um die Integrationskonstante  $\gamma$  festzulegen, erinnere man sich, daß  $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \alpha}$  die Polargleichung eines Kegelschnitts ist, wobei der Parameter

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - d^2}{a} = a - \varepsilon \cdot d = a - \varepsilon^2 a = a(1 - \varepsilon^2)$$

ist [ $a$  und  $b$  die beiden Halbachsen,  $a$  diejenige, die einen Brennpunkt enthält,  $d$  die lineare Exzentrizität = Abstand zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt des Kegelschnitts,  $\varepsilon = \frac{d}{a}$  die sog. numerische Exzentrizität]; ein Brennpunkt  $M$  ist hierbei der Pol des Polarkoordinatensystems, und der Polarwinkel  $\alpha$  wird von demjenigen

Scheitel  $O$  der großen Achse aus gezählt, der dem erwähnten Brennpunkt  $M$  am nächsten liegt; mit  $\varepsilon < 1$  liegt eine Ellipse, speziell mit  $\varepsilon = 0$  ein Kreis, mit  $\varepsilon = 1$  eine Parabel, mit  $\varepsilon > 1$  eine Hyperbel vor.

Wenn also im vorliegenden Fall die Integrationskonstante  $\gamma = 0$  gesetzt wird, so heißt dies geometrisch, daß man als Polarachse  $OM$  des Polarkoordinatensystems die Verbindungslinie des Perihels  $O$  des Kegelschnitts, d. h. des dem Erdmittelpunkte nächsten Scheitels der großen Achse mit dem Erdmittelpunkt  $M$  wählt.

Man erhält alsdann:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \alpha}, \quad (4)$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\mu}{r} \quad (5)$$

wobei  $p = \frac{C^2}{\mu}$  und  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{q C^2}{\mu^2}}$  ist, mit den Abkürzungen:

$$q = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, \quad \mu = g r_0^2; \quad C = r_0 v_0 \cos \varphi,$$

$$r_0 = 6370300.$$

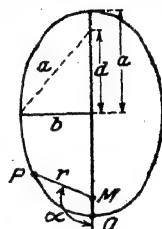


Abb. 20.

Da  $r_0$ ,  $\varphi$ ,  $v_0$  und somit  $C$ ,  $\mu$ ,  $q$ ,  $\varepsilon$ ,  $p$  bekannt sind, so ist man imstande, aus (4) für irgendeinen Wert von  $\alpha$  die zugehörige Entfernung  $r$  des Geschosses vom Erdmittelpunkt und aus (5) die zu dem betreffenden Punkt  $(r, \alpha)$  gehörige Bahngeschwindigkeit  $v$  zu ermitteln; die Flugzeit ergibt sich sodann aus  $dt = \frac{r^2 \cdot d\alpha}{C}$  durch Integration.

Die Flugbahn ist eine Ellipse, wenn  $\varepsilon < 1$ , d. h. wenn  $1 + \frac{C^2}{\mu^2} \left( v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \right) < 1$  oder wenn  $v_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$  ist; nun ist

$$\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6370300} = 11050 \text{ m/sec},$$

somit liegt eine Ellipse stets vor, solange  $v_0 < 11050 \text{ m/sec}$  bleibt. Diese elliptische Flugbahn ist speziell ein Kreis, wenn  $\varepsilon = 0$ , oder wenn  $1 + \frac{r_0^3 v_0^2 \cos^2 \varphi}{\mu^2} \left( v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \right) = 0$  ist. Mit der Abkürzung  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = z$  heißt diese Bedingung:  $z^2 - 2z = -\frac{1}{\cos^2 \varphi}$ ;  $z = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi}}$ . Dieser Ausdruck ist für reelles  $\varphi$  nur dann reell, wenn  $\cos \varphi = \pm 1$ ,  $\varphi = 0$  oder  $\pi$ , in diesem Fall wird  $\frac{r_0 v_0^2}{\mu} = 1$ ,  $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = 7900 \text{ m/sec}$ .

Also ist unter den erwähnten Voraussetzungen die Flugbahn bei den mit menschlichen Mitteln vorerst erreich-

baren Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  stets eine Ellipse; sie ist eine Parabel, wenn  $v_0 = 11050$  m/sec ist; bei noch größeren Anfangsgeschwindigkeiten wäre sie eine Hyperbel. Speziell ein Kreis könnte die Flugbahn nur sein, wenn das Geschöß horizontal, mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 7900 m/sec, abgeschossen würde.

Soll die zu dem Punkt  $A$  der Flugbahnellipse gehörige Schußweite  $AW$  und die Gipfelordinate  $BS$  berechnet werden, so wird man folgendermaßen verfahren: Man berechnet zunächst den Polarkwinkel  $\alpha_0 = \angle OMA$ , der zu Punkt  $A$  gehört, aus der Beziehung

$$r_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \alpha_0}, \text{ die angibt, daß } A \text{ auf der Flugbahn liegen soll.}$$

Das Supplement zu diesem Winkel doppelt genommen ist der Winkel  $AMW$ ; aus diesem und aus  $r_0$  ergibt sich die Schußweite  $AW$ . Ferner ist die Gipfelordinate  $BS$  der Flugbahn  $= MS - r_0$ , wobei  $MS$  das Maximum von  $r$  darstellt; dieses liegt vor, wenn in

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \alpha} \text{ der Nenner den kleinsten Wert annimmt, also für}$$

$\cos \alpha = -1$ , somit ist  $r_{\max} = \frac{p}{r - \varepsilon}$ , (ebenso ist  $r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = MO$ , woraus sich die große Achse der Ellipse als  $r_{\max} + r_{\min}$  ergibt). Also

$$BS = \frac{1}{1 - \varepsilon} - r_0.$$

Zahlenbeispiel:  $v_0 = 820$  m/sec,  $\varphi = 44^\circ$ ,  $r_0 = 6370300$  m.

Es wird  $\varepsilon = 0,99445$ ;  $\alpha_0 = 179^\circ 41' 23,6''$ ;

$$\frac{AW}{2r_0\pi} = \frac{2 \cdot (180 - \alpha_0)}{360^\circ} = \frac{0,31011}{180}.$$

Daraus Schußweite  $AW = 68958$  m; Gipfelhöhe  $BS = 16620$  m bei der elliptischen Bahn. Dagegen bei der parabolischen Bahn

mit gleichem  $v_0$  und  $\varphi$  wird die Schußweite 68500 m, Gipfelhöhe 16538 m.

Von den drei hier betrachteten Einflüssen ist es in erster Linie die Krümmung der Erdoberfläche, die die Schußweitenänderung von  $68958 - 68500 = 458$  m bewirkt. Zieht man nämlich in der Zeichnungsebene die zu  $r_0$  senkrechte

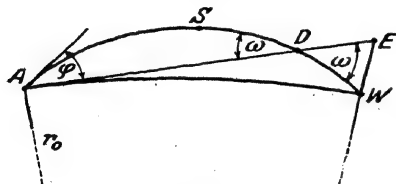


Abb. 21.

horizontale Gerade  $ADE$ , und sei  $ASD$  die parabolische Flugbahn mit der zugehörigen Schußweite  $AD$ , wobei  $\omega = \varphi$  den spitzen Auffallwinkel bedeutet, so ist aus der Abbildung ohne weiteres zu erkennen, daß  $AD$  kleiner ist als die Schußweite  $AW$  mit Rücksicht auf die Erd-

krümmung. Die Differenz beider Schußweiten läßt sich angenähert berechnen auf Grund von Überlegungen ähnlich denen, die bei der Berechnung einer Horizontweite üblich sind: Es ist  $AE^2 = EW \cdot (EW + 2r_0)$  oder nahezu  $AD^2 = DE \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot 2r_0$ ;  $DE$  ist annähernd gleich dem fraglichen Unterschied  $AW - AD = \sim \frac{AD^2}{2r_0 \cdot \operatorname{tg} \omega}$ . Dies gibt im vorliegenden Fall 387 m.

Führt man ähnliche Berechnungen für Schußweiten durch, wie sie in der Praxis vorkommen können, so erkennt man, daß im allgemeinen die drei Einflüsse: Erdkrümmung, Konvergenz der Vertikalen, Abnahme von  $g$  mit der Höhe nicht in Rechnung gezogen werden müssen, und daß höchstens der erstere Einfluß in Frage kommen kann. Dieser läßt sich mit der eben abgeleiteten Näherungsformel meist genügend berücksichtigen. Bei diesem Anlaß sei aber erwähnt, daß O. v. Eberhard die folgende genauere Formel für die Schußweite  $AW$  aufgestellt hat, die sich bei Berücksichtigung der Erdkrümmung, der Konvergenz der Vertikalen und der Abnahme von  $g$  mit der Höhe ergibt: Die hierdurch bewirkte Änderung  $\Delta X$  der Schußweite ist

$$\Delta X = X_p \cdot \frac{1}{\frac{2r_0 \operatorname{tg} \varphi}{X_p} - 1}.$$

Dabei ist wieder  $r_0$  der Erdradius;  $\varphi$  der Abgangswinkel;  $X_p$  die Parabelschußweite im leeren Raum für gleiche Werte von  $v_0$  und  $\varphi$ . Bei Verwendung dieser Formel kommt man mit 5stelligen Logarithmen aus. (Für den luftgefüllten Raum rechnet man, wie O. v. Eberhard findet, genügend genau, wenn man für  $\varphi$  in dieser Formel den spitzen Auffallwinkel  $\omega$  einsetzt.) Aus dieser Eberhardschen Formel ergibt sich die vorher entwickelte Formel als Näherung, wenn man  $-1$  vernachlässigt gegenüber  $\frac{2r_0 \operatorname{tg} \varphi}{X_p}$ .

Interessant ist es, die Flugbahnen sich vorzustellen, die entstehen, wenn von demselben Ort  $A$  aus, immer in derselben Richtung, mit wachsenden Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  geschossen würde.

#### A. Horizontaler Wurf.

Es ist in der Abbildung angenommen, daß von einem erhöhten Standpunkt  $A$  in der Nähe der Erdoberfläche aus in wagrechter Richtung geschossen wird. Mit  $v_0 = 0$  (freier Fall) reduziert sich die Flugbahnellipse auf die doppelt zu rechnende Strecke  $AM$  vom Abgangspunkt  $A$  bis zum Erdmittelpunkt  $M$ ; der eine Brennpunkt ist dauernd in  $M$ , der andere vorerst in  $A$ . Wächst die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , so verbreitert sich die Ellipse, der beweg-



liche Brennpunkt wandert von  $A$  nach  $M$  hin; mit  $v_0 = 7900$  m/sec beschreibt das Geschöß eine Kreisbahn rund um die Erde, in immerwährender Wiederholung; der bewegliche Brennpunkt fällt mit dem festen Brennpunkt in  $M$  zusammen. In diesem Fall fliegt das Geschöß in stets gleichem Abstand von dem wagrecht gedachten Boden;

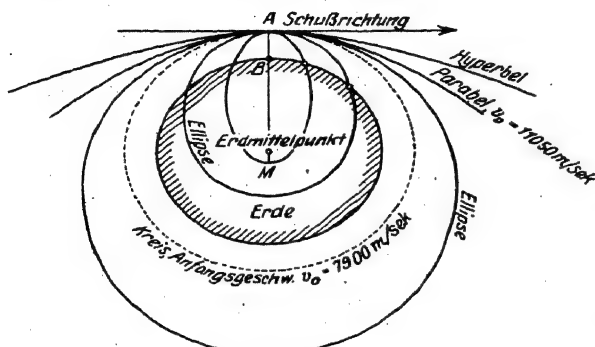


Abb. 22.

seine Rasanz ist eine vollkommene. Wächst die Anfangsgeschwindigkeit noch mehr, so entfernt sich das Geschöß anfangs von der Erdoberfläche (in Ellipsen), kehrt jedoch wiederum zum Abgangspunkt  $A$  zurück; auf der entgegengesetzten Seite der Erde entfernt es sich weiter und weiter von der Erdoberfläche; der bewegliche Brennpunkt

rückt dabei stetig über  $M$  hinaus auf der Verlängerung der Strecke  $AM$  fort. Von der oben bestimmten Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 11050$  m/sec ab, kehrt das Geschöß nicht mehr nach  $A$  zurück; gerade mit  $v_0 = 11050$  m/sec ist die Ellipse in eine Parabel übergegangen; der bewegliche Brennpunkt ist ins Unendliche gerückt. Sobald diese Anfangsgeschwindigkeit 11050 m/sec überschritten wird, sind die Flugbahnen Hyperbeln, deren Zweige durch  $A$  sich immer mehr der horizontalen Schußrichtung nähern, aber für keine endliche Geschwindigkeit  $v_0$  mit dieser ganz zusammenfallen können; der bewegliche Brennpunkt nähert sich dabei auf der Seite der rückwärts verlängerten Strecke  $AM$  wieder  $A$ .

### B. Schiefer Wurf.

Wird unter einem Abgangswinkel, der von Null verschieden ist, mit wachsender Anfangsgeschwindigkeit geschossen, so sind die Flugbahnen wiederum vorerst Ellipsen. Die Auffallpunkte liegen auf der Erdoberfläche immer weiter von  $A$  entfernt. Der eine Brennpunkt der Ellipsen liegt dauernd im Erdmittelpunkt  $M$ ; der andere bewegt sich auf einer geraden Linie  $AF$ .... Man erhält diese (auf Grund eines bekannten Satzes der Kegelschnittslehre), indem man auf der gleichbleibenden Schußrichtung in  $A$  die Senkrechte  $AN$  zieht und den Winkel  $MAN$  auf der anderen Seite von  $AN$  aufträgt (in der Abbildung 23 ist es nur ein Zufall, daß die Richtung von  $AF$

annähernd mit dem Horizont von  $A$  zusammenfällt; genau ist dies natürlich nur dann der Fall, wenn unter  $45^\circ$  geschossen wird). Eine Kreisbahn ist in diesem Fall nicht möglich. Bei der Anfangsgeschwindigkeit 11050 m/sec geht wieder die Ellipse in eine Parabel über; das Geschöß kehrt nicht mehr zur Erde zurück. Der bewegliche Brennpunkt hat sich in der Richtung  $AF$  ins Unendliche entfernt. Also konstruiert man den Scheitel dieser Parabel, die die Schar der Ellipsen von der Schar der Hyperbeln trennt und als Grenzfall beider angesehen werden kann, wenn man durch den Erdmittelpunkt  $M$  eine Parallele zu  $AF$  zieht, die Strecke  $AC$  zwischen dem Abgangspunkt  $A$  und dem Schnittpunkt  $C$  dieser Parallelen und der Anfangstangente der Flugbahnen in  $B$  halbiert, endlich von  $B$  aus auf  $CM$  das Lot fällt. Der Fußpunkt  $D$  dieses Lots ist der Parabelscheitel.

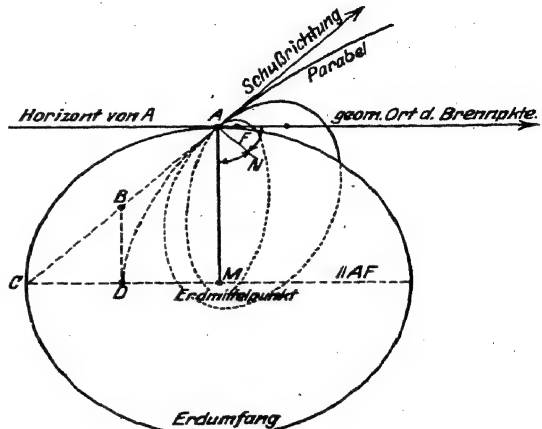


Abb. 23.

## § 7. Zusammenstellung der Formeln für die Wurfbewegung im luftleeren Raum (gleichbleibende Fallbeschleunigung $g$ ).

$v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit;  $\varphi$  = Abgangswinkel oder Winkel zwischen Anfangstangente der Flugbahn und Horizont;  $g$  = Fallbeschleunigung, bezogen auf den Abgangsort  $O$ , dafür Tabelle Nr. 1 im Anhang;  $x, y$  = Koordinaten des Geschosses nach  $t$  Sekunden, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch den Abgangspunkt  $O$ ,  $x$ -Achse wagrecht und positiv in der Schußrichtung,  $y$ -Achse lotrecht, positiv nach oben;  $v$  = Geschwindigkeit des Geschosses in dem beliebigen Punkt  $x, y$ ;  $\vartheta$  = Horizontalneigungswinkel der Flugbahntangente in diesem Punkt;  $\omega$  = spitzer Auffallwinkel;  $X$  = Schußweite im Mündungshorizont;  $T$  = Gesamtflugzeit;  $v_e$  = Endgeschwindigkeit;  $x_g, y_g$  die Koordinaten des Gipfels oder Scheitels;  $v_g$  die Geschwindigkeit im Gipfel;  $t_g$  die Flugzeit bis zum

Erreichen des Gipfels;  $E$  = Geländewinkel;  $\varphi_1 = \varphi - E$  der Winkel zwischen der Anfangstangente der Flugbahn und dem schiefen Gelände;  $h$  = Abkürzung für  $\frac{v_0^2}{2g}$ .

### 1. Beliebiger Flugbahnpunkt.

Flugbahnabszisse:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \varphi \cdot t = \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta) \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{2g} \pm \frac{v_0 \cos \varphi}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi - 2gy} \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{2g} \pm \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} \sqrt{\frac{v^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} - 1}; \end{aligned}$$

Flugbahnordinate:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} \varphi \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} = v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2} t(T - t) \\ &= \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{2g} (\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \vartheta) = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \left(1 - \frac{x}{X}\right); \end{aligned}$$

Tangentenneigung:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \operatorname{tg} \varphi - \frac{gt}{v_0 \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = \pm \frac{1}{v_0 \cos \varphi} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi - 2gy}, \\ \cos \vartheta &= \frac{v_0 \cos \varphi}{v}; \end{aligned}$$

Flugzeit:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos \varphi} = \frac{v_0 \cos \varphi}{g} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta) = \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi - 2gy} \\ &= \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \pm \frac{v_0 \cos \varphi}{g} \sqrt{\frac{v^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} - 1}; \end{aligned}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta} = \sqrt{v_0^2 - 2gy} = + v_0 \cos \varphi \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{gt}{v_0 \cos \varphi}\right)^2} \\ &= v_0 \cos \varphi \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi}\right)^2} \end{aligned}$$

### 2. Scheitel (Gipfel).

Gipfelabszisse:

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\varphi = h \cdot \sin 2\varphi;$$

Gipfelordinate:

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi = h \cdot \sin^2 \varphi = \frac{g \cdot x_s^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} = \frac{x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi}{g} = \frac{g}{2} t_s^2 \\ &= \frac{g}{8} T^2 = 1,23 \cdot T^2; \end{aligned}$$

Flugzeit:

$$t_s = \frac{v_0 \sin \varphi}{g} = \frac{x_s}{v_0 \cos \varphi} = \sqrt{\frac{x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi}{g}} = \frac{T}{2};$$

Geschwindigkeit:

$$v_s = v_0 \cos \varphi;$$

durchschnittliche Flughöhe (s. o. § 1):

$$y_d = \frac{2}{3} y_s = 0,816 \cdot T^2;$$

mittlere Flughöhe (s. o. § 1):

$$y_m = \frac{3}{4} \cdot y_s;$$

größte Steighöhe (bei  $\varphi = 90^\circ$ ):

$$= \frac{v_0^2}{2g} = h.$$

## 3. Auffallpunkt.

Schußweite:

$$\begin{aligned} X &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi = 2h \cdot \sin 2\varphi = v_0 T \sqrt{1 - \frac{g^2 T^2}{4v_0^2}} \\ &= \frac{g T^2}{2} \cotg \varphi = 2x_s; \end{aligned}$$

$$\text{Maximum von } X \text{ (für } \varphi = 45^\circ) = \frac{v_0^2}{g} = 2h;$$

Flugzeit:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2v_0 \sin \varphi}{g} = \frac{X}{v_0 \cos \varphi} = \sqrt{\frac{2}{g} X \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{\frac{8}{g} y_s} \\ &= \frac{1}{g} (\sqrt{v_0^2 + gX} \pm \sqrt{v_0^2 - gX}); \end{aligned}$$

(+ bei Steilschuß, — bei Flachschuß; wenn  $\varphi = 45^\circ$ , also  $gX = v_0^2$  ist, sind die beiden Flugzeiten gleich);

Geschwindigkeit:  $v_e = v_0$ ;spitzer Auffallwinkel:  $\omega = \varphi$ .

4. Abgangswinkel  $\varphi$  zur Erreichung eines gegebenen Zielpunktes  
(ab) bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{a} \left\{ \frac{v_0^2}{2g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{2g} \left( \frac{v_0^2}{2g} - b \right) - \frac{a^2}{4}} \right\} = \frac{2}{a} \left\{ h \pm \sqrt{h(h-b) - \frac{a^2}{4}} \right\}$$

(+ Steilschuß, — Flachschuß).

5. Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  zur Erreichung des Zielpunkts (ab)  
bei gegebenem Abgangswinkel  $\varphi$ :

$$v_0 = \sqrt{\frac{ag}{2 \sin(\varphi - E)} \cdot \frac{\cos E}{\cos \varphi}}, \text{ wobei } \operatorname{tg} E = \frac{b}{a}.$$

6. Schußweite  $W$  auf schiefe Gelände mit Geländewinkel  $E$ :

$$W = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin(\varphi - E) \cos \varphi}{\cos^2 E} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos(\varphi_1 + E)}{\cos^2 E};$$

Flugzeit dabei:  $T_w = \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{\sin(\varphi - E)}{\cos E} = \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\cos E}.$

7. Sicherheitsparabel, die alle Flugbahnen von gegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  einhüllt:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

## Zweiter Abschnitt.

### Über den Luftwiderstand.

I. Der Luftwiderstand gegen ein Langgeschöß unter der Voraussetzung, daß dessen Längsachse in der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes liegt.

#### § 8. Allgemeine Erörterungen.

Man denke sich eine ruhende Kugel  $ABCD$ , gegen die die Luft oder eine Flüssigkeit mit bestimmter Geschwindigkeit heranströmt, und setze zunächst voraus, daß die Luft reibungslos sei. Die Strömungslinien, längs derer die einzelnen Luftteilchen sich bewegen, die

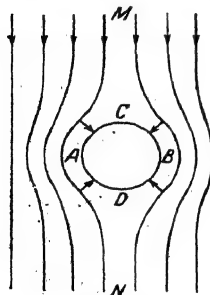


Abb. 24.

sogenannten Luftfäden, werden auf der Vorderseite auseinandergehen und auf der Rückseite sich wieder schließen. (Man erkennt letzteres durch den bekannten Versuch, bei dem man vor den Mund eine zylindrische Flasche von etwa 15 cm Durchmesser und hinter diese eine brennende Kerze hält; die Kerze kann ausgelöscht werden.) Also wird man geneigt sein, zunächst folgendermaßen zu schließen: Auf der Vorderseite  $ACB$  der Kugel wird ein Druck in der Strömungsrichtung  $MN$ , auf der Rückseite ein ebenso großer Druck in entgegengesetzter Richtung auf die Kugel ausgeübt. Der resultierende

Gesamtdruck auf die Kugel ist Null; die Kugel erfährt keinen Antrieb.

Dasselbe würde der Fall sein, wenn die Luft ruht und die Kugel in der Richtung  $NM$  sich bewegt: Auf der Vorderseite  $ACB$  der Kugel wird Arbeit geleistet, und die Luftteilchen ändern ihre Richtung und Geschwindigkeit. Auf der Rückseite  $ADB$  wird Richtung

und Geschwindigkeit wieder dieselbe; die geleistete Arbeit kommt wieder zum Vorschein. In ähnlicher Weise dürfte ein Brückenpfeiler, der im fließenden Wasser steht, oder ein Ruder, das durch das Wasser bewegt wird, keinen Widerstand erfahren.

Dieses Ergebnis, auf das die theoretische Hydromechanik der reibungslosen Flüssigkeiten führt, steht bekanntlich zur Erfahrung in unmittelbarem Widerspruch. Die betreffende Vorstellungsweise ist somit unrichtig. Sie findet sich übrigens in der Ballistik da und dort verwendet, z. B. bei einem patentierten Geschöß mit axialer Bohrung und mit Treibplatte. Die Treibplatte soll an der Mündung abfallen und alsdann soll die Luft auf einen kleineren Gesamtquerschnitt des Geschosses wirken, während vorher der Pulvergasdruck auf den größeren Querschnitt, nämlich auf den, der Treibplatte, gewirkt hatte. Durch die hyperboloidische Höhlung soll die Luft bei dem Fluge des Geschosses hindurchströmen, ohne daß eine Verminderung der Geschößenergie durch dieses Hindurchströmen bewirkt würde.

Tatsächlich verläuft der Vorgang der Luftbewegung um das Geschöß nicht so einfach. Denn erstens besteht Reibung der Luftteilchen unter sich und gegenüber dem festen Körper. Die Reibung bewirkt, daß die Luft auf der Rückseite des Körpers zerreißt und daß Wirbel sich bilden. Diese lassen sich hinter einem durch das Wasser bewegten Stab oder in raucherfüllter Luft, durch die ein Körper bewegt wird, deutlich beobachten. Zweitens tritt Wellenbildung ein. Bekanntlich ist es E. Mach zuerst gelungen, das fliegende Geschöß samt den das Geschöß begleitenden Wellen und Wirbeln photographisch sichtbar zu machen. Er hat damit die Theorie des Luftwiderstandes gegen Geschosse wesentlich gefördert. Über das Zustandekommen dieser Luftwellen sei hier das Folgende erwähnt. (Vgl. auch 3. Band.)

In einer langen zylindrischen Röhre bewege sich ein Stempel mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von z. B. 167 m/sec, und zwar stelle man sich vor, diese Bewegung erfolge ruckweise in kleinen Zeitabschnitten. Dann wird bei jeder Vorwärtsbewegung des Stempels eine Luftverdichtung vor dem Stempel eintreten. Diese Verdichtung schreitet mit der Schallgeschwindigkeit 334 m/sec nach vorn fort. Ebenso geht von der Rückseite des Stempels eine Verdünnungswelle mit gleicher Geschwindigkeit nach hinten weiter. Bewegt sich der Stempel mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, so bildet sich in jedem kleinsten Zeitabschnitt diese Verdichtung und Verdünnung von neuem. Gleiches wird eintreten, wenn ein Geschöß in freier Luft sich bewegt; nur werden die Luftwellen, die nach vorn und nach rückwärts weitergehen, sich jetzt kugelförmig ausbreiten

können. In der Abb. 25 ist das mit einer Geschwindigkeit von 167 m/sec in der Richtung  $BA$  sich bewegendes Geschöß als Stab  $AB$  gezeichnet. Am vorderen Ende  $A$  beginnt eine Verdichtungswelle sich zu bilden. Ihr Radius ist noch Null. Ein gewisses Zeitteilchen vorher war die Spitze des Geschößes in  $C$ . Die Luftverdichtungswelle, die zu dieser Zeit von der Spitze ausging, hat sich mit der doppelten Geschößgeschwindigkeit, also mit 334 m/sec, ausgebreitet. Der Radius  $CC_2 = CC_1 = CC_3$  der Wellenfläche  $C_1C_2C_3$  ist somit doppelt so groß als der Weg  $CA$ , den indessen die Geschößspitze zurückgelegt hat, d. h.  $CC_2 = 2 \cdot CA$ . Zwei Zeitteilchen zuvor war die Geschößspitze in  $D$  ( $DC = CA$ ). Die damals von der Spitze ausgesandte Verdichtungswelle hat sich jetzt zu der Kugel  $D_1D_2D_3$  vom Radius  $DD_2 = 2 \cdot DA$  ausgebreitet usw.

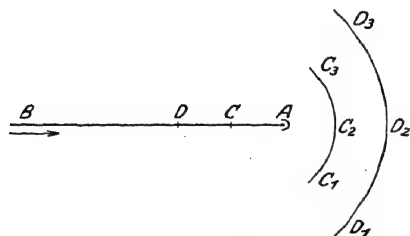


Abb. 25.

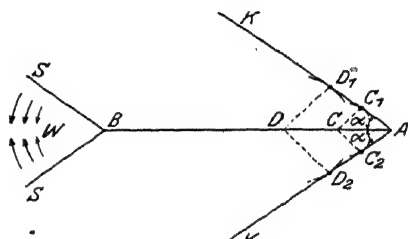


Abb. 26.

Man erkennt, daß die Luftverdichtungswellen dem Geschöße voraneilen müssen. Ebenso werden die Verdünnungswellen, die vom hinteren Geschößende ausgehen, mit der doppelten Geschößgeschwindigkeit nach hinten kugelförmig sich ausbreiten.

Wächst die Geschößgeschwindigkeit  $v$  und wird sie schließlich größer als die normale Schallgeschwindigkeit  $s$ , ist z. B.  $v = 668$  m/sec, so können die vor dem Geschöße erzeugten Luftverdichtungswellen nicht mehr dem Geschöße voraneilen, sie begleiten es als konische Wellen. Wiederum sei das Geschöße als ein unendlich dünner Stab  $AB$  gedacht. Die Spitze des Geschößes befinde sich jetzt in  $A$ . Ein Zeitteilchen vorher war die Spitze in  $C$ . Von  $C$  breitete sich mit der Schallgeschwindigkeit 334 m/sec eine Verdichtungswelle kugelförmig aus, und ihre Wellenfläche ist jetzt eine Kugel mit Radius  $CC_1 = CC_2 =$  der halben Wegstrecke  $CA$  des Geschößes. Zwei Zeitteilchen zuvor befand sich die Geschößspitze noch in  $D$ . Die Kugelwelle, die zu jener Zeit gebildet wurde, hat sich zu der Kugel mit Radius  $DD_1 = DD_2$  ausgebreitet usw. Die Wellenflächen sämtlicher Elementarwellen, die von der Geschößspitze in deren verschiedenen Lagen ausgingen, werden somit vom Kegel  $KK$  umhüllt (der soge-

nannten Kopfwelle), dessen halber Öffnungswinkel  $\alpha$  ist. Ähnliches gilt für die konische Schwanzwelle  $SS$ .

Zufolge dieser von Mach selbst gegebenen Erklärungsweise für die Entstehung der das Geschöß begleitenden Wellen ist  $\sin \alpha = \frac{s}{v}$ . Denn in derselben Zeit, in der die Kopfwelle von  $D$  bis  $D_1$  mit der Schallgeschwindigkeit  $s$  sich ausbreitet, rückt die Geschößspitze mit der Geschößgeschwindigkeit  $v$  von  $D$  nach  $A$  vor. Die einzelnen Stoßwellen, die in den aufeinanderfolgenden Punkten  $A, C, D \dots$  ihren Ursprung haben und die dadurch entstehen, daß die Geschößspitze gegen die ruhende Luft stößt, also alle einzelnen Huyghensschen Elementarwellen, die sich kugelförmig um die Entstehungspunkte  $A, C, D \dots$  ausbreiten, können auf der Schlieren-Photographie des Geschosses nicht sichtbar werden, weil sie sich gegenseitig überdecken. Nur ihre jeweilige Grenze gegenüber der ruhenden Luft, die Einhüllende aller dieser Elementarwellen tritt zutage. Dies ist eben die Kopfwelle, (und Ähnliches gilt für die Schwanzwelle und die sonstigen Wellen, die an Unstetigkeitspunkten der Geschößoberfläche entstehen). Daß in der Tat die Kopfwelle nichts anderes ist, als die Einhüllende der Elementarkugelwellen, erkennt man, wenn man, wie der Verfasser im ballistischen Laboratorium getan hat (vgl. Band II, Anhang, Bild 18), durch eine Röhre hindurchschießt, die mit Löchern versehen ist. Aus diesen Löchern quellen vereinzelte Wellenbündel hervor, die alsdann getrennt für sich sichtbar werden.

Bei dem wirklichen Geschöß ist wegen seines endlichen Querschnitts die Kopfwelle vorn abgeflacht. An dieser Stelle  $MN$  ist  $\alpha = 90^\circ$ , also  $v = s$ ; die Luftverdichtung pflanzt sich hier, durch die Bewegung des Geschosses gezwungen, mit dessen Geschwindigkeit  $v$  fort. (Daß in der Tat die Schallgeschwindigkeit im weiteren Sinne, d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich eine Luftdichtenänderung fortpflanzt, nur unter gewöhnlichen Umständen gleich ca. 334 m/sec ist, modifiziert durch die Temperatur der Luft, daß vielmehr die Schallgeschwindigkeit  $s$  je nach der Stärke und der Art der Erregung der Luftwellen jeden noch so hohen Betrag annehmen kann, wurde von Mach durch eine Reihe von Versuchen bewiesen; darüber s. Band II.)

Dieses Gebiet  $MN$ , in dem die Kopfwellenfläche nahezu eben und senkrecht zur Geschößachse verläuft, ist um so größer, je breiter und zugleich flacher der Geschößkopf ist. Von dieser Stelle  $MN$  ab nach beiden Seiten zu ist die Kopfwelle noch eine kurze Strecke

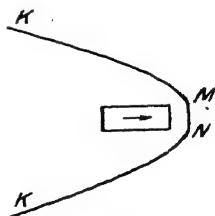


Abb. 27.



hin gekrümmt, entsprechend der allmählichen Abnahme der Schallgeschwindigkeit, aber bald verläuft der Umriss der Kopfwelle und ebenso der Schwanzwelle anscheinend völlig geradlinig. Dies deutet an, daß hier die Schallgeschwindigkeit die normale geworden ist. Wenn also die Geschosßgeschwindigkeit mit Hilfe der Gleichung  $\sin \alpha = \frac{s}{v}$  aus dem Kopfwellenwinkel  $\alpha$  bestimmt werden soll, muß dieser an dem geradlinigen Teil des Wellenumrisses gemessen werden, außerdem aber muß berücksichtigt werden, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $s$  der Stoßwellen, oder die Schallgeschwindigkeit  $s$  im weiteren Sinne des Worts, in den ersten Augenblicken nach ihrer Entstehung noch nicht die normale Schallgeschwindigkeit  $s_n$  der Luft ist,  $s_n = 330,7 + 0,66 \cdot \tau$  ( $\tau$  die Temperatur der Luft in  $^{\circ}\text{C}$ ), wie sie aus der Akustik bekannt ist, sondern daß sie sich erst nach und nach asymptotisch der normalen Schallgeschwindigkeit  $s_n$  nähert.

Im ballistischen Laboratorium wurden vor dem Kriege 20 photographische Aufnahmen des fliegenden *S*-Geschosses ( $v = 883$  m/sec) und ebenso des Infanteriegeschosses M. 38 ( $v = 642$  m/sec) je mit den die Geschosse begleitenden Luftwellen in einer Entfernung von ca. 150 cm nach der Mündung bewirkt und gleichzeitig jedesmal mit einem Chronograph die zugehörige wahre Geschosßgeschwindigkeit gemessen; (Ausführung der Versuche durch Lt. Strödel). Dabei zeigte sich, daß bei Benutzung des (halben) Kopfwellenwinkels  $\alpha$  die Geschwindigkeit  $v$  des Geschosses mit der Formel  $v = s \cdot \text{cosec } \alpha$  viel zu klein, bei Benutzung des Schwanzwellenwinkels  $\alpha$  dagegen viel zu groß erhalten wurde, wenn  $s$  gleich der normalen Schallgeschwindigkeit  $s_n$  genommen wurde.

Nämlich beim *S*-Geschosß ergab sich, im Mittel aus den 20 Aufnahmen,  $v = 829,0$  mittels der Kopfwelle, dagegen  $v = 957,1$  mittels der Schwanzwelle. Das arithmetische Mittel aus den beiden Winkeln  $\alpha$  lieferte einen nur um Weniges zu großen Wert von  $v$ , nämlich  $v = 893,1$ , mit einer wahrscheinlichen Abweichung der einzelnen Messung gegenüber dem Mittelwert von  $w = 9,39$  m/sec  $= 1,05\%$ . Der Zeitmesser ergab als Mittelwert der zugehörigen 20 Messungen  $v = 883,3$ , mit  $w = 2,1\%$ . Dabei wurde, in  $v = s_n \cdot \text{cosec } \alpha$ , die Lufttemperatur berücksichtigt; sie betrug 18 bis 20°.

Bei dem Geschosß M. 38 wurde erhalten: mit der Kopfwelle  $v = 617,8$ ; mit der Schwanzwelle  $v = 692,1$ . Dagegen das arithmetische Mittel der beiden Wellenwinkel  $\alpha$  ergab als Resultat aus den 20 Schüssen  $v = 655,2$ , mit einem wahrscheinlichen Fehler  $w = 0,61\%$ . Die direkte Messung von  $v$  mittels des Zeitmessers lieferte (für die gleiche Entfernung von der Mündung)  $v = 642,0$ , mit  $w = 1,47\%$ .

Diese Tatsache, daß der Kopfwellenwinkel, selbst wenn er an dem geradlinigen Teil der Wellenkontur gemessen wird, einen zu kleinen Wert von  $v$  liefert, erklärt sich nach unserer Ansicht sehr einfach wie folgt: die Spitze des *S*-Geschosses möge sich jetzt im Punkte *D* (vgl. die Abb. 26) befinden. In diesem Augenblick stößt die Spitze gegen die ruhende äußere Luft; die erzeugte Kugelwelle hat noch den Radius Null. Aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $s$  dieser Kugelwelle hat in diesen ersten Momenten die Geschwindigkeit  $s_0 = 888$ , da diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die Fortschritts- geschwindigkeit des Geschosses  $v = 883$  m/sec erzwingen ist. Im weiteren Verlauf nimmt  $s$  rasch ab. Wenn die Geschosßspitze in *A* angelangt ist, hat sich

inzwischen die Kugelwelle so weit ausgedehnt, daß ihr Radius  $r$  gleich  $DD_1$  geworden ist. Und falls man wahrnimmt, daß die Kontur der Kopfwellen  $AK$  von  $D_1$  ab geradlinig verläuft, so ist dies ein Anzeichen dafür, daß  $s(r)$  jetzt nicht weiter abnimmt, sondern praktisch schon gleich der normalen Schallgeschwindigkeit  $s_n$  geworden ist. Daraus folgt, daß entlang des Radius  $DD_1$  die Schallgeschwindigkeit  $s$  variabel ist, nämlich in  $D$  gleich  $s_0 = v = 888$ , in  $D_1$  gleich etwa 331. Danach ist zwar  $DA$  ein Maß für die Geschößgeschwindigkeit, — denn diese kann auf der kurzen Strecke  $DA$ , die die Geschößspitze zurückgelegt hat, als konstant betrachtet werden —; aber  $DD_1$  ist größer als der Weg, den die Schallwelle in der gleichen Zeit zurückgelegt hätte, wenn die Welle sich mit der normalen Schallgeschwindigkeit  $s_n$  ausgebreitet hätte. Aus diesem Grund ergibt sich der Winkel  $\alpha$  zu groß oder  $v = s_n \cdot \operatorname{cosec} \alpha$  zu klein, wenn  $s_n$  gleich 331 genommen würde.

Die allmähliche Abnahme der Schallgeschwindigkeit  $s$  von ihrem Anfangswert  $s = s_0 = v$  ab bis zu  $s = s_n$  zeigt sich auf dem photographischen Bild der Kopfwellen eben daran, daß die Kontur nicht durchweg, von  $K$  bis  $A$ , geradlinig verläuft, also nicht so wie es die Abb. 26 schematisch angibt, sondern daß sie gekrümmt ist, wie die Abb. 27 andeutet. Nun hat die Gleichung  $v = s \cdot \operatorname{cosec} \alpha$  einen Sinn lediglich bei der Annahme konstanter Werte  $v$  und  $s$ . Wenn man also mittels dieser Gleichung den richtigen Wert von  $v$  (aus dem geradlinigen Teil der Kopfwellen) berechnen will, so hat man für  $s$  einen konstanten Durchschnittswert  $s_m$  zu nehmen, der größer ist als die normale Schallgeschwindigkeit. Diesen Wert  $s_m$  kann man folgendermaßen finden. Man nimmt die Kopfwellenphotographie eines anderen Geschosses, das sehr angenähert dieselbe Form und Geschwindigkeit besitzt, wie dasjenige, um welches es sich handelt, und konstruiert in einer größeren Anzahl von Punkten  $D_1, C_1 \dots$  der Kopfwellen je die Tangente und Normale, (hierfür leistet das Spiegellinial von Reusch gute Dienste; und die schärfste Messung wird man erhalten, wenn die Geschößaufnahme nach dem reinen Schattenverfahren erfolgt ist). Die Tangenten liefern die aufeinanderfolgenden Winkel  $\alpha$ , bis zum Endwert  $\alpha = 90^\circ$  im Scheitel der Welle; die Normalen liefern die Lagen der aufeinanderfolgenden Entstehungsorte  $D, C \dots$  der Elementarwellen, und damit die zugehörigen Kugelradien  $DD_1, CC_1 \dots$  oder  $r$ . Zu jedem der so erhaltenen  $\alpha$  kann man, da  $v$  bekannt ist,  $s_m$  aus  $s_m = v \cdot \sin \alpha$  berechnen. Auf diese Weise erhält man eine Kurve mit den Radien  $r$  als Abszissen und mit den konstanten Mittelwerten  $s_m$  als Ordinaten. Diese Kurve wird man alsdann auf das ähnliche Geschöß anwenden und wird so  $v$  richtig erhalten.

Man kann weiterhin auch ein Diagramm zeichnen, welches das empirische Gesetz angibt, nach dem die variable Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $s$  der Welle mit der Entfernung  $r$  oder  $DD_1$  vom Entstehungsort  $D$  abnimmt. Weil man nämlich  $v$  kennt, ist durch mikrometrische Ausmessung der Strecke  $DA$  bekannt die Zeit von dem Augenblick ab, wo die Geschößspitze sich in  $D$  befindet und durch den Stoß der Spitze gegen die ruhende Luft eine Kugelwelle entsteht, bis zu dem Augenblick, wo die Geschößspitze in  $A$  angelangt ist; diese Zeit ist auch gleich derjenigen, die die Welle braucht, um sich von  $D$  bis  $D_1$  auszubreiten. Führt man diese Messungen für eine Reihe von Punkten aus, so hat man  $r$  in Funktion der Zeit  $t$  und durch eine graphische Differentiation die Geschwindigkeit  $\frac{dr}{dt}$  oder  $s$  in Funktion  $t$  und damit auch in Funktion von  $r$ . [Aus dem betreffenden Diagramm  $s(r)$  kann man dann wieder die sukzessiven konstanten Mittelwerte  $s_m(r)$  gewinnen und somit eine Kurve  $s_m(r)$ , die mit der vorher erwähnten übereinstimmen muß.]

Bei der Schwanzwelle erhält man gerade umgekehrt das Resultat, daß die Schallgeschwindigkeit  $s$  anfangs wesentlich kleiner als die normale Schallgeschwindigkeit  $s_n$  ist. Der Grund liegt in folgendem: Unmittelbar hinter dem Geschosßboden befindet sich ein luftleerer Raum, der sich nach rückwärts konisch verjüngt und der weiterhin allmählich mit Wirbeln durchsetzt wird. Die Grenze dieses luftleeren Raumes nach außen hin ist eine Unstetigkeitsfläche. Erst an hinteren Ende dieser Unstetigkeitsfläche, nämlich da, wo die Wirbel beginnen, fängt die Schwanzwelle an, nach außen zu gehen. (Es liegt darin eine schöne Bestätigung eines Satzes, den B. Riemann rein theoretisch abgeleitet hat, daß nämlich entlang einer solchen Unstetigkeitsfläche die Strömungsgeschwindigkeit nur eine zur Fläche tangentielle Komponente hat, daß dagegen senkrecht zur Fläche keine Komponente existiert.) Bei diesem Beginn der Schwanzwelle nun ist die Geschwindigkeit  $s$ , mit der sich die Elementarkugelwellen nach außen hin ausbreiten, aus dem Grunde noch weit kleiner als die normale Schallgeschwindigkeit  $s_n$ , weil hier die äußere Luft zum Teil nach innen, in den luftverdünnten Wirbelkanal, hineinströmt, der sich hinter dem Geschosß weit erstreckt. Deshalb ist der Winkel  $\alpha$  an der Schwanzwelle kleiner, als er bei konstanter Schallgeschwindigkeit  $s = s_n$  wäre; und die Geschosßgeschwindigkeit  $v$  ergibt sich daher aus  $v = s_n \cdot \operatorname{cosec} \alpha$  zu groß.

Selbstverständlich ist, daß die Kopfwelle und ebenso die Schwanzwelle, nach rückwärts genügend weit verlängert gedacht, geschlossene Flächen darstellen müssen. Man erkennt dies, wenn man durch ein Rohr durchschießt, das keine seitlichen Löcher besitzt und die Aufnahme in einem Moment bewirkt, wo das Geschosß gerade aus dem Rohr ausgetreten ist. Die Kopfwelle war durch das Rohr abgeschnitten worden und muß sich nach dem Rohr von neuem bilden; dabei erscheint die Kopfwelle als geschlossene Fläche, deren rückwärtiger Teil kugelförmig ist (vgl. Bd. II, Anhang, Bild 16 und 24).

Der Scheitel  $MN$  der Kopfwelle liegt dem Geschosßkopf um so näher, je größer die Geschosßgeschwindigkeit ist. Bei den neueren Infanteriegeschossen mit scharfer Spitze und mit sehr großer Geschwindigkeit scheint die Kopfwelle sogar etwas hinter der Spitze zu beginnen, also die Geschosßspitze in vollkommen ruhige Luft einzutauchen; nur unmittelbar vor der Spitze besteht eine kräftige Luftverdichtung. Auf der hinteren Seite des Geschosses treten Luftwirbel auf. Diese Wirbel wurden von uns noch mehrere Meter weit hinter dem Geschosse photographisch fixiert, dabei zeigte sich Th. von Kármán's Theorie (s. Lit.-Note) bewahrheitet.

Alle diese Erscheinungen zeigen sich ebenso im Wasser, bei Schiffen, Brückenpfeilern usw.; nur daß hier die Kopfwelle aus einer großen Zahl von Teilwellen gebildet ist, was bei den Luftwellen des Geschosses nicht der Fall zu sein scheint, wie die mikroskopische Untersuchung ergab. Der Grund hierfür liegt wohl darin, daß im Wasser keine Stoßerregung mit einer einzigen Erhöhungswelle möglich ist, wohl aber in der Luft eine einzige Verdichtungswelle. Das Analogon zur Schallgeschwindigkeit ist für das Wasser die von der

Wassertiefe abhängige Geschwindigkeit, mit der die betreffenden Wasserwellen auf dem Wasser sich fortpflanzen. Wird ein Schiff mit immer größerer Geschwindigkeit durch das Wasser bewegt, so kann man wahrnehmen, daß der Scheitel der Kopfwelle vom Bug des Schiffes aus immer weiter nach der Mitte des Schiffes, nach hinten zu rückt.

Die Analogie zwischen Schiff und Wasser einerseits und Geschoß und Luft andererseits geht übrigens weiter: Bezeichnet man den Widerstand eines Schiffes für irgendeine Geschwindigkeit  $v$  mit  $W(v)$  und trägt man die aus der Beobachtung erhaltenen Werte von  $\frac{W(v)}{v^2}$  in Funktion von  $v$  graphisch auf, so erhält man eine Kurve, die nach Schütte, Lang und Lorenz einen ähnlichen Verlauf nimmt, wie die analoge Funktion des Luftwiderstandes (s. w. u. bei § 10): Die Kurve hat einen Buckel in der Gegend der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $s$  der Wasserwellen. Dasselbe gilt für den Widerstand  $W$ , den ein Geschoß bei den verschiedenen Geschwindigkeiten  $v$  in der Luft erfährt: Ein Buckel der betreffenden Kurve liegt wenigstens in der Nähe der normalen Schallgeschwindigkeit  $s$ .

Für Geschosse scheint zuerst N. Mayevski empirisch die Tatsache festgestellt zu haben, daß der Koeffizient  $K = \frac{W}{v^2}$  in der Nähe der Schallgeschwindigkeit  $s$  eine rasche Zunahme erleidet. A. Indra suchte diese Umstände damit zu erklären, daß durch fortwährende Neubildung der Kopfwelle Geschoßenergie konsumiert wird. Jedoch ist damit nicht verständlich, weshalb der Koeffizient  $K$  wieder etwas abnimmt, wenn die Geschoßgeschwindigkeit noch weiter wächst, während doch auch bei größeren und ebenso bei kleineren Geschwindigkeiten durch Erzeugung der Wellen Geschoßenergie aufgewendet wird. H. Lorenz vermutet, daß hier ein Resonanzphänomen vorliegt, wie solche auf anderen Gebieten wohlbekannt sind. Man erinnere sich an die Energieübertragung bei zwei schwingenden Pendeln und bei dem rotierenden Motor, der als Pendel aufgehängt ist; an das Mitschwingen von Stimmgabeln und Saiten oder an die Resonanz elektrischer Wellen; an das Mitschwingen des Schiffskörpers mit den an der Schiffsmaschine periodisch bewegten Massen bei Übereinstimmung der Schwingungsdauern usw. Verhältnismäßig am meisten Energie wird an die Luft übertragen, wenn die Geschoßgeschwindigkeit annähernd mit der natürlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luftwellen übereinstimmt. Eine andere Erklärungsweise s. w. u. (Gesetz von Sommerfeld).

Die vielseitige Ähnlichkeit zwischen Schiffs- und Geschoßbewegung legt zunächst den Gedanken nahe, daß es angezeigt ist, der Form des hinteren Geschoßendes mehr Aufmerksamkeit zu schenken als früher geschehen ist (vgl. jedoch § 9 Schluß und § 14 Schluß). Weiterhin ist ersichtlich, daß die Bewegung des Geschosses in der Luft eine fast ebenso verwickelte

ist, wie diejenige des Schiffes im Wasser, und daß deshalb die einfachen Gesetzmäßigkeiten, die bis vor kurzem für den Luftwiderstand von Geschossen angenommen wurden, nicht in weitem Umfange genau zutreffen werden: Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Längsachse des Geschosses in der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes liegt, daß also das Geschöß wie ein gut konstruierter Pfeil sich bewegt, wurde gewöhnlich der Luftwiderstand  $W$  gegen das Geschöß mit folgenden Größen proportional gesetzt:

- a) dem zur Achse senkrechten Geschößquerschnitt  $R^2 \pi$ ,
- b) dem Luftgewicht  $\delta$ , d. h. dem Gewicht einer Raumeinheit Luft am Versuchstage (oder besser gesagt: der in einer Raumeinheit Luft enthaltenen Luftmasse), berechnet aus Temperatur, Druck und Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Meistens wird hierbei  $\delta$  in Beziehung gesetzt zu einem willkürlich angenommenen normalen Luftgewicht  $\delta_0$ , z. B.  $\delta_0 = 1,206$  oder  $\delta_0 = 1,220$  kg/cbm,
- c) einem von der Form des Geschosses abhängigen Koeffizienten  $i$  ( $1000 \cdot i = n$  heißt gewöhnlich der „Formwert“),
- d) einer gewissen Funktion  $f(v)$  der Translationsgeschwindigkeit  $v$  m/sec des Schwerpunktes, so daß der

$$\text{Luftwiderstand } W = R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot i \cdot f(v).$$

Was die Dimensionen anbetrifft, so ist  $i$  eine dimensionslose Zahl, führt man  $R$  in  $m$  ein, so ergibt sich für  $f(v)$  die Dimension  $\text{kg m}^{-2}$ , wenn  $W$  in  $\text{kg}$  erhalten werden soll.

Die Annahmen a), b), c) sind mehr konventionell, als in der Natur der Sache begründet:

Es ist von vornherein nicht wahrscheinlich, daß der Luftwiderstand, der von dem Kaliber  $2R$ , der Luftdichte  $\delta$ , der Form ( $i$ ) und der Geschößgeschwindigkeit  $v$  abhängt, diese vier Variablen so reinlich als Faktoren eines Produkts geschieden enthält, derart daß der erste Faktor lediglich eine Funktion des Kalibers, der zweite lediglich eine Funktion der Luftdichte, der dritte lediglich eine Funktion der äußeren Form und der vierte lediglich eine Funktion der Geschwindigkeit darstellt.

Mit der Annahme a) wird behauptet, daß der Luftwiderstand auf die Flächeneinheit des Geschößquerschnitts bei gleicher Luftdichte, gleicher Form und Geschwindigkeit des Geschosses gleich groß sei, mag es sich um ein kleines oder ein großes Geschößkaliber handeln.

Schon Didion hat aus seinen Versuchen 1848 das Ergebnis abgeleitet, daß der Luftwiderstand gegen Geschosse mit kleinem Quer-

schnitt verhältnismäßig größer sei, als der gegen Geschosse mit großem Querschnitt, und hat versucht, diese Tatsache dadurch rechnerisch zu berücksichtigen, daß er  $R^2 \pi$  mit dem Faktor  $(0,74 + \frac{0,047}{0,05 + 2R})$ , gültig für  $R$  in  $m$ , multiplizierte. (Übrigens ließ er später 1860 diese Annahme fallen.) Einige Ballistiker glaubten aus ihren Luftwiderstandsversuchen mit Geschossen von sehr verschiedenem Kaliber den Beweis dafür erbracht zu haben, daß Proportionalität zwischen Luftwiderstand  $W$  und Querschnitt  $R^2 \pi$  stattfinde, und man trägt zurzeit kein Bedenken, die Resultate der mit Artilleriegeschossen angestellten Versuche ohne weiteres auf Infanteriegeschosse anzuwenden und umgekehrt. Indes besteht diese einfache Beziehung jedenfalls nicht genau. Die neuere, von H. Lorenz über den Schiffswiderstand aufgestellte Theorie, die von großer Allgemeinheit ist und die, wie Lorenz und Falkenhagen gezeigt haben, die Ausdehnung auf den Luftwiderstand von Geschossen zu gestatten scheint, führt gleichfalls darauf, daß kleine Querschnitte einen verhältnismäßig größeren Widerstand erfahren, als größere Querschnitte. Und nach Versuchen an der Towerbrücke (J. W. Barry) erleidet eine 100 qm große Fläche durch den Winddruck kaum den sechsten Teil des spezifischen Widerstands einer 0,1 qm großen Fläche.

Die Versuche der Firma Fr. Krupp (O. v. Eberhard) von 1912 mit Geschossen verschiedener Form (vgl. Lit.-Note) ergaben unter anderem folgendes. Der durchschnittliche Widerstand, bezogen auf 1 qcm des Querschnitts und auf das Luftgewicht 1,22 kg/cbm, ist:

a) bei rein zylindrischen Geschossen

	für $v = 400$	500	600	700	800 m/sec
und bei 6,5 cm-Kaliber	1,4	2,5 <sub>8</sub>	3,8	5,1 <sub>5</sub>	6,6 kg/qcm
" " 10 "	1,2 <sub>9</sub>	2,2	3,3	4,7	6,3 "

b) bei ogivalen Geschossen von 3 Kal. Abrundungsradius

	für $v = 550$	650	750	850 m/sec
und bei 6 cm-Kaliber	1	1,3	1,5 <sub>8</sub>	1,9 <sub>4</sub> kg/qcm
" " 10 "	0,98	1,2 <sub>5</sub>	1,5 <sub>2</sub>	1,8 <sub>5</sub> "
" " 28 "	0,62	0,8 <sub>1</sub>	1,0 <sub>1</sub>	1,2 <sub>5</sub> "
" " 30 "	—	—	0,9	1,0 <sub>6</sub> "

Der Luftwiderstand geteilt durch  $R^2 \pi$  ist also in der Tat, wie Didion fand, bei größeren Kalibern kleiner als bei kleineren Kalibern und außerdem abhängig von der Geschwindigkeit. Dieser Einfluß des Kalibers kommt jedoch tatsächlich erst bei größeren Kalibern wesentlich in Betracht.

Die gewöhnliche Annahme, der Luftwiderstand gegenüber zwei gleich großen und gegen die Geschoßachse gleich geneigten Flächenelementen des Geschoßkopfes sei, bei gleich großer Geschoßgeschwindigkeit, gleich groß, unabhängig davon, welchen Abstand diese Flächenelemente von der Achse des Geschosses haben, trifft ebenfalls nicht genau zu. Dies wird durch Ermittlungen von Mach wahrscheinlich. Bei den betreffenden Versuchen bestimmte er experimentell die Ablenkung des Lichts beim Durchdringen verschiedener Luftschichten in nächster Nähe des Geschosses. Mit Gewehrgeschossen von 11 mm Kaliber und 520 m/sec Geschwindigkeit (wofür nach den Kruppschen Versuchen der Luftwiderstand rund 1 Atm. Überdruck betragen soll) fand Mach folgendes: Im Scheitel der Kopfwelle entspricht die Dichte der Luft ca. 3 Atm.; 4,5 mm hinter dem Scheitel, 12 mm von der Geschoßachse und 3 mm vom Rand der Kopfwelle entfernt noch ca. 1,7 Atm.; 7,5 cm hinter dem Scheitel, 9 cm von der Geschoßachse und 7,5 cm vom Wellenrand entfernt noch ca. 1,6 Atm. Inwiefern zahlreiche Berechnungen über Formwerte, über die günstigste Spitzenform usw. dadurch an Bedeutung verlieren, soll weiter unten angeführt werden.

Daß der Luftwiderstand von Geschossen gerade mit der ersten Potenz der Luftdichte proportional zu- und abnimmt (Annahme b) ist zwar niemals bestritten, aber auch niemals einwandfrei empirisch bewiesen worden. Es wäre wünschenswert, daß dieses Gesetz durch rationelle, allein hierauf abzielende Versuche mit großen Geschwindigkeiten geprüft würde. Über den Einfluß der Temperatur s. § 44 Schluß und Lit.-Note.

Die Annahmen c) und d) schließen die Behauptung in sich, daß bei gleichem Kaliber und gleicher Luftdichte, aber verschiedener Geschoßform der Charakter der Luftwiderstandsfunktion gewahrt bleibe, so daß bei verschiedenen Geschoßformen nur der Ordinatenmaßstab der Kurve  $f(v)$  sich ändert. Diese Voraussetzung, daß der Einfluß der Geschoßform durch einen einzigen Multiplikationsfaktor  $i$  dargestellt werden könne, hat sich durch die neueren theoretischen und experimentellen Untersuchungen über den Luftwiderstand nicht bewährt. Vielmehr enthält die Funktion  $f(v)$  die Geschoßform implizite.

Übrigens sei schon hier darauf hingewiesen, daß zweifelsohne manche Umstände und Abhängigkeiten, deren mathematische Gesetzmäßigkeiten uns noch unbekannt sind, tatsächlich in den Koeffizienten  $i$  oder in den sogenannten Formwert  $n = 1000 \cdot i$  verlegt werden, so daß  $i$  nur zum Teil einen Formkoeffizienten, zu einem andern, aber unbekannten Teil einen Korrektionsfaktor vorstellt, durch den das Ungenügende in den Annahmen a) und d), vielleicht auch in b) einigermaßen ausgeglichen wird. Jedenfalls ist  $i$  im Prin-

zip nicht konstant, sondern eine Funktion der übrigen Größen, von der man freilich annimmt, daß sie sich bei Abänderung dieser Größen nur langsam ändert.

Weitaus die meisten Bemühungen um die Erforschung des Luftwiderstandsgesetzes beziehen sich auf die Abhängigkeit dieses Widerstandes  $W$  von der Geschwindigkeit  $v$  des Geschosßschwerpunktes bei gleichem Kaliber, gleicher Luftdichte und gleicher Geschosßform. Hiervon sind in dem folgenden § 9 die wichtigsten theoretischen und in § 10 die empirischen Untersuchungen besprochen.

### § 9. Theoretische Ansätze zur Gewinnung des Luftwiderstandsgesetzes.

Die Überlegungen Newtons scheinen auf folgendem Gedanken- gang zu beruhen. Ist die Geschosßgeschwindigkeit  $v$  das 2, 3, 4, 5 ...-fache eines bestimmten Falls, so ist nicht nur die Beschleunigung der Luftteilchen die 2, 3, 4, 5 ...-fache, sondern auch die Masse der in Bewegung gesetzten Luft; die Widerstandskraft ist somit die 4, 9, 16, 25 ...-fache. Die Berechnung sei (absichtlich sehr elementar) im folgenden kurz gegeben:

Man denke sich ein ruhendes zylindrisches Geschosß von der Vorderfläche  $F$  qm, gegen das die Luft mit der Geschwindigkeit  $v$  m/sec in Richtung der Achse heranströme. Die Luftteilchen verlieren bei ihrem Anprall gegen das Geschosß ihre Geschwindigkeit. Dabei kommt in der Sekunde zum Zusammenstoß mit dem Geschosß ein Luftvolumen  $F \cdot v$  cbm. Das Gewicht eines Kubikmeters Luft sei  $\delta$  kg, so ist die Masse  $\frac{F \cdot v \cdot \delta}{9,81}$ . Die Geschwindigkeitsänderung in der Sekunde ist  $v - 0$ , die Verzögerung  $\frac{v - 0}{1}$ . Der Druck, den der Querschnitt  $F$  durch die heranströmende Luft erfährt, ist das Produkt von Masse und Verzögerung der ankommenden Luftmenge, also  $\frac{F \cdot v \cdot \delta}{9,81} \cdot \frac{v - 0}{1} = \frac{F \cdot \delta \cdot v^2}{9,81}$ . Danach ist der Widerstand des in ruhender Luft bewegten Zylinders proportional der senkrechten Fläche  $F$  (in qm), dem Luftgewicht  $\delta$  (in kg/cbm) und dem Quadrat der Geschwindigkeit  $v$  (in m/sec),

$$W \text{ (kg)} = \frac{F \cdot \delta \cdot v^2}{9,81}.$$

(Die in der Technik übliche Formel für den Winddruck  $W$  auf eine senkrechte ebene Fläche  $F$  qm bei Windgeschwindigkeit  $v$  m/sec ist in einiger Übereinstimmung damit  $W = 0,122 \cdot F v^2$  kg.)

An dieser Ableitung ist auszusetzen, daß die Wirkung der an der Stirnfläche des Körpers abfließenden Luft, die Reibung, Wellenbildung, und alle Vorgänge auf der Rückseite des Körpers unberücksichtigt gelassen sind.



Daß bei dem Strömen der Luft gegen einen ruhenden Körper oder umgekehrt bei der Bewegung eines Körpers in ruhender Luft nicht der reine Newtonsche Stoßdruck allein maßgebend sein muß, sondern daß auch Saugwirkungen, negative Drücke eintreten können, läßt sich durch folgende Apparate leicht zeigen.

Eine ebene Kreisplatte  $AB$  (Abb. 28a) von etwa 30 cm Durchmesser liege auf der einen Wagschale einer Wage. Darüber befinde sich in fester Lage eine parallele Platte  $CD$  von etwa 20 cm Durchmesser, die in der Mitte ein kreisrundes Loch besitzt und eine Röhre  $R$  trägt; durch letztere kann Luft in der Richtung des Pfeils geblasen werden. Ist  $CD$  20 oder 10 cm hoch über  $AB$  angebracht, so wird beim Durchblasen der Luft die bewegliche Platte  $AB$  abwärts gehen, man hat den reinen Stoßdruck. Ist dagegen der Abstand der Platten  $AB$  und  $CD$  etwa 1 cm, so entsteht bei dem seitlichen Abströmen der Luft zwischen den Platten ein Unterdruck, die Platte  $AB$  wird gehoben.

Bläst man bei dem Apparat Abb. 28 b in der Richtung des gefiederten Pfeils schief abwärts, so wird die in der Röhre  $R$  auf einem schmalen Querstäbchen aufliegende Hollundermarkkugel  $K$  gehoben und fliegt in der Richtung des gekrümmten Pfeils heraus.

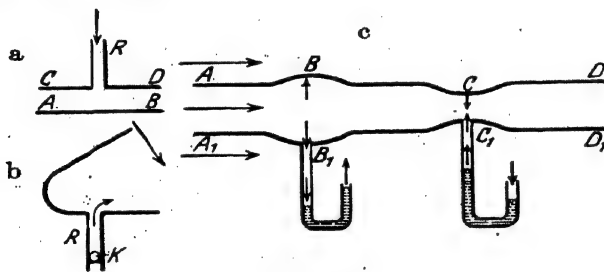


Abb. 28.

In Abb. 28c ist eine Röhre  $ABCD$   $A_1B_1C_1D_1$  angedeutet, die bei  $BB_1$  eine Verdickung und bei  $CC_1$  eine Verdünnung besitzt. Es werde in der Richtung der längeren gefiederten Pfeile ein Luftstrom geblasen. Innerhalb der Röhre erfährt der Luftstrom bei  $BB_1$  eine Querschnittszunahme, also eine Geschwindigkeitsabnahme; die Folge ist ein Überdruck (angedeutet durch die kleineren Pfeile). Bei  $CC_1$  hat man Querschnittsverminderung, also Geschwindigkeitszunahme und infolge davon einen Unterdruck (eine Saugwirkung in dem Manometerrohrchen). Außerhalb der Röhre ist das Umgekehrte der Fall.

Der reine Newtonsche Stoßdruck kann auch nicht genügen, wenn es sich z. B. um die Berechnung der Drücke handelt, die das Dach eines Gebäudes durch horizontalen Sturmwind erfährt. Am unteren Teil des Daches wird zwar durch den Stoßdruck im allgemeinen Druckvermehrung eintreten, aber oberhalb kann bei dem Abströmen der Luft über die Dachkante hinweg ein negativer Druck eintreten, so daß ein Kippmoment möglich ist. In der Tat wird mitunter ein Abheben des Daches im Sturm beobachtet.

In ähnlicher Weise können auch beim fliegenden Geschosß je nach der äußeren Gestalt des Zünders, der Führungsringe, des Geschosßendes usw. Saugwirkungen vorhanden sein.

Unter der Annahme, daß der Widerstand  $W$  eines Geschosßes nur vom Querschnitt  $F$ , von der Luftdichte  $d$  oder der Masse eines obm. Luft und von

der Geschwindigkeit  $v$  abhängt und zwar proportional sei dem Produkt gewisser Potenzen  $F^\alpha, d^\beta, v^\gamma$ , soll nach Ansicht einiger Forscher das Newtonsche Gesetz auch einfach aus den Dimensionen dieser Größen abgeleitet werden können:  $F^\alpha \cdot d^\beta \cdot v^\gamma$  dividiert durch  $W$  muß eine reine Zahl sein, also von der Dimension Null. Im technischen Maßsystem der kg, m, sec sind die Dimensionen von  $F, d, v$  bzw. ( $\text{m}^2$ ), ( $\text{kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m}^{-4}$ ), ( $\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$ ). Dies gibt für m, kg, sec bzw. die Gleichungen

$$2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta + \gamma = 0; \quad \beta - 1 = 0; \quad 2 \cdot \beta - \gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1; \quad \beta = 1; \quad \gamma = 2.$$

Somit ist der Widerstand  $W$  proportional  $F, d$ , und  $v^2$ . Über dieses Verfahren, Gesetze abzuleiten, vgl. Th. Vahlen, E. Gehrcke und A. Lamothe, s. Lit.-Note.

Mehrere Forscher, insbesondere O. Mata 1895, faßten die Übertragung der Geschoßenergie auf die umgebende Luft lediglich als einen thermodynamischen Vorgang, speziell Mata als eine isothermische Zustandsänderung auf. Daß diese Auffassung eine einseitige sein muß, geht aus dem oben über die Wellen- und Wirbelbildung Gesagten hervor.

Als Erster berücksichtigte A. Schmidt-Stuttgart die Erregung von Luftwellen durch den bewegten Körper. Er stellte für Geschwindigkeiten  $v$  kleiner als die Schallgeschwindigkeit  $s$  eine Widerstandsfunktion auf, die unstetig wird, wenn die Geschwindigkeit  $v$  des bewegten Körpers der normalen Schallgeschwindigkeit  $s$  des Mediums gleichgesetzt wird. Die betreffenden Entwicklungen besitzen keine solche Allgemeinheit, daß sie für die Zwecke der Ballistik verwendbar wären. Doch hat A. Schmidt das Verdienst, die bezüglichen Umstände zu einer Zeit klar erkannt zu haben, in der E. Mach noch nicht mit seinen photographischen Aufnahmen des fliegenden Geschosses hervorgetreten war.

P. Vieille und kurz darauf E. Ökinghaus leiteten auf Grund der Theorie von B. Riemann über die Fortpflanzung von Luftwellen mit endlich großer Amplitude Luftwiderstandsgesetze ab, indem sie speziell Geschosse mit einer ebenen, zur Achse senkrechten vorderen Begrenzungsfläche voraussetzten und die das Geschöß begleitende Kopfwelle wenigstens in den vordersten Teilen als ebene Welle annehmen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der endlichen Luftverdichtungen muß dabei gleich der Geschößgeschwindigkeit genommen werden. Vieille glaubt der von ihm so gewonnenen Formel für den Luftwiderstand in Funktion der Geschößgeschwindigkeit  $v$  eine derartige Allgemeinheit der Anwendbarkeit zuschreiben zu können, daß sie selbst für kosmische Geschwindigkeiten gelte.

Die Vieillesche Beziehung zwischen Luftdruck  $p$  und Geschößgeschwindigkeit ist die folgende:

$$r = \sqrt{\frac{g \cdot p_0}{2 \cdot \delta} \left\{ 2k + (k+1) \frac{p - p_0}{p_0} \right\}},$$

dabei  $\delta$  das Gewicht der umgebenden Luft in kg/cbm,  $p_0$  der gewöhnliche

Atmosphärendruck in kg/qm,  $p$  der durch die Bewegung erzeugte Luftdruck in kg/qm,  $k = 1,41$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen,  $g = 9,81$  m/sec<sup>2</sup>. Z. B. für  $p_0 = 10333$  kg/qm,  $\delta = 1,206$  kg/cbm und  $p = 15,64$  Atm. =  $15,64 \cdot 10333$  kg/qm erhält man  $v = 1200$  m/sec. In der folgenden kleinen Tabelle sind so die Widerstände, wie sie von Vieille errechnet und nach seiner Angabe beobachtet sind, endlich von  $v = 1200$  m/sec ab auch die theoretisch von ihm abgeleiteten Temperaturen gegeben:

Geschw. $v$ m/sec	Widerstand in Atm. $\left(\frac{p}{p_0}\right)$ :		Temp. Grad Cels.
	berechnet	beobachtet	
400	1,58	1,25	—
800	6,85	6,23	—
1200	15,64	15,01	680
2000	43,8	—	1741
4000	176,6	—	7751
10000	1098	—	48490

Vieille macht bei diesem Anlaß auf das Aufleuchten der Meteoriten aufmerksam.

Die bezügliche Formel von E. Ökinghaus lautet:

$$W = W_0 k \left(1 - \left(\frac{W_0}{W}\right)^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \left(\frac{v}{340}\right)^2 + W_0. \quad [v \text{ in m/sec}]$$

Hier ist  $W$  der Luftwiderstand für die Geschosßgeschwindigkeit  $v$ ,  $W_0$  speziell der Luftwiderstand für  $v = 340$  m/sec;  $k$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen der Luft,  $k = 1,41$ .

Da die Riemannsche Theorie nur für ebene Wellen gilt, so könnten diese Entwicklungen höchstens für vorn abgestumpfte Geschosse einigermaßen zutreffen. Doch scheint es, daß der weitere Ausbau der Riemannschen Theorie der Luftstöße einige Aussicht auf einen Erfolg für die Zukunft verspricht.

Die Theorie der Peripteral-Bewegungen, die von W. Lan-ohester für die Bewegung der Gleitflieger in der Luft, besonders für Flächen ähnlich dem Vogelflügel, aufgestellt worden ist, konnte für die Ballistik bisher nicht nutzbar gemacht werden. Bei dieser Theorie setzt man eine gleichmäßige Strömung der Luft mit einer Zirkularbewegung der Luft von passendem Sinn und passender Stärke um den betreffenden Körper (Flügel) herum zusammen. Die betreffenden Betrachtungen gelten aber nur für Potentialbewegungen, nicht für turbulente Bewegungen, wie sie am hinteren Ende des Geschosses jedenfalls vorhanden sind. (Vgl. Lit.-Note.)

Ebenso sind von keiner weitergehenden Bedeutung für die Ballistik die umfangreichen Berechnungen, die Oberst P. Haupt auf Grund der kinetischen Gastheorie durchgeführt hat. Der verwickelte Mechanismus des Luftwiderstands ist durch seine Berechnungen nicht

genügend dargestellt und diese haben zu Ergebnissen geführt, die mit den neuesten empirischen Ergebnissen in der Tat in Widerspruch stehen. (Vgl. die Lit.-Note.)

Dagegen sei auf zwei wichtige theoretische Arbeiten über den Luftwiderstand, von H. Lorenz-Danzig und von A. Sommerfeld-München, hingewiesen. H. Lorenz hat 1907 (vgl. die Lit.-Note) gelegentlich einer Theorie des Schiffswiderstandes versucht, die sämtlichen Umstände der verwickelten Luftbewegung um das fliegende Geschos mathematisch darzustellen, wobei er zu der folgenden Beziehung für den Luftwiderstand geführt wurde: Es bedeute  $v$  die Geschosgeschwindigkeit,  $R^2\pi$  den größten Geschosquerschnitt,  $s$  die Schallgeschwindigkeit,  $l$  die Geschoslänge, so ist

$$W = k_1 R^2\pi \cdot v^2 + k_2 \cdot l v + \frac{k_3 R^2\pi v^4 + k_4 l v^3}{\sqrt{(s^2 - v^2)^2 + k_5 l^2 v^2}}.$$

$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  sind Konstanten, wovon  $k_1$  und  $k_2$  nur von der Form, die übrigen von der Form und der Oberflächenbeschaffenheit des Geschosses abhängen.

Dieser theoretisch abgeleitete Ausdruck für  $W$  zeigt erstens, daß danach  $W$  nicht genau proportional dem Querschnitt  $R^2\pi$  ist, sondern daß der spezifische Widerstand  $W:R^2\pi$  unter sonst gleichen Umständen um so größer ist, je kleiner dieser Querschnitt ist. Ferner ist nach diesem Gesetz  $W$  keineswegs proportional einem einzigen Formkoeffizienten  $i$ , vielmehr kommen 5 Koeffizienten der Form in dem Ausdruck vor und zwar implizit derart, daß mit einer wesentlichen Änderung der Form und Oberflächenbeschaffenheit des Geschosses die ganze Luftwiderstandsfunktion  $f(v)$  selbst sich ändert. Endlich zeigt der Faktor  $W:v^2 = K$ , wie oben erwähnt, bei einer graphischen Darstellung von  $v$  einen Buckel in der Nähe der Schallgeschwindigkeit und verläuft im übrigen in ähnlicher Weise, wie es die von Siacci zusammengefaßten Schießbeobachtungen (s. w. u.) ergeben haben.

H. Lorenz hat 1917 (s. Lit.-Note betr. Lorenz, Runge; Wieschberger, Karmán, Rubach, Falkenhagen, Sängewald) sein Gesetz vereinfacht: der Widerstand  $W$  setzt sich zusammen aus einem Anteil  $W_1$ , der durch die Wellenbildung entsteht, und aus einem Anteil  $W_2$ , der in der Reibung und der Wirbelbildung seine Ursache hat;  $W = W_1 + W_2$ ; dabei ist

$$\frac{W_1}{v^2} = k R^2\pi \left(1 + \frac{A \cdot v^4}{(v^2 - s^2)^2 + c^2 v^2}\right); \quad \frac{W_2}{v^2} = \frac{\mu \cdot l}{v}.$$

Hier ist  $s$  die normale Schallgeschwindigkeit;  $l$  die Geschoslänge;  $k, \mu, A$  und  $c$  sind Konstanten, die empirisch zu ermitteln sind, und zwar hängen  $k, \mu$  und  $A$  von der Form und der Oberflächen-

beschaffenheit des Geschosses ab, und  $c$  stellt einen Dämpfungsfaktor dar. Lorenz zeigte auch, wie die Konstanten aus den Versuchsdaten berechnet werden können. Sein früherer Assistent Dr. Falkenhagen hat die Berechnung an der Hand der Luftwiderstandstabelle von O. v. Eberhard durchgeführt. Auch R. Sägewald (s. Lit.-Note) hat versucht, die Koeffizienten zu bestimmen. Darnach zeigt sich, daß das Gesetz von Lorenz zwar nicht sämtliche Beobachtungstatsachen völlig getreu und eindeutig darstellt, daß aber dieses Gesetz von allen bisher rein theoretisch abgeleiteten Gesetzen noch die meiste Aussicht zu bieten scheint, als Grundlage für die Weiterentwicklung der Ballistik auf diesem Gebiete zu dienen. Bemerkt sei noch, daß nach diesem Gesetz, wie nach demjenigen von Vieille und von Sommerfeld für  $v = \infty \lim (W:v^2) = \text{konst.}$  wird; d. h. daß für sehr große Geschwindigkeiten der Luftwiderstand wieder proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist, jedoch mit einem anderen Koeffizienten als für kleine Geschwindigkeiten.

A. Sommerfeld (vgl. Lit.-Note) denkt sich den Luftwiderstand  $W$  zusammengesetzt aus dem Reibungswiderstand  $W_1$  (im weiteren Sinne), den er nach Newton proportional  $v^2$  nimmt, und aus dem Wellenwiderstand  $W_2$ . Für letzteren gewinnt er einen Ausdruck, indem er die Analogie des elektromagnetischen Feldes benutzt, das entsteht, wenn ein Elektron mit Überlichtgeschwindigkeit sich bewegt. Bedeutet  $s$  die Schallgeschwindigkeit, so ist für  $v < s$ ,  $W = W_1 = a_s \cdot v^2$ , für  $v > s$ ,  $W = W_1 + W_2 = av^2 + A \left(1 - \frac{s^2}{v^2}\right)$ . Die Kurve  $W:v^2$  verläuft ähnlich, wie die entsprechende für die neueren empirischen Gesetze. Der Buckel der Kurve erklärt sich dadurch, daß in der Nähe von  $v = s$  der Wellenwiderstand  $W_2$  in zunehmendem Maße einsetzt, daß aber dieser Widerstand mit  $v$  in geringerem Maße wächst, als der Reibungswiderstand  $W_1$ ; das Verhältnis  $(W_1 + W_2):W_1$  nimmt daher mit wachsendem  $v$  wieder ab. Die Geschosßform ist in dem Gesetz von Sommerfeld vorläufig nicht berücksichtigt.

Endlich hat L. Prandtl (s. Lit.-Note) den Staudruck berechnet, der in Luft von der Dichte  $\rho$ , vor einem mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Körper entsteht; wenn  $v$  größer als die normale Schallgeschwindigkeit  $s_0$  ist, besteht diese Druckerhöhung aus zwei Teilen, einer unstetigen in der Kopfwelle und einer stetigen von der Kopfwelle bis zum Staupunkt. Die Berechnung zeigt, daß diese Druckerhöhung nicht nur für die kleinen  $v$ , sondern auch wieder für die sehr großen Geschwindigkeiten  $v$  proportional  $v^2$  ist, dazwischen wächst sie etwas schneller. L. Prandtl gibt dazu eine kleine Tabelle. Der Widerstand  $W$  eines Geschosses vom Querschnitt  $F$  kann

nach ihm dargestellt werden durch die Formel  $W = \psi \cdot F \cdot \rho \cdot v^2$ , wo  $\psi$  eine Funktion von  $v : s_0$  ist. Die Temperaturerhöhung vor dem Geschosß berechnet sich nach Prandtl zu  $\frac{v^2}{2 \cdot c_p}$ , ( $c_p$  in Arbeitseinheiten =  $0,238 \cdot 427 \cdot 9,81$ ); also z. B. bei  $v = 800$  m/sec zu ca.  $300^\circ \text{C}$ ; vgl. übrigens darüber Band II, Gleichung (16) in § 21.

Im ganzen kann gesagt werden, daß von seiten der Theorie bis jetzt kein völlig befriedigendes und völlig allgemeines Gesetz des Luftwiderstandes gegen Geschosse mit aller Sicherheit erbracht ist. Deshalb ist man in der Ballistik genötigt, sich vorläufig an die reine Erfahrung zu halten.

Der Ausdruck für den Luftwiderstand müßte für irgendein Kaliber, irgendein Luftgewicht und irgendeine Geschosßform eine Funktion der Geschwindigkeit (und vielleicht auch noch der Beschleunigung) des Geschosßschwerpunktes enthalten, die folgende Teile darstellt:

1. Den Saug- und Wirbelwiderstand. Hinter dem Geschosß bildet sich bei wachsender Geschwindigkeit mehr und mehr ein luftverdünnter Raum aus, in den die umgebende Luft unter Reibungswirbeln einströmt (ähnlich wie man es beim Wasser an einer ebenen Platte beobachtet, die in vertikaler Lage senkrecht zu ihrer Ebene durch das Wasser fortbewegt wird). Die zugehörige Energie findet sich später teils als Wärme im Schußkanal vor, teils geht sie als Bewegungsenergie nach außen (vgl. die bekannten Geräusche beim Schuß). Dieser Widerstand hängt wesentlich von der Form des Geschosßendes ab. In der Nähe der Schallgeschwindigkeit scheint er rasch anzusteigen; aber weiterhin nähert er sich mehr und mehr einem festen Grenzwert, der durch die absolute Luftleere hinter dem Geschosß gegeben ist. Dieser Teil, dividiert durch  $v^2$ , wird sich also mit zunehmendem  $v$  der Null nähern.

2. Der Wellenwiderstand. Dieser tritt an allen vorspringenden Teilen des Geschosses auf, insbesondere am Geschosßkopfe. Er wächst mit der Geschwindigkeit unbegrenzt, und zwar mehr und mehr proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, so daß dieser Teil dividiert durch  $v^2$  einer gewissen Konstanten zustrebt, die je nach der Geschosßform verschieden ist. Die auf diesen Widerstandsteil verwendete Energie geht als Wellenenergie nach außen weiter (Geschosßknall).

3. Der Reibungswiderstand, soweit er noch nicht in 1. enthalten ist. Dieser Teil scheint bei den gebräuchlichen Geschosßformen relativ klein zu sein.

4. Endlich müßte ein vollkommenes Luftwiderstandsgesetz erkennen lassen, in welcher Weise sich der Luftwiderstand ändert

wenn die Geschosßachse, die bisher als in der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes liegend angenommen wurde, einen gegebenen Winkel gegen diese Richtung bildet (darüber vgl. § 12).

Aus dem Vorstehenden geht unter anderem hervor, daß die Form des Geschosßkopfs insbesondere bei großen Geschwindigkeiten (über 300 m/sec) von Wichtigkeit ist, und zwar um so mehr, je größer die Geschwindigkeit ist, daß ferner die Form des hinteren Geschosßendes bei kleinen Geschwindigkeiten (unter 300 m/sec) von Einfluß ist, daß sich jedoch dieser Einfluß mit wachsender Geschosßgeschwindigkeit mehr und mehr einer Grenze nähert, die nicht mehr überschritten werden kann.

### § 10. Empirisch gewonnene Luftwiderstandsgesetze und zugehörige Experimente.

a) Für sehr kleine Geschwindigkeiten  $v$  des bewegten Körpers, wie sie z. B. bei langsamen Pendelschwingungen eintreten, ist nach M. Thiesen der Luftwiderstand proportional der ersten Potenz von  $v$ . In der Ballistik kommt dies nicht in Betracht.

b) Für Geschwindigkeiten bis etwa 30 m/sec wird allgemein das quadratische Luftwiderstandsgesetz benutzt: der Luftwiderstand  $W$  gegen einen zylindrischen Körper von der Geschwindigkeit  $v$  mit ebener Stirnfläche von  $R^2 \pi$  bei dem Luftgewicht  $\delta$  ist

$$W = k R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{1,22} \cdot v^2. \quad [\delta \text{ in kg/cbm}].$$

Als Wert des Faktors  $k$  in  $\text{kg m}^{-4} \text{sec}^2$  nimmt Poncelet und Didion 0,081; F. le Dantec 0,080; P. C. Langley 0,085; Ch. Renard 0,085; Canovetti 0,090; J. Weißbach 0,093; J. Smeaton 0,122; F. v. Lössl 0,106; O. Lilienthal 0,125; E. J. Marey 0,125; G. Kirchhoff (wesentlich auf Grund theoretischer Berechnungen) 0,055. Über die näheren Einzelheiten vergleiche man die Zusammenfassung durch S. Finsterwalder. Für geworfene Steine, Schleuderkugeln, Pfeilbolzen usw. würde also, mit  $R$  in  $m$ ,  $v$  in m/sec, etwa

$$W = 0,08 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{1,22} \cdot v^2 \text{ kg}$$

zu nehmen sein.

c) Den Verhältnissen der aus Feuerwaffen geschleuderten Geschosse entspricht zur Zeit der Geschwindigkeitsbereich von  $v = \text{ca. } 50 \text{ m/sec}$  bis  $v = \text{höchstens } 1700 \text{ m/sec}$ . Hierfür wurden ganz oder teilweise empirisch abgeleitete Luftwiderstandsgesetze in großer Zahl veröffentlicht. Wenn dabei von „Gesetzen“ die Rede ist, so sind sich die betreffenden Ballistiker (mit wenigen Ausnahmen) wohl bewußt, daß es sich lediglich um die Zusammenfassung von Messungs-

ergebnissen durch einen passenden mathematischen Ausdruck handelt. Uns sind etwa 27 solcher empirischer Gesetze bekannt geworden, wovon die Mehrzahl die Form von Potenzgesetzen  $W = av^n$  bzw.  $W = av^m + bv^n + \dots$  besitzt. Dabei wurde seit Mayevski mit Erfolg der ganze für die Praxis in Betracht kommende Bereich der Geschößgeschwindigkeiten derart in Intervalle, „Zonen“, eingeteilt, daß von einer Zone zur anderen in dem Gesetz  $W = av^n$  entweder  $a$  oder  $n$  oder beide Zahlenwerte variiert wurden.

Von den sämtlichen Gesetzen seien nur einige wenige angeführt, nämlich solche, die im Laufe der Entwicklung der Ballistik eine besondere Bedeutung gewonnen haben.

Durchweg sei das Kaliber des Geschosses mit  $2R$  (und zwar, wenn nichts Besonderes bemerkt ist, in Metern), das Geschößgewicht mit  $P$  (kg), das Luftgewicht mit  $\delta$  (kg/cbm), die Geschößgeschwindigkeit mit  $v$  (m/sec), der Luftwiderstand mit  $W$  (kg), die Verzögerung durch den Luftwiderstand, also das Verhältnis  $\frac{W \cdot 9,81}{P}$  von Luftwiderstand  $W$  und Geschößmasse  $\frac{P}{g}$ , mit  $c \cdot f(v)$  bezeichnet. Dabei bedeutet  $f(v)$  den von der Geschwindigkeit  $v$  allein abhängigen Faktor in dem Ausdruck für die Verzögerung des Geschosses.

1. J. Didions Gesetz, aufgestellt auf Grund von Schießversuchen der Metzer Kommission von 1839/40 mit Hilfe des ballistischen Pendels, sowie von Schießversuchen der Metzer Kommission von 1856/58 mit Hilfe des Apparates von Navez; für Kugeln mit  $i = 1$  und für Geschwindigkeiten  $v$  zwischen 280 und 460 m/sec gültig;

$$W = 0,027 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta \cdot i}{1,208} \cdot v^2 \left(1 + \frac{v}{435}\right);$$

also

$$c = \frac{0,027 \cdot R^2 \pi \cdot \delta \cdot g \cdot i}{P \cdot 1,208}; \quad f(v) = v^2 \left(1 + \frac{v}{435}\right).$$

2. St. Robert, Italien; nach den Metzer Versuchen von 1839/40; für Kugeln mit  $i = 1$  und für Geschwindigkeiten  $v$  von etwa 200 bis 500 m/sec gültig;

$$W = 0,0387 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta \cdot i}{1,206} \cdot v^2 \left(1 + \left(\frac{v}{696}\right)^2\right).$$

3. N. Mayevski, Rußland, nach russischen und englischen Versuchen 1868/69;

a) für Kugeln mit  $i = 1$ :

$$\begin{cases} W = 0,012 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta \cdot i}{1,206} \cdot v^2 \left(1 + \left(\frac{v}{186}\right)^2\right), & \text{wenn } v > 0 \text{ u. } < 376 \text{ m/sec,} \\ W = 0,061 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta \cdot i}{1,206} \cdot v^2, & \text{„ } v \geq 376 \text{ u. } < 530 \text{ m/sec.} \end{cases}$$



b) mit  $i = 1$  gültig für Langgeschosse mit „ogivaler“ Spitze von 1 bis 1,5 Kalibern Abrundungsradius (ogivale Spitze, d. h. von einem Längsschnitt in der Gestalt des Spitzbogenfensters):

$$W = 0,012 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{1,206} \cdot v^3 \left( 1 + \left( \frac{v}{488} \right)^2 \right), \text{ wenn } v > 0 \text{ u. } < 280 \text{ m/sec,}$$

$$W = 0,026 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{1,206} \cdot v^6, \quad " \quad v \geq 280 \text{ u. } < 360 \quad "$$

$$W = 0,044 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{1,206} \cdot v^3, \quad " \quad v \geq 360 \text{ u. } < 510 \quad "$$

5. Hélie gibt auf Grund von französischen Versuchen folgende Werte speziell für Kugeln. Es ist  $W = \kappa \cdot (2R)^2 \cdot \frac{\delta}{a} \cdot v^3$ ; wobei

für $v = 50 \text{ m/sec}$ , $\kappa = 0,130$	für $v = 300 \text{ m/sec}$ , $\kappa = 0,269$
100 0,132	320 0,293
120 0,135	340 0,316
140 0,139	360 0,337
160 0,146	380 0,353
180 0,154	400 0,367
200 0,166	420 0,376
220 0,181	440 0,382
240 0,200	460 0,386
260 0,221	500 0,389
280 0,244	für $v > 500$ 0,390

5. F. Bashforth (England) nach eigenen Versuchen von 1866/70; für Langgeschosse mit ogivaler Spitze vom Abrundungsradius ca. 1,5 Kalibern gültig mit  $i = 1$ ;  $W = m \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta \cdot i}{1,206} \cdot v^3$ , dabei ist

$m = 0,000068$	$0,000075$	$0,000082$	$0,000090$
für $v = 600 \text{ bis } 550$	$550 \text{ bis } 500$	$500 \text{ bis } 460$	$460 \text{ bis } 419 \text{ m/sec.}$
$m = 0,000094$	$0,000084$	$0,000060$	
für $v = 419 \text{ bis } 375$	$375 \text{ bis } 330$	$330 \text{ bis } 50 \text{ m/sec.}$	

Soll das Gesetz für die früheren Kruppschen „Normalgeschosse“ von 2 Kalibern Abrundungsradius gelten, so ist (nach Siacci)  $i = \text{ca. } 0,896$  zu nehmen.

6. Hojel (Holland), nach holländischen Versuchen von 1884, sowie nach Kruppschen Versuchen; mit  $i = 1$  gültig für Langgeschosse mit ogivaler Spitze von 2 Kalibern Abrundungsradius;  $W = \frac{(2R)^2 \cdot 1000 \cdot \delta \cdot i}{9,81 \cdot 1,206} \cdot m \cdot v^n$ , dabei ist

für $v = 140$ bis $300$ m/sec,	$m$ :	<sup>(6)</sup> 0,084 535,	$n = 2,5$
300 " 350		<sup>(11)</sup> 0,054 23	5
350 " 400		<sup>(8)</sup> 0,051 381	3,83
400 " 500		<sup>(4)</sup> 0,074 83	1,77
500 " 700		<sup>(3)</sup> 0,054 67	1,91.

7. Mayevski (Rußland), Gesetz von 1881, mit Fortsetzung durch N. Sabudski (Rußland) von  $v = 550$  m/sec ab, auf Grund der Versuche Krupps 1875/81, der englischen Versuche Bashforth's 1866/70 und der russischen Versuche Mayevskis 1868/69. Mit  $i = 1$  gültig für Ogivalgeschosse von zwei Kalibern Abrundungsradius:

$W = m \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta \cdot i}{1,206} \cdot v^n$ ; dabei ist

für $v = (0)$ bis $240$ m/sec,	$m = 0,0140$ ,	$n = 2$
240 " 295	<sup>(4)</sup> 0,058 34	3
295 " 375	<sup>(9)</sup> 0,067 09	5
375 " 419	<sup>(4)</sup> 0,094 04	3
419 " 550	0,039 4	2
550 " 800	0,261 6	1,70
800 " 1000	0,713 0	1,55.

8. Gesetz von Chapel (1874) — Vallier (1894) — Scheve (1907); auf Grund insbesondere von Versuchen Krupps und holländischen Versuchen mit Ogivalgeschossen von 2 Kalibern Abrundungsradius:

$$\text{für } v > 330 \text{ m/sec, } W = \frac{R^2 \cdot 10000 \cdot \delta \cdot i}{9,81 \cdot 1,206} \cdot 0,125 (v - 263)$$

(dies nach Chapel — Vallier — Scheve);

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } v \text{ zwischen } 330 \text{ u. } 300 \text{ m/sec, } W = \frac{R^2 \cdot 10000 \cdot \delta \cdot i}{9,81 \cdot 1,206} \cdot 0,021 692 \cdot v^5 \\ \text{" } v < 300 \text{ m/sec, } W = \frac{R^2 \cdot 10000 \cdot \delta \cdot i}{9,81 \cdot 1,206} \cdot 0,033 814 \cdot v^{2,5} \end{array} \right\}$$

(dies nach Hojel).

Der Koeffizient  $i$  soll dabei, nach Vallier, konstant  $= 1$  nur für diejenige Geschosßform sein, die bei den zugrunde liegenden Schießversuchen hauptsächlich benutzt wurde, also  $i = 1$  für 2 Kaliber Abrundungsradius der ogivalen Spitze oder für den halben Ogivalwinkel  $\gamma = 41,5^\circ$ . Sonst soll für  $v \geq 330$  m/sec  $i$  mit  $v$  etwas veränderlich sein, nämlich

$$i = \frac{\gamma \cdot [v - (180 + 2\gamma)]}{41,5 (v - 263)}.$$

Hierin sind für  $v$  bzw.  $\gamma$  die Zahlenwerte in m/sec bzw. in Grad zu setzen.

Für  $v < 330$  m/sec soll sein

$$\begin{array}{cccc} i = 0,67 & 0,72 & 0,78 & 1,10 \\ \text{für } \gamma = 31^{\circ} & 33,6^{\circ} & 36,9^{\circ} & 48,2^{\circ}. \end{array}$$

Bezeichnet man

$$W: \frac{R^2 \cdot 10000 \cdot \delta \cdot i}{9,81 \cdot 1,206} f(v) \quad \text{und} \quad \frac{f(v)}{v^2} = K(v), \quad \frac{f(v)}{v^4} = K'(v),$$

so ist der Verlauf der Funktionen  $K$  und  $K'$  nach Vallier der folgende:

$v$	$10^7 K(v)$	$10^{12} K'(v)$	$v$	$10^7 K(v)$	$10^{12} K'(v)$
150	415	1844	390	1043	687
160	430	1680	400	1070	669
170	441	1526	420	1108	628
180	452	1395	440	1143	590
190	466	1293	460	1165	550
200	478	1195	480	1178	511
210	491	1113	500	1185	474
220	502	1037	525	1187	431
230	515	974	550	1186	393
240	526	913	575	1180	357
250	535	856	600	1170	325
260	546	808	650	1145	272
270	558	765	700	1115	228
280	564	719	750	1082	192
290	578	687	800	1049	164
300	586	651	850	1016	140
310	645	667	900	983	121
320	708	671	950	952	106
330	769	706	1000	921	92
340	831	720	1050	892	81
350	888	724	1100	865	72
360	936	722	1150	838	64
370	977	714	1200	813	57
380	1013	702	1250	790	51

Danach hat die Funktion  $\frac{f(v)}{v^2}$  ein Maximum bei

$$\text{ca. } v = 525 \text{ m/sec.}$$

9. Einheitliches Gesetz von Siacchi 1896. Dieses soll die sämtlichen bis dahin angestellten Luftwiderstandsversuche zusammenfassen und für den gesamten Geschwindigkeitsbereich bis  $v = 1200$  m/sec aufwärts gelten.

$$\text{Verzögerung} = \frac{(2R)^2 \cdot 1000 \cdot \delta \cdot i}{P \cdot 1,206} \cdot f(v) \quad \text{oder} \quad W = 338 \cdot R^2 \cdot \delta \cdot i \cdot f(v)$$

wo

$$\begin{aligned} f(v) = & 0,2002 \cdot v - 48,05 + \sqrt{(0,1648 \cdot v - 47,95)^2 + 9,6} \\ & + \frac{0,0442 \cdot v \cdot (v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}. \end{aligned}$$

Eine Tabelle für die Funktion  $f(v)$  findet man, — außer in der Originalabhandlung von Siacci und dort mit zahlreichen Druckfehlern, — in dem Lehrbuch der Ballistik von C. Cranz, Bd. IV, 2. Aufl. bei B. G. Teubner, 1818, Tabelle Nr. 7. Ferner findet man eine Tabelle für  $f(v)$  samt den beiden ersten Differentialquotienten dieser Funktion, fortschreitend von 1 zu 1 m/sec für  $v$ , in dem Aufsatz von O. Wiener, Leipzig, Akad. Ber., math.-naturwiss. Kl., Bd. 36 (1919), Nr. 1. Die Kurve  $f(v)$  besitzt einen Wendepunkt bei  $v = \text{ca. } 340 \text{ m/sec}$  und einen Maximalpunkt bei  $\text{ca. } 500 \text{ m/sec}$ . In der vorliegenden Ausgabe ist die Siaccische Tabelle in Nr. 6 des Anhangs abgedruckt.

Mit  $i = 1$  soll das Gesetz für Ogivalgeschosse von 0,9 bis 1,1 Kal. Spitzenhöhe gelten. Wird es somit für Normalgeschosse mit 2 Kalibern Abrundungsradius oder 1,3 Kal. Spitzenhöhe verwendet, so ist nach Siacci  $i = 0,896$  zu nehmen, besser dürfte sein 0,865.

10. Die ältere Kruppsche Tabelle; abgedruckt in des Verfassers Lehrbuch der Ballistik, Bd. IV, 2. Aufl., bei B. G. Teubner, 1918, Tabelle Nr. 8; in der vorliegenden Auflage des Lehrbuchs nicht wieder abgedruckt. Die Tabelle gilt für 2 Kal. Abrundungsradius und für  $\delta = 1,206 \text{ kg/cbm}$ . Nach W. Gross können die Zahlen bis  $v = 300 \text{ m/sec}$  aufwärts nur als annähernd richtig gelten, da bei kleinen Geschwindigkeiten die Messungsfehler erheblich ins Gewicht fielen. Am meisten Vertrauen sollen die Zahlen zwischen 350 und 600 m/sec verdienen. Darüber hinaus störten die Pendelungen der Geschosse.

11. Die neuesten (vgl. Lit.-Note) und wohl exaktesten Messungsergebnisse sind zusammengefaßt in der folgenden Luftwiderstandstabelle der Firma Fr. Krupp (O. v. Eberhard) (S. 58 u. 59). R. Sängewald hat die Eberhardsche Tabelle bis  $v = 750 \text{ m/sec}$  aufwärts sorgfältig ausgeglichen und gibt die Zahlenwerte von  $100 \cdot f(v)$  samt den beiden ersten Ableitungen dieser Funktion, fortschreitend für  $v$  von 1 zu 1 m/sec (Leipzig: Akad. Ber., math.-naturwiss. Kl., Bd. 73 [1921], S. 152). Nachstehend ist die bis  $v = 1300 \text{ m/sec}$  reichende Originaltabelle von O. v. Eberhard wiedergegeben.

a) für sogenannte Kruppsche Normalgeschosse, d. h. für Geschosse mit 2 Kalibern Abrundungsradius der ogivalen Spitze und mit einer vorderen Abflachung auf 0,36 Kaliber, (der Name ist nur beibehalten, weil diese Geschosse bei den früheren Messungen verwendet worden waren und die Form wurde angewendet, weil der Vergleich mit den früher aufgestellten Gesetzen dadurch erleichtert war); darnach ist der Luftwiderstand (kg)

$$W = \frac{R^2 \pi \cdot \delta \cdot i \cdot f(v)}{1,22},$$

$R^2 \pi$  der Querschnitt in qcm (nicht in qm wie bei 1. bis 10.),  $\delta$  das Tagesluftgewicht in kg/cbm,  $i = 1$  für Kruppsche Normalgeschosse; dagegen ist (nach O. von Eberhard):

für Geschosse mit 3 Kal. Abrundungsradius und 0,36 Kal. Abflachung

$$\frac{1}{i} = 1,3206 - \frac{58,2}{v} - 0,0001024 \cdot v,$$

für Geschosse mit 5,5 Kal. Abrundungsradius und 0,36 Kal. Abflachung

$$\frac{1}{i} = 1,4362 - \frac{73,4}{v} - 0,0001128 \cdot v,$$

für Geschosse mit 3 Kal. Abrundungsradius und 0,25 Kal. Abflachung

$$\frac{1}{i} = 1,1959 - \frac{40,6}{v} + 0,0001467 \cdot v,$$

für Geschosse mit 3 Kal. Abrundungsradius und scharfer Spitze

$$\frac{1}{i} = 1,1311 - \frac{47,7}{v} + 0,0003166 \cdot v,$$

für Infanteriegeschosse von der Form des S-Geschosses

$$\frac{1}{i} = 1,410 - \frac{122,68}{v} + 0,0005915 \cdot v.$$

In der Tabelle a) sind die Zahlenwerte für  $\frac{10^6 \cdot f(v)}{v^3}$  oder kurz geschrieben  $10^6 \cdot K(v)$  aufgeführt. Es ist also z. B. mit  $R^2 \pi = 1$  qcm und mit  $\delta = 1,22$  kg/cbm der durchschnittliche Luftwiderstand auf 1 qcm des Querschnitts eines Ogivalgeschosses von 2 Kal. Abrundungsradius und 0,36 Kal. vorderer Abflachung bei  $v = 500$  m/sec

$$= 1 \cdot 500^2 \cdot 3,998 \cdot 10^{-6} = 0,999 \text{ kg}.$$

Die Versuche zeigten, daß die Kurve  $f(v):v^2$  einen Buckel bei etwa  $v = 480$  m/sec besitzt und daß sie für große Geschwindigkeiten sich asymptotisch einer Horizontalen zu nähern scheint, d. h. daß für große Geschwindigkeiten wieder das quadratische Gesetz gilt. Weiter aber zeigten die Versuche, daß die frühere Annahme, der Luftwiderstand  $W$  sei proportional einem einzigen Formfaktor, der von der Geschwindigkeit  $v$  unabhängig ist, nicht zutrifft. Es ist jedoch O. von Eberhard gelungen, die Luftwiderstandsfunktion mit genügender Annäherung in zwei Teile zu spalten, wovon der eine Faktor ( $i$ ) von der Geschwindigkeit  $v$  und von der Form, der andere  $f(v)$  nur von  $v$  abhängt. Diese Werte von  $i$  bzw. von  $\frac{1}{i}$  sind oben für mehrere Geschößformen gegeben, mit Ausnahme des rein zylindrischen Geschosses.

b) Für rein zylindrische Artilleriegeschosse ist

$$W = \frac{R^2 \pi \cdot \delta \cdot f(v)}{1,22},$$

Tabelle a)  $10^6 K$  für 10 cm Kruppsche Normalgeschosse.

$v$ m/sec	$10^6 K$	$v$ m/sec	$10^6 K$	$v$ m/sec	$10^6 K$	$v$ m/sec	$10^6 K$	$v$ m/sec	$10^6 K$
150	1,190	334	2,566	525	3,976	785	3,520	1045	3,292
155	1,190	336	2,654	530	3,970	790	3,514	1050	3,289
160	1,191	338	2,739	535	3,963	795	3,507	1055	3,287
165	1,191	340	2,822	540	3,956	800	3,502	1060	3,284
170	1,191	342	2,902	545	3,949	805	3,496	1065	3,282
175	1,191	344	2,979	550	3,941	810	3,491	1070	3,279
180	1,192	346	3,051	555	3,933	815	3,485	1075	3,277
185	1,192	348	3,115	560	3,925	820	3,480	1080	3,275
190	1,193	350	3,174	565	3,916	825	3,474	1085	3,273
195	1,194	352	3,231	570	3,907	830	3,469	1090	3,271
200	1,195	354	3,286	575	3,899	835	3,463	1095	3,269
205	1,196	356	3,337	580	3,890	840	3,458	1100	3,267
210	1,198	358	3,384	585	3,881	845	3,453	1105	3,265
215	1,200	360	3,427	590	3,871	850	3,448	1110	3,263
220	1,203	362	3,468	595	3,862	855	3,443	1115	3,262
225	1,207	364	3,506	600	3,852	860	3,438	1120	3,260
230	1,212	366	3,541	605	3,841	865	3,433	1125	3,259
235	1,218	368	3,574	610	3,830	870	3,428	1130	3,257
240	1,225	370	3,605	615	3,818	875	3,423	1135	3,256
245	1,233	372	3,633	620	3,807	880	3,418	1140	3,255
250	1,243	374	3,659	625	3,796	885	3,413	1145	3,253
255	1,255	376	3,682	630	3,784	890	3,409	1150	3,252
260	1,270	378	3,703	635	3,773	895	3,404	1155	3,251
265	1,288	380	3,722	640	3,761	900	3,400	1160	3,250
270	1,309	385	3,761	645	3,750	905	3,395	1165	3,249
275	1,334	390	3,792	650	3,740	910	3,391	1170	3,248
280	1,363	395	3,819	655	3,729	915	3,386	1175	3,247
282	1,376	400	3,843	660	3,719	920	3,382	1180	3,247
284	1,390	405	3,864	665	3,709	925	3,378	1185	3,246
286	1,405	410	3,883	670	3,700	930	3,374	1190	3,245
288	1,421	415	3,900	675	3,690	935	3,369	1195	3,245
290	1,439	420	3,916	680	3,681	940	3,365	1200	3,244
292	1,458	425	3,931	685	3,672	945	3,361	1205	3,244
294	1,478	430	3,943	690	3,664	950	3,357	1210	3,243
296	1,500	435	3,955	695	3,655	955	3,353	1215	3,243
298	1,524	440	3,965	700	3,647	960	3,349	1220	3,243
300	1,551	445	3,973	705	3,638	965	3,345	1225	3,242
302	1,580	450	3,981	710	3,630	970	3,341	1230	3,242
304	1,613	455	3,987	715	3,622	975	3,338	1235	3,242
306	1,648	460	3,992	720	3,614	980	3,334	1240	3,241
308	1,687	465	3,995	725	3,606	985	3,330	1245	3,241
310	1,730	470	3,997	730	3,598	990	3,326	1250	3,241
312	1,779	475	3,999	735	3,590	995	3,323	1255	3,241
314	1,832	480	4,000	740	3,583	1000	3,320	1260	3,240
316	1,888	485	4,000	745	3,575	1005	3,316	1265	3,240
318	1,947	490	4,000	750	3,568	1010	3,313	1270	3,240
320	2,010	495	3,999	755	3,561	1015	3,310	1275	3,240
322	2,079	500	3,998	760	3,553	1020	3,307	1280	3,240
324	2,152	505	3,996	765	3,547	1025	3,304	1285	3,240
326	2,229	510	3,992	770	3,540	1030	3,301	1290	3,240
328	2,308	515	3,987	775	3,533	1035	3,298	1295	3,240
330	2,391	520	3,982	780	3,527	1040	3,295	1300	3,240
332	2,478								

die Werte von  $\frac{10^6 \cdot f(v)}{v^2}$  oder, kurz bezeichnet, die Werte von  $10^6 K(v)$  für solche Geschosse sind in der Tabelle b) niedergelegt.

Tabelle b)  $10^6 K$  für 10 cm zylindrische Geschosse.

$v_0$ m/sec	$10^6 K$	$v_0$ m/sec	$10^6 K$	$v_0$ m/sec	$10^6 K$	$v_0$ m/sec	$10^6 K$	$v_0$ m/sec	$10^6 K$
100	4,160	285	5,652	440	8,381	680	9,318	940	10,117
110	4,173	290	5,780	450	8,448	640	9,356	960	10,144
120	4,190	295	5,919	460	8,512	650	9,393	980	10,168
130	4,209	300	6,071	470	8,573	660	9,430	1000	10,189
140	4,232	305	6,243	480	8,632	670	9,466	1020	10,207
150	4,260	310	6,430	490	8,689	680	9,501	1040	10,224
160	4,295	315	6,608	500	8,744	690	9,535	1060	10,238
170	4,337	320	6,779	510	8,796	700	9,568	1080	10,249
180	4,387	325	6,935	520	8,846	720	9,631	1100	10,258
190	4,443	330	7,074	530	8,895	740	9,692	1120	10,264
200	4,510	340	7,305	540	8,943	760	9,747	1140	10,268
210	4,589	350	7,495	550	8,989	780	9,800	1160	10,270
220	4,680	360	7,648	560	9,033	800	9,850	1180	10,270
230	4,783	370	7,777	570	9,076	820	9,897	1200	10,270
240	4,898	380	7,888	580	9,118	840	9,941	1220	10,270
250	5,025	390	7,987	590	9,159	860	9,982	1240	10,270
260	5,168	400	8,076	600	9,200	880	10,020	1260	10,270
270	5,335	410	8,161	610	9,240	900	10,055	1280	10,270
275	5,430	420	8,239	620	9,279	920	10,087	1300	10,270
280	5,536	430	8,312						

In der Abbildungsreihe 29, a bis g ist durch Abb. a der Gang der Funktion  $f(v):v^2$  für Kruppsche 10 cm-Normalgeschosse und für zylindrische Artilleriegeschosse qualitativ dargestellt; durch Abb. b dasselbe für Infanteriegeschosse, zugleich sind die Werte nach Char-

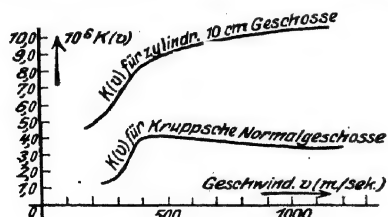


Abb. 29a.

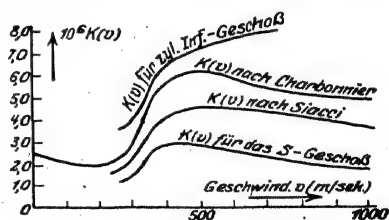


Abb. 29b.

bonnier und nach Siacci eingezeichnet. Abb. c zeigt qualitativ den Verlauf des Widerstands  $W$  selbst, speziell für  $\delta = 1,22 \text{ kg/cbm}$  und für  $R^2 \pi = 1 \text{ qcm}$ . Man sieht u. a., daß die betreffende Kurve in einem ziemlich großen Bereich der  $v$  annähernd durch eine gerade Linie  $W = \alpha v - \delta$  ersetzt werden kann; es liegt darin die Berechtigung für das Gesetz von Chapel — Vallier — Scheve (s. w. o.).

Weiter läßt die Abb. d erkennen, wie die wahre  $K$ -Kurve durch die Linien (1) bzw. (2), (3), (4) ersetzt wird, wenn man durchweg das quadratische Luftwiderstandsgesetz  $f(v) = c_1 v^2$  oder  $K = \text{const.}$  (Newton usw.), bzw. das kubische  $f(v) = c_2 v^3$  (z. B. Bashforth, England), bzw. das biquadratische Gesetz  $f(v) = c_3 v^4$  (z. B. Piton-Bressant, Frankreich), bzw. das binome Gesetz  $f(v) = c_4 v^3 (1 + bv)$  (z. B. Didion, Frankreich) annehmen und dabei die betreffenden Faktoren  $c_1, c_2, c_3, c_4, b$  als Konstanten behandeln will.

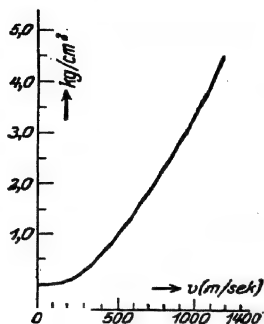


Abb. 29 c.

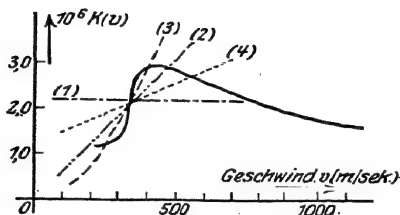


Abb. 29 d.

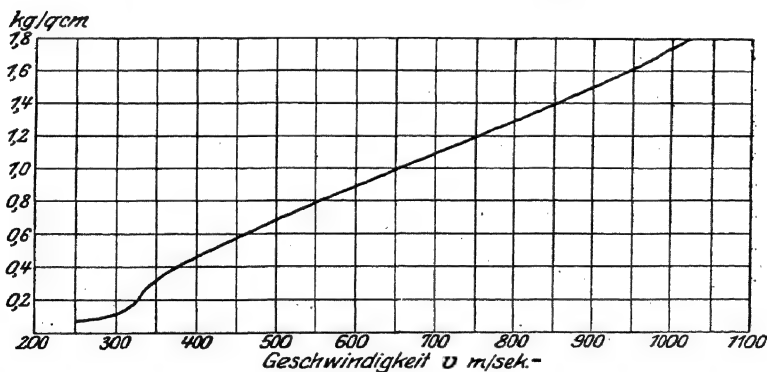
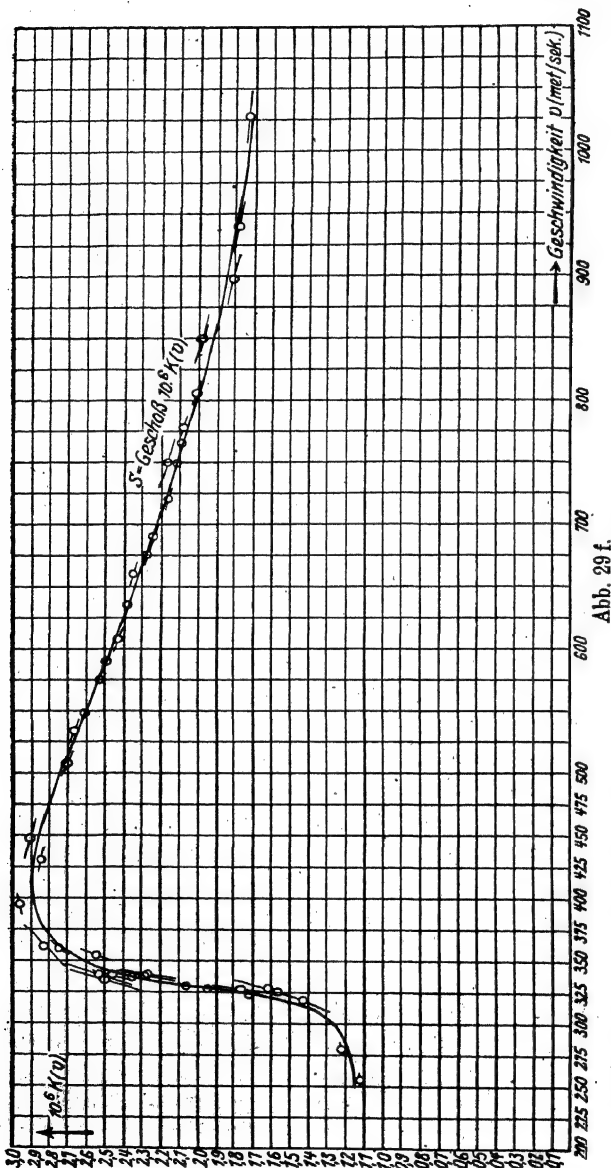


Abb. 29 e.

Die genaueren quantitativen Verhältnisse lassen sich aus den Abb. e, f und g erkennen. Abb. e bzw. f zeigt die Werte  $f(v)$  bzw.  $f(v):v^3$  speziell für die weiter unten angeführten Messungen von K. Becker und C. Cranz mit  $S$ -Geschossen. Dabei ergibt sich aus Abb. f der Betrag der wahrscheinlichen Messungsfehler. Endlich in Abb. g sind die Messungsergebnisse angegeben, aus denen F. Saccì 1896 sein einheitliches Luftwiderstandsgesetz entwickelt hat.





### Zugehörige Schießversuche und sonstige Experimente.

1. Die wichtigsten derjenigen Schießversuche, die speziell zur Gewinnung des Luftwiderstandsgesetzes angestellt wurden, sind die folgenden:

a) Versuche der Metzger Kommission Didion-Morin-Piobert 1839/40, der Hauptsache nach mit Kugeln; Geschwindigkeitsbereich 200 bis 600 m/sec; Meßapparat das ballistische Pendel. Die Versuche 1858 58 in Metz wiederholt mit Hilfe des elektrischen Flugzeitenmessers von Navez.

b) Englische Versuche, von F. Bashforth in den Jahren 1866 bis 1870 mit Geschossen von verschiedenem Kaliber (7,6 bis 22,9 cm) von der Spitzenhöhe 1,12 Kal., der Geschosslänge 2,54 Kal. und mit Geschwindigkeiten  $v = 230$  bis  $u = 520$  m/sec ausgeführt.

c) Russische Versuche, von N. Mayevski bei St. Petersburg im Jahre 1869 mit Geschossen von verschiedenem Kaliber, verschiedener Spitzenhöhe (meist 0,9 Kal.) und verschiedener Ge-

Abb. 29 f.

schoßlänge (meist 2,01 Kal.) und mit dem Geschwindigkeitsbereich  $v = 172$  bis 409 m/sec durchgeführt.

d) Krupp'sche Versuche von 1879 bis 1896, auf dem Schießplatz Meppen, mit Geschossen von verschiedenem Kaliber, verschiedener Länge (2,8 bis 4 Kal.), verschiedener Spitzenhöhe (1,31 und 1,0 Kal., meist 1,3 Kal.); Geschwindigkeitsbereich  $v = 150$  bis 910 m/sec.

e) Holländische Versuche von W. C. Hojel 1884, mit Geschossen von 8 bis 40 cm Kaliber, von 2,5 bis 4 Kal. Geschoßlänge und von 1,31 und 1,33 Kal. Spitzenhöhe; der Geschwindigkeitsbereich war  $v = 138$  bis 660 m/sec; vereinzelte Versuche wurden mit erheblich größeren Geschwindigkeiten (bis 1500 m/sec) angestellt.

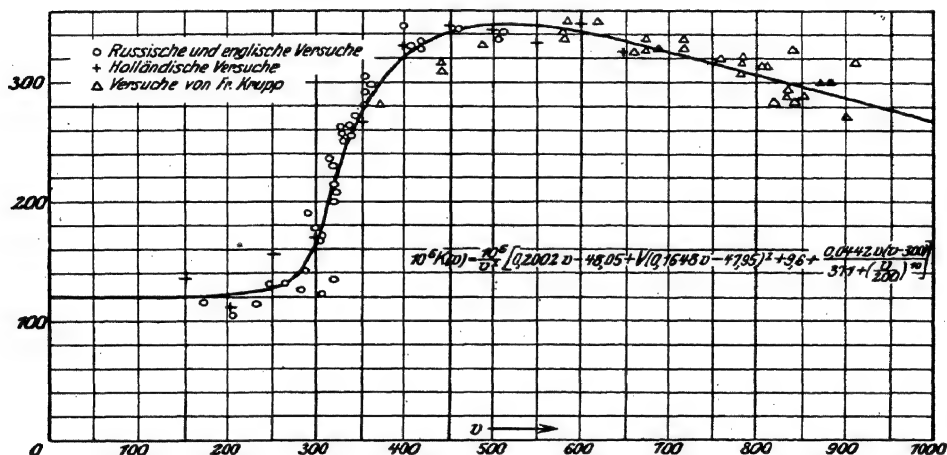


Abb. 29 g.

f) Gleichzeitige Versuche der Firma F. Krupp (O. von Eberhard) mit Artilleriegeschossen und von K. Becker und C. Cranz mit Infanteriegeschossen (vgl. Lit.-Note). Erstere Versuche durchgeführt mit Hilfe eines Funkenchronographen und auf zahlreichen kurzen Messungstrecken von je 50 m in Essen a. d. R.; bei großen Kalibern durch Messen der Anfangs- und Endgeschwindigkeit bei kleiner Schußweiten von 2 bis 3 km. Letztere Versuche durchgeführt im ballistischen Laboratorium mit 8 mm-Geschossen verschiedener Form und nach zwei Methoden; mittels eines ballistischen Kinematographen und mittels eines elektrostatischen Funkenchronographen bei photographischer Registrierung; Messungstrecke dabei 15 bis 20 m. Über die Einzelheiten vgl. die beiden Arbeiten, die in Nr. 69 und Nr. 71 der „Artillerist. Monatshefte“ Jahrg. 1912 veröffentlicht sind.

2. Für kleine Geschwindigkeiten (bis 30 m/sec aufwärts) liegen sehr zahlreiche Messungen vor. Es handelt sich dabei:

um Fallversuche, die völlig frei oder mit Benützung von vertikalen Drahtführungen oder auf schiefer Bahn durchgeführt wurden; um die Messung des Winddrucks mit Manometern der verschiedensten Art; um Versuche mit Rund-

lauffapparaten, durch die ein Körper von bestimmter Form im Kreise herumgeführt wird; um Wagebalkenversuche, bei denen der Körper auf der einen Seite einer äquiliibrierten Wage befestigt ist und wobei die ganze Wage rasch in die Höhe gehoben wird usw. Über die näheren Einzelheiten vgl. das schon zitierte Referat von Finsterwalder.

Bei diesem Anlaß sei erwähnt, daß F. v. Lössl (1896) in Übereinstimmung mit Dubuat (1850) auf Grund zahlreicher Versuche mit brennenden Kerzen, leichtbeweglichen Papierstücken usw. annimmt, vor der Stirnfläche des mit kleiner Geschwindigkeit bewegten Körpers bilde sich ein Stauhügel von ruhiger Luft und an den Flächen dieses Hügels ströme die Luft seitlich ab.

## § 11. Allgemeine Bemerkungen über die bei der Aufstellung von empirischen Luftwiderstandsgesetzen angewandten Methoden. Kritische Bemerkungen. Vorschläge.

1. Meistens wurden im Anfangspunkt und im Endpunkt einer horizontalen Strecke  $a$  die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $v_1$  und  $v_2$  des Geschosses (Gewicht  $P$ ) gemessen. Die Strecke  $a$  wurde so groß gewählt, als es mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Fehler bei der Messung von  $v_1$  und  $v_2$ , sowie auf die Schwankungen der Geschosßgeschwindigkeit von einem Schuß zum andern erforderlich war, andererseits so klein, daß man glaubte sicher zu sein, die Flugbahn könne auf der Strecke mit genügender Sicherheit als geradlinig betrachtet werden. Der gemessenen Abnahme der Geschosßenergie wurde alsdann ein als konstant angenommener Mittelwert  $W$  des Luftwiderstandes unterlegt. Diese aus  $\frac{P}{2g}(v_1^2 - v_2^2) = W \cdot a$  berechnete Größe  $W$  wurde dann der zu der Geschosßgeschwindigkeit  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$  gehörige Luftwiderstand genannt. Man erhielt so  $W(v)$  und bestimmte unter Annahme eines Potenzgesetzes  $c \cdot v^n$  die Konstanten  $c$  und  $n$  durch die Methode der kleinsten Quadrate<sup>1)</sup>.

Dieses Verfahren wird um so einwandfreier sein, je kleiner die Strecke  $a$  gewählt werden kann. Will man ferner allein die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit  $v$  kennen, so hat man alle anderen Größen, insbesondere das Geschosßgewicht, die Spitzenform, die Geschosßlänge, den Drall usw.,

<sup>1)</sup> O. von Eberhard hat bei Verarbeitung der Luftwiderstandsversuche der Firma Krupp die Verzögerung durch den Luftwiderstand gleich  $c \cdot v^n$  gesetzt und für  $n$  die Mayevskischen Werte der betreffenden Geschwindigkeitsbereiche gewählt. Bei dieser Form des Luftwiderstandsgesetzes kennt man die Gleichungen, welche  $x$  und  $t$  in Funktion von  $v$  geben. Somit läßt sich aus genügend vielen Wertepaaren  $x$  und  $t$  je der Wert von  $v$  und  $c$  ermitteln. Man erhält so, wenn man  $W$  als Funktion von  $v$  aufträgt, für den beim Versuch vom Geschosß durchseilten Geschwindigkeitsbereich kleine Kurvenstücke, welche der gesuchten Luftwiderstandskurve nahezu parallel laufen.

konstant zu halten. Das so gewonnene Gesetz über die Abhängigkeit des Luftwiderstandes  $W(v)$  gilt dann streng genommen nur für Geschosse, deren Kaliber, Spitzenform, Geschosslänge, Rotationsgeschwindigkeit usw. wenig von den betreffenden Größen der benützten Geschosse abweicht, da der Widerstand nicht genau proportional dem Querschnitt und einem einzigen Spitzenkoeffizienten ist. Soll allein die Abhängigkeit von der Spitzenform für eine bestimmte Geschwindigkeit  $v$  untersucht werden, so muß diese letztere samt allen übrigen Größen unverändert bleiben, nur die Spitzenform darf variiert werden usw.

Tatsächlich scheint jedoch eine derartige rationelle Abänderung der den Luftwiderstand bestimmenden Größen früher keineswegs überall stattgefunden zu haben. Z. B. heben einige Ballistiker, die sich mit der Aufstellung von Luftwiderstandsgesetzen beschäftigten, rühmend hervor, daß sie zur Gewinnung der Funktion  $W(v)$  Geschosse der verschiedensten Kaliber und Geschosslängen verwendeten. Darin liegt kein Vorzug, sondern das Gegenteil.

Häufig scheinen ferner Geschosspendelungen erfolgt zu sein, deren Amplitude nicht genau gemessen wurde. Besonders aber wurde früher die Länge der Messungsstrecke sehr häufig so groß gewählt, daß von einer Geradlinigkeit der Flugbahn und von einer Konstanz des Widerstandes  $W$  auf dieser Strecke keine Rede sein kann. In solchen Fällen wurde zum Teil angenommen, daß die horizontale Komponente des Luftwiderstandes für eine gewisse Geschwindigkeit  $v$  identisch sei mit dem Luftwiderstand für die horizontale Komponente von  $v$ , also  $f(v) \cdot \cos \vartheta = f(v \cdot \cos \vartheta)$ , was nur eine Hypothese ist.

Zum Teil wurde endlich zur Berechnung des Luftwiderstandes auf Grund der Messung der Geschosßgeschwindigkeit an den Enden einer stark gekrümmten Flugbahn das Hilfsmittel rechnerischer Näherungsmethoden beigezogen. Damit aber war ein *circulus vitiosus* unvermeidlich. Denn hierbei wird auf Grund einer unsicheren Theorie aus den Schießergebnissen die Flugbahn und damit der Luftwiderstand  $W$  berechnet; danach werden Rechnungstabellen aufgestellt; diese Tabellen werden dann benützt, um in irgendeinem Falle die Flugbahn zu berechnen. Schließlich vergleicht man vielleicht wieder die Rechnungsergebnisse mit den Schießergebnissen. So kontrolliert man eine unsichere Theorie durch eine andere oder durch sich selbst.

Soll bei der Aufstellung von Luftwiderstandsgesetzen rationell verfahren werden, so ist alle Theorie auszuschalten und der Versuch so einzurichten, daß das Gesetz der lebendigen Kraft oder ein anderes allgemein gültiges Gesetz der Mechanik in reiner Form angewendet werden kann.

Durch die angeführten Umstände erklären sich wohl zum größten Teil die starken Abweichungen der Luftwiderstandswerte voneinander. Im übrigen sind die Einzelheiten der früheren Versuche nirgends so eingehend veröffentlicht, wie dies in anderen Disziplinen üblich ist, weshalb eine Kontrolle der Fehler nicht in jedem Falle möglich ist.

2. F. Bashforth benützte das folgende systematische Verfahren. In der Nähe der Mündung des Geschützes werden mehrere Gitterrahmen in den gleichen und kleinen Abständen  $\Delta x$  hintereinander aufgestellt. Das erste Gitter habe die Entfernung  $x$  von der Mündung. Dort sei die Geschwindigkeit des Geschosses  $v$ , der Luftwiderstand  $W(v)$ . Es wurde horizontal durch die Gitter geschossen; dabei wurden mittels des Bashforth'schen Chronographen (s. d.) die Zeitdifferenzen  $\Delta t$ ,  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ , ... gemessen, in denen das Geschöß vom ersten zum zweiten, vom zweiten zum dritten usw. Gitterrahmen fliegt. Es handelt sich darum, den Widerstand  $W$ , also das Produkt aus der Masse  $\frac{P}{g}$  und der Verzögerung  $-\frac{dv}{dt}$  des Geschosses, zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } v &= \frac{dx}{dt}, \quad \frac{1}{v} = \frac{dt}{dx}; \text{ daraus, durch Ableitung nach } x, \\ -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx} &= \frac{d^2t}{dx^2} \text{ oder } \frac{dv}{dt} = -v^3 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = -v^3 \cdot \frac{d^2t}{dx^2}, \text{ somit } W \text{ oder} \\ -\frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} &= +\frac{P}{g} \cdot v^3 \cdot \frac{d^2t}{dx^2}. \end{aligned}$$

In der Reihe der gemessenen Zeiten  $\Delta t$ ,  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ , ... ist  $\Delta t$  das Anfangsglied; in der zugehörigen 1., 2., 3., ... Differenzenreihe seien  $\Delta''t$ ,  $\Delta'''t$  usw. die Anfangsglieder. Dann ist den Grundsätzen der Differenzenrechnung zufolge

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} &= \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[ \Delta t - \frac{1}{2} \Delta''t + \frac{1}{3} \Delta'''t - \frac{1}{4} \Delta^{(4)}t + \dots \right] \\ \text{und} \quad \frac{d^2t}{dx^2} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot \left[ \Delta''t - \Delta'''t + \frac{11}{12} \Delta^{(4)}t - \frac{5}{6} \Delta^{(5)}t + \dots \right] \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot \left[ \Delta''t_{(x-\Delta x)} - \frac{1}{12} \Delta^{(4)}t_{(x-2\Delta x)} + \frac{1}{90} \Delta^{(6)}t_{(x-3\Delta x)} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} W &= -\frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \\ &= +\frac{P}{g} \cdot \frac{v^3}{(\Delta x)^2} \cdot \left[ \Delta''t - \Delta'''t + \frac{11}{12} \Delta^{(4)}t - \frac{10}{12} \Delta^{(5)}t + \frac{137}{180} \Delta^{(6)}t - \dots \right]. \end{aligned}$$

Auf diese Weise berechnete Bashforth zu den verschiedenen Geschwindigkeiten  $v$  aus seinen Messungen den zugehörigen Luftwiderstand  $W$ .

So rationell diese Methode ist, muß doch bezweifelt werden, ob der Apparat mit genügender Genauigkeit die einzelnen Zeitintervalle zu messen gestattete. Auch ist über den Widerstand, den die einzelnen Gitterrahmen dem Geschloß darboten und der bei größerer Anzahl der Gitter möglicherweise die Messungen in merklicher Weise beeinflußt, nichts Genaues bekannt.

3. Einige neuzeitliche Verfahren gestatten es, zum Teil bei Nacht durch Aufnahme von Sprengpunkten (photogrammetrische **Flugbahn**-aufnahme), zum Teil auch bei Tage (Ballistograph von Duda, Universalmeßkamera von Rumpff), die Flugbahn in kürzeren Stücken festzulegen. Auch das Neesesche Verfahren kann in Betracht kommen, wenn man die Leuchtzünder nur so kurz brennend bemißt, daß durch Gewichtsabnahme und Schwerpunktsverlegung, sowie durch Reaktion der ausströmenden Gase des Leuchtzünders keine nennenswerten Änderungen der Flugbahn des Leuchtzündergeschosses gegenüber dem normalen Geschloß eintreten (vgl. Bd. III). [Dagegen kommt die Aufnahme der Rauchspur von besonderen Rauchspurgeschossen (z. B. Patent Semple) wegen der durch Abbrennen des Rauchsatzes verursachten verschiedenen Änderungen am Geschloß und wegen der Unsicherheit der Rauchspur, welche letztere besonders bei Wind noch unregelmäßigen Verwehungen ausgesetzt ist, für die vorliegenden Zwecke nicht in Betracht.]

Man gewinnt auf diese Weise für irgendeine horizontale Entfernung  $x$  die Flughöhe  $y$  des Geschosses. Hieraus und aus den Differentialquotienten  $y'$ ,  $y''$  und  $y'''$  nach  $x$  berechnet sich für jede Entfernung  $x$

a) die Geschwindigkeit  $v$  mittels  $v = \sqrt{g} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}}$ ,

b) der Neigungswinkel  $\vartheta$  der Tangente aus:  $v \cdot \cos \vartheta = \sqrt{\frac{-g}{y''}}$ ,

c) die Flugzeit  $t$  durch mechanische Integration aus:

$$dt = dx \cdot \sqrt{\frac{-y''}{g}},$$

d) die Verzögerung durch den Luftwiderstand

$$= -\frac{g}{2} \cdot \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{y''^2} \quad (\text{vgl. Nr. 19}).$$

Damit würde für eine große Zahl von verschiedenen  $x$  und folglich auch von  $v$  die Verzögerung und damit der Luftwiderstand  $W$  gewonnen werden. Der Vorteil würde also darin liegen, daß man

grundsätzlich mit wenigen gelungenen Versuchen den größten Teil der Luftwiderstandstabelle erhielt (vgl. übrigens die Lit.-Note).

Auf ähnlichem Gedanken beruht ein Verfahren, das in England von C. F. Close vorgeschlagen und von G. Greenhill und C. E. Wolff in mathematischer Hinsicht weiter ausgeführt wurde: Mit demselben Geschütz seien für zahlreiche Abgangswinkel  $\varphi$  die Schußweiten  $X$  erschossen. Wendet man auf die einzelnen Flugbahnen das Prinzip des Schwenkens an (darüber s. w. u.), so kennt man für die größte Flugbahn eine Reihe von Flugbahnpunkten. Denn diese sind damit durch ihre Polar-Koordinaten gegeben. Somit läßt sich, wie oben angegeben ist, die Verzögerung durch den Luftwiderstand und die Geschwindigkeit für jeden Punkt, somit der Luftwiderstand in Funktion der Geschwindigkeit berechnen.

Indessen würde mit Benützung dieser Rechnungsweise stillschweigend eine Voraussetzung eingeführt, die dem wirklichen Flug des rotierenden Langgeschosses mehr oder weniger widerspricht. Die obige Berechnung gilt nämlich streng nur dann, wenn die Längsachse des Geschosses stets genau in der Bahntangente liegt, also wenn das Geschöß wie ein gut gefertigter Pfeil fliegt. Bei dem rotierenden Langgeschöß müssen jedoch Präzessionspendelungen eintreten, da die Richtung der Bahntangente im Verlauf des Flugs einen immer größeren Winkel mit der Anfangstangente der Flugbahn bildet. Infolge davon muß sich die Längsachse schief zur Bahntangente stellen, und zwar auch dann, wenn keine anfänglichen Nutationspendelungen vorhanden sind. Der tatsächliche Luftwiderstand ist also ein solcher gegen ein schiefgestelltes Geschöß, während die Rechnung die Normalstellung des Geschosses zur Voraussetzung hat. Es ist dies eine Voraussetzung, die allerdings auch den sämtlichen Näherungsmethoden zur Lösung des speziellen ballistischen Problems unterstellt wird. Allein durch obige Rechnung kann der Luftwiderstand gegen ein Geschöß, dessen Längsachse dauernd in der Bahntangente bleiben würde, nicht genau erhalten werden, da man die Beziehung zwischen dem Widerstand gegen ein schiefgestelltes Geschöß und dem Widerstand gegen ein normal gestelltes, sowie den jeweiligen Winkel dieser Schiefstellung nicht kennt.

Speziell zu dem Verfahren von Close ist außerdem zu bemerken, daß dabei die Beziehung zwischen  $\varphi$  und  $X$  durch eine mathematische Näherungsformel dargestellt wird, und daß der hierin liegende Fehler sich bei der dreimaligen Differentiation unter Umständen vergrößert; ferner, daß das Schwenken der Bahnen jedenfalls mit einem Fehler behaftet ist. Es müßte also im einzelnen Fall untersucht werden, ob diese Fehler durchweg so klein bleiben, daß sie vernachlässigt werden können.

Aus diesen Gründen ist vielleicht das folgende Verfahren vorzuziehen:

Das Geschützrohr wird in vertikaler Lage aufgebaut und eingedeckt. Das Geschöß ist in Neesenscher Weise mit einer seitlichen Leuchtsatzeinrichtung versehen. Das Abfeuern geschieht elektrisch, geschossen wird bei Nacht. In geeignet großer Entfernung vom Geschütz ist ein photographisches Objektiv und dahinter in Bildweite der Geschützöffnung eine etwa 120 cm hohe Trommel aufgestellt, die um eine vertikale Achse mit bekannter Geschwindigkeit rotiert. Auf der Trommel ist ein Bromsilberband oder ein Filmband befestigt. Beim vertikalen Emporsteigen des Geschosses entsteht auf dem rotierenden Trommelband eine gestrichelte Spirallinie. Die Ordinatenachse wird durch einen entsprechenden Schuß bei ruhender Trommel, die Abszissenachse durch künstliche Beleuchtung der Geschützöffnung bei rotierender Trommel ermittelt. Man erhält auf diese Weise aus den Abszissen der einzelnen Kurvenpunkte die zugehörigen Flugzeiten  $t$ , aus den Ordinaten die zugehörigen Flughöhen  $y$ . Durch rechnerische Differentiation kennt man die Geschwindigkeit  $y'$  und die Beschleunigung  $y''$  in Funktion von  $t$ , daraus den Luftwiderstand

$$W = - \frac{P}{g} y'' - P,$$

und zwar zunächst in Funktion der Zeit  $t$ , da aber  $y' = v$  in Funktion von  $t$  gefunden ist, so hat man  $W$  auch in Funktion von  $v$ . Man gewinnt also bei diesem Verfahren, wenigstens im Prinzip, aus einigen wenigen einwandfreien Aufnahmen die ganze Luftwiderstandstabelle von der maximalen Anfangsgeschwindigkeit ab bis zu der Geschwindigkeit Null.

Selbstverständlich ist, daß die Fehler des Objektivs durch Abstecken einer gleich weit entfernten Horizontallinie und die Gewichtsänderungen der Geschosse durch Laboratoriumsmessungen festgestellt werden müssen. Und eine Voraussetzung, die gesondert geprüft werden müßte, ist die, daß das Abbrennen des Leuchtsatzes keine Störungen im Geschößflug bewirkt.

Zu Präzessionspendelungen ist beim vertikalen Schuß kein Anlaß gegeben. Dagegen müßte darauf geachtet werden, daß Geschütz und Geschöß so ausgewählt ist, daß keine Nutationspendelungen vorhanden sind.

Im einzelnen dürfte die Ausführung solcher Versuche auf manche Schwierigkeiten stoßen, die überwunden werden müßten. Ob das Verfahren durchführbar ist und brauchbare Ergebnisse liefert oder nicht, kann nur der Versuch zeigen. Uns war bis jetzt nicht die Möglichkeit gegeben, ein derartiges Unternehmen zu beginnen.



## II. Über den Einfluß einer Schiefstellung der Geschosßachse gegenüber der Bewegungsrichtung des Schwerpunkts.

### § 12. Ermittlung der Luftwiderstandskomponenten parallel und senkrecht zur Geschosßachse und des Drehmoments um eine Querachse durch den Schwerpunkt.

#### A. Analytische Behandlung.

Der Widerstand, den eine ebene Fläche von der Größe der Flächeneinheit bei senkrechter Bewegung in ruhender Luft und bei einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$  erfährt, sei  $\kappa$ . Es sei dann vorausgesetzt, daß der Widerstand, den eine ebene Fläche  $f$  unter gleichen Bedingungen erleidet, daß  $f$ -fache, also  $f \cdot \kappa$  betrage. Steht die Fläche  $f$  schief gegen die Bewegungsrichtung  $B$ , bildet nämlich die Flächennormale  $N$  mit der Bewegungsrichtung  $B$  den Winkel  $\alpha$ , so hängt der Widerstand der Fläche  $f$  in gewisser Weise von  $\alpha$  ab. Für diese Abhängigkeit sind auf Grund von Versuchen — allerdings von Versuchen mit nur kleiner Geschwindigkeit — und auf Grund von Theorien mehrere unter sich wesentlich verschiedene Gesetze abgeleitet worden: Nach Newton ist der Widerstand  $= \kappa \cdot f \cdot \cos^2 \alpha$ , nach F. v. Loessl  $= \kappa \cdot f \cdot \cos \alpha$ , nach Riabouchinsky  $= \kappa \cdot f \cdot \cos 2\alpha$ , falls  $\alpha > 45^\circ$ ; dagegen  $= \kappa \cdot f$ , falls  $\alpha < 45^\circ$ , nach G. Kirchhoff und Lord Rayleigh

$$\frac{\kappa \cdot f (4 + \pi) \cos \alpha}{4 + \pi \cos \alpha}, \quad \text{nach Duchemin} \quad \kappa \cdot f \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Was die Richtung des Widerstandes gegen schiefgestellte Flächen betrifft, so wird meistens angenommen, daß der Druck, den die schiefgestellte Fläche erfährt, senkrecht zur Fläche steht. Es wird im folgenden vorausgesetzt, daß, wenn eine Fläche  $f$  mit ihrer Flächennormalen den Winkel  $\alpha$  gegen die Bewegungsrichtung  $B$  bildet, der Widerstand senkrecht zur Fläche steht (erste Annahme), wobei zu bemerken ist, daß sicherlich immer auch eine tangentielle Komponente vorhanden sein wird und daß diese um so mehr in Betracht kommt, je mehr sich  $\alpha$  dem Wert  $90^\circ$  nähert. Ferner wird angenommen, daß der Widerstand die Größe  $\kappa \cdot f \cdot \cos^m \alpha$  besitzt (zweite Annahme), wobei  $\kappa$  den Widerstand von 1 qem bei senkrechter Bewegung für dieselbe Geschwindigkeit bedeutet. Weiter wird angenommen, daß dieses Gesetz ein Elementargesetz darstellt, d. h. daß es auch für unendlich kleine Flächenelemente gültig ist, und daß der Widerstand gegen ein endliches Oberflächenstück des Geschosses durch entsprechende Summation über die dem Luftwiderstand ausgesetzte Oberfläche berechnet werden darf (dritte Annahme). Auch

diese Annahme ist mehr als zweifelhaft; vielmehr scheint der Widerstand gegen ein Flächenelement unter sonst gleichen Umständen auch von der Gestalt des ganzen Körpers abzuhängen. Nur um zu zeigen, wie die erwähnten Hypothesen mathematisch verwendet werden müßten, und nur aus Mangel eines Besseren mögen jene Hypothesen vorläufig beibehalten werden. Ihre Verwendung vollzieht sich dann wie folgt.

Um das Geschloß zu orientieren, sei ein rechtwinkliges, räumliches Koordinatensystem zugrunde gelegt. Das Geschloß sei ein Rotationskörper mit der  $z$ -Achse als Rotationsachse oder Geschloßlängsachse. Der Boden des Geschosses sei die  $xy$ -Ebene. Die Bewegungsrichtung des Schwerpunkts oder die Richtung der Flugbahntangente sei parallel der  $xz$ -Ebene und bilde mit der Geschloßachse oder der  $z$ -Achse den gegebenen Winkel  $\alpha$ . Es ist dann in Beziehung auf die  $xz$ -Ebene für das Geschloß alles symmetrisch, und es handelt sich darum, die Komponenten  $X$  und  $Z$  des Luftwiderstandes in der  $x$ - und  $z$ -Richtung, sowie die Lage des Angriffspunktes  $M$  der Resultanten  $\sqrt{X^2 + Z^2}$  des Luftwiderstandes auf der Geschloßachse zu ermitteln.

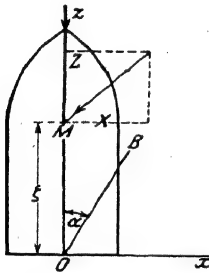


Abb. 30.

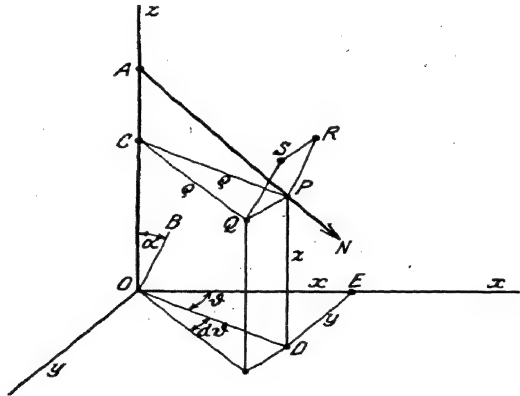


Abb. 31.

Ein Punkt der Geschloßoberfläche (s. Abb. 31) ist  $P$ , mit den rechtwinkligen Koordinaten  $OE = x$ ,  $ED = y$ ,  $DP = z$ , oder mit den Zylinderkoordinaten:  $\angle EOD = \vartheta$ , Radiusvektor  $OD = CP = \rho$ ,  $DP = z$ . In  $P$  denke man sich einen Meridianschnitt durch die Geschloßoberfläche längs der  $z$ -Achse oder Geschloßachse, ebenso einen Schnitt senkrecht zur Geschloßachse. Im ersteren Schnitt sei  $ds = PR$  ein unendlich kleines Element der Meridiankurve der Geschloßoberfläche. In letzterem Schnitt, der kreisförmig ist, sei  $PQ = \rho d\vartheta$  ein unendlich kleines Kreisbogenelement des Querschnitts. Auf diese Weise entsteht in  $P$  ein unendlich kleines Flächenelement  $PQSR$  mit dem

Flächeninhalt  $df = \rho d\vartheta ds$ . Der Widerstand dieses Flächenelements ist (der ersten Annahme zufolge) nach der Flächennormalen  $APN$  des Flächenelements gerichtet und hat (nach der zweiten und dritten Annahme) die Größe  $\kappa \cdot df \cdot \cos^m \omega$ , wo  $\omega$  den Winkel zwischen dieser Flächennormalen und der Richtung  $OB$  der Flugbahntangente bedeutet.

Die Flächennormale  $AN$  bilde bzw. die Winkel  $\beta_1 \beta_2 \beta_3$  gegen die  $x, y, z$ -Achse. Nun ist der Kosinus des Winkels zwischen  $AN$  und der Richtung  $CP$  oder  $OD$  gleich  $\frac{dz}{ds}$ , also ist  $\cos \beta_1 = \frac{dz}{ds} \cdot \cos \vartheta$

$$\text{und } \cos \beta_2 = \frac{dz}{ds} \cdot \sin \vartheta.$$

$$\text{Ferner ist } \cos \beta_3 = -\frac{d\rho}{ds}$$

(s. Abb. 32, in der der Meridianschnitt durch  $P$  für sich herausgezeichnet ist). Die Bewegungsrichtung oder die Flugbahntangente bilde die Winkel  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  gegen die drei Achsen, so ist

$$\cos \gamma_1 = \sin \alpha, \quad \cos \gamma_2 = 0, \\ \cos \gamma_3 = \cos \alpha.$$

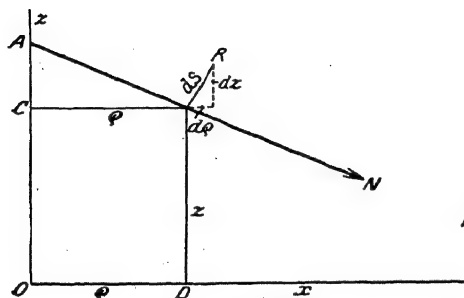


Abb. 32.

Somit ist

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cdot \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cdot \cos \gamma_3 \\ &= \frac{dz}{ds} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \alpha + 0 - \frac{d\rho}{ds} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ferner sind die Komponenten des Normalwiderstands  $\kappa \cdot df \cdot \cos^m \omega$  des Flächenelements  $df$  gegen die drei Achsen der  $xyz$  der Reihe nach

$$dX = \kappa \cdot df \cdot \cos^m \omega \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \cos \vartheta; \quad dY = \kappa \cdot df \cdot \cos^m \omega \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \sin \vartheta;$$

$$dZ = -\kappa \cdot df \cdot \cos^m \omega \cdot \frac{d\rho}{ds},$$

wobei  $df = \rho d\vartheta \cdot ds$  ist. Diese Ausdrücke  $dX, dY, dZ$  sind über die den Luftstrahlen ausgesetzten Teile der Geschoßoberfläche zu integrieren. Dabei ist  $Y$  (wegen der Symmetrie bezüglich der  $xz$ -Ebene) stets gleich Null.

Um den Abstand  $\zeta = OM$  des Angriffspunkts  $M$  der Luftwiderstandsergebnanten vom Geschoßboden zu erhalten, ist die Momentengleichung der Widerstandskomponenten in Beziehung auf  $O$  anzuschreiben. Hierbei kommen nur die  $x$ -Komponenten in Betracht, da die  $z$ -Komponenten den Hebelarm Null besitzen und die  $y$ -Komponenten selbst Null sind. Der Normalwiderstand des Flächenelements  $df$  hatte die  $x$ -Komponente  $\kappa \cdot df \cdot \cos^m \omega \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \cos \vartheta$ . Diese Komponente

greift in  $A$  auf der Geschoßachse ( $z$ -Achse) an. Der Hebelarm  $OA$  ist  $= OC + CA = z + \rho \cdot \frac{d\rho}{dz}$ . Also ist das Moment

$$\kappa \cdot df \cdot \cos^m \omega \cdot \left( z + \rho \cdot \frac{d\rho}{dz} \right) \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \cos \vartheta.$$

Die Summation aller dieser Momente gibt das Moment  $\zeta \cdot X$  der Resultanten. Hat man  $X$  berechnet, so kennt man also  $\zeta$ . Das Gesamtergebnis ist somit in den folgenden Formeln niedergelegt:

$$X = \kappa \cdot \iint \cos^m \omega \cdot \rho \cdot dz \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta. \quad (1)$$

$$Z = -\kappa \cdot \iint \cos^m \omega \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta. \quad (2)$$

$$X \cdot \zeta = \kappa \cdot \iint \left( z + \rho \cdot \frac{d\rho}{dz} \right) \cdot \cos^m \omega \cdot \rho \cdot dz \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta \quad (3)$$

$$\cos \omega = \sin \alpha \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \cos \vartheta - \cos \alpha \cdot \frac{d\rho}{ds}. \quad (4)$$

Hier bedeutet:  $X$  die Komponente des Luftwiderstands senkrecht zur Längsachse des Geschosses,  $Z$  diejenige entlang dieser Achse. Der resultierende Luftwiderstand  $\sqrt{X^2 + Z^2}$  greift in einem Punkt  $M$  der Achse an, der den Abstand  $\zeta$  vom Geschoßboden besitzt. Der Winkel  $\beta$  der Resultanten gegen die Achse ist im allgemeinen nicht identisch mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen Geschoßachse und Flugbahntangente, sondern es ist  $\operatorname{tg} \beta = X:Z$ . Der Faktor  $\kappa$  bedeutet den Luftwiderstand gegen die Flächeneinheit bei senkrechter Bewegung derselben und für die betreffende Geschwindigkeit  $v$  des Geschoßschwerpunkts, um die es sich handelt.  $m = 2$ , wenn das Newtonsche,  $m = 1$ , wenn das Lösslsche Gesetz als Elementargesetz zugrunde gelegt wird. Die Gleichung  $\rho = f(z)$  der Meridiankurve des Geschosses ist durch die Gestalt des Geschosses gegeben. Bei der Ausführung der Integration ist über die vom Luftwiderstand direkt getroffenen Teile des Geschosses oder des Geschoßteils, der in Frage steht, zu integrieren; also wenn für das ganze Geschöß auf einmal die Berechnung durchgeführt werden kann, in Beziehung auf  $z$  vom Geschoßboden bis zur Spitze, in Beziehung auf  $\rho$  von den innersten bis zu den äußersten Teilen der Geschoßoberfläche und endlich in Beziehung auf  $\vartheta$  von der einen bis zur andern Grenze der die Oberfläche tangierenden Luftstrahlen; also nur dann von 0 bis  $2\pi$ , wenn die ganze krumme Geschoßoberfläche von den Luftstrahlen getroffen wird; andernfalls sind die Grenzen mit Rücksicht auf die Geschoßform und den Winkel  $\alpha$  festzustellen.

Derartige Berechnungen haben insbesondere Kummer und St. Robert mit der Annahme  $m = 2$  (Newton) für mehrere Geschoßformen durchgeführt; desgleichen W. Groß mit der Annahme  $m = 1$

(Lössl), übrigens ist darauf aufmerksam zu machen, daß die Berechnungen von Groß auch in mathematischer Hinsicht nur angenäherte sind. Sonstige Berechnungen dieser Art stammen von de Sparre, v. Wuich, Mayevski, Siacci, Charbonnier.

Beispiele. 1. Widerstand der äußeren Mantelfläche eines oben offenen Kreiszylinders vom Radius  $R$  und der Höhe  $a$ . Komponenten und Angriffspunkt zu berechnen; Annahme von Newton ( $m=2$ ) (s. Abb. 33).

Die Gleichung der Meridiankurve ist  $\varrho = R$ ; also  $d\varrho = 0$ ;  $ds = dz$ ,  $\cos \omega = \sin \alpha \cdot \cos \vartheta$ ; danach ist

$$\begin{cases} X = \kappa \cdot R \cdot \sin^2 \alpha \cdot \iint \cos^3 \vartheta \cdot d\vartheta \cdot dz, \\ Z = 0, \text{ (da } d\varrho = 0, \text{ und Zylinder oben offen),} \\ X \cdot \zeta = \kappa \cdot R \cdot \sin^2 \alpha \cdot \iint \cos^3 \vartheta \cdot d\vartheta \cdot z \cdot dz. \end{cases}$$

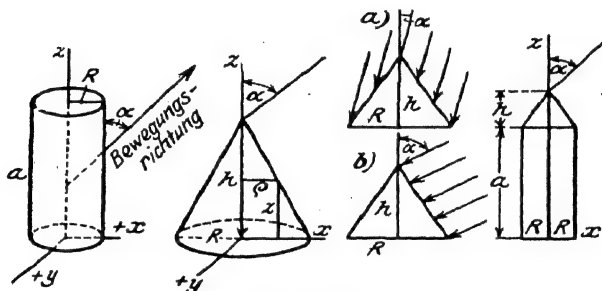


Abb. 33.

Da stets nur die eine Hälfte der krummen Oberfläche des Zylinders von dem Luftwiderstand direkt getroffen wird, so wird nur von  $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$  bis  $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$ , außerdem von  $z = 0$  bis  $z = a$  integriert; also ist

$$\begin{cases} X = \frac{4}{3} \cdot \kappa \cdot R \cdot a \cdot \sin^2 \alpha, \\ X \cdot \zeta = \frac{2}{3} \cdot \kappa \cdot R \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha; \text{ folglich} \\ \zeta = \frac{a}{2}, \end{cases}$$

d. h. der Angriffspunkt liegt in der Mitte der Zylinderhöhe. Wenn der Zylinder oben durch die Kreisfläche  $R^2 \pi$  senkrecht abgeschlossen ist, so ist  $Z = \kappa \cdot R^2 \pi \cdot \cos^2 \alpha$  (nach der Annahme Newtons); dann ist  $\text{tg } \beta = \frac{X}{Z} = \frac{4a}{3\pi R} \text{tg}^2 \alpha$ .

2. Kegel, Radius  $R$ , Höhe  $h$  (s. Abb. 33). Gleiche Voraussetzung  $m=2$ .

Die Gleichung der Meridiankurve, d. h. der geraden Erzeugenden, ist  $\varrho = \frac{R}{h} \cdot (h-z)$ ; folglich

$$\frac{d\varrho}{dz} = -\frac{R}{h}; \quad \frac{ds}{dz} = \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{h}; \quad \frac{d\varrho}{ds} = \frac{-R}{\sqrt{h^2 + R^2}};$$

$$\cos \omega = \frac{h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + R \cdot \cos \alpha}{\sqrt{h^2 + R^2}};$$

also

$$X = \frac{\kappa \cdot R \cdot h}{h^2 + R^2} \cdot \iint \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot (h-z) \cdot dz \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta;$$

$$Z = \frac{\kappa \cdot R^2}{h^2 + R^2} \cdot \iint \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot (h-z) \cdot dz \cdot d\vartheta;$$

$$X \cdot \zeta = \frac{\kappa \cdot R \cdot h}{h^2 + R^2} \cdot \iint \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot \left[ z - \frac{R^2}{h^2} (h-z) \right] \cdot (h-z) \cdot dz \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Integriert in Beziehung auf  $z$  von 0 bis  $h$ ,

$$X = \frac{\kappa \cdot R \cdot h^3}{2 \cdot (h^2 + R^2)} \cdot \int \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta,$$

$$Z = \frac{\kappa \cdot R^2 \cdot h^2}{2 \cdot (h^2 + R^2)} \cdot \int \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot d\vartheta,$$

$$X \cdot \zeta = \frac{\kappa \cdot R \cdot h^2 (h^2 - 2 \cdot R^2)}{6 \cdot (h^2 + R^2)} \cdot \int \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Daraus folgt, daß, für jeden Winkel  $\alpha$

$$\zeta = \frac{h^2 - 2 \cdot R^2}{3 h}.$$

Hinsichtlich der Integration in Beziehung auf  $\vartheta$  sind zwei Fälle zu unterscheiden (vgl. Abb. 33a und b); erstens der Fall, wo die ganze krumme Oberfläche des Kegels von dem direkten Luftwiderstand getroffen wird, was eintritt, wenn der Winkel  $\alpha$  kleiner ist, als der Winkel, den die Kegelschse mit der Seite desselben bildet, also wenn  $\operatorname{tg} \alpha < \frac{R}{h}$  ist, und zweitens der Fall, wo nur ein Teil der Kegelfläche vom Luftwiderstand getroffen wird, nämlich wenn  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{R}{h}$ .

Im ersten Fall  $\left( \operatorname{tg} \alpha < \frac{R}{h} \right)$

sind  $\vartheta = -\pi$  und  $\vartheta = +\pi$  die beiden Integrationsgrenzen bezüglich  $\vartheta$ , und da

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 \vartheta \cdot d\vartheta = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 \vartheta \cdot d\vartheta = \pi, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \vartheta \cdot d\vartheta = 0,$$

so erhält man

$$\begin{cases} X = \frac{\kappa \cdot h^3 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{h^2 + R^2}, \\ Z = \frac{\kappa \cdot h^2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \left( \sin^2 \alpha + \frac{2 \cdot R^2}{h^2} \cdot \cos^2 \alpha \right)}{2 (h^2 + R^2)} \end{cases}$$

Im zweiten Fall ( $\operatorname{tg} \alpha > \frac{R}{h}$ )

wird (s. Abb. 34) nur derjenige Teil des Kegelmantels vom Luftwiderstand getroffen, für welchen  $\cos \omega$  positiv ist ( $\omega$  = Winkel zwischen Normaler und Bewegungsrichtung oder Richtung der Luftströmung); die Integration in Beziehung auf  $\vartheta$  hat also ihre Grenzen da, wo eine Parallele zur Richtung der Luftströmung den Kegelmantel berührt oder für

$\cos \omega = 0$ , d. h. für  $h \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + R \cos \alpha = 0$ ,  
also

$$\cos \vartheta = -\frac{R}{h} \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Bestimmt man Winkel  $\gamma$  durch die Gleichung

$$\cos \gamma = \frac{R}{h} \operatorname{ctg} \alpha$$

oder

$$\gamma = \operatorname{Arc} \cos \left( \frac{R}{h} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \right),$$

so sind die Grenzen der Integration

$$\vartheta = -\pi + \gamma \quad \text{und} \quad \vartheta = +\pi - \gamma;$$

man braucht für die Integration in diesen Grenzen nur die drei Integrale

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi+\gamma}^{+\pi-\gamma} \cos^2 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{2}{3} \sin \gamma (2 + \cos^2 \gamma), \\ \int_{-\pi+\gamma}^{+\pi-\gamma} \cos^2 \vartheta \cdot d\vartheta = \pi - \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \gamma, \\ \int_{-\pi+\gamma}^{+\pi-\gamma} \cos \vartheta \cdot d\vartheta = 2 \sin \gamma. \end{array} \right.$$

Setzt man nun der Kürze halber

$$\begin{aligned} \int_{-\pi+\gamma}^{+\pi-\gamma} \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta &= P, \\ \int_{-\pi+\gamma}^{+\pi-\gamma} \left( \sin \alpha \cdot \cos \vartheta + \frac{R}{h} \cdot \cos \alpha \right)^2 \cdot d\vartheta &= Q, \end{aligned}$$

so erhält man nach Auflösung des Quadrats und Ausführung der Integrationen

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \cdot \sin \gamma \cdot (2 + \cos^2 \gamma) + \frac{2R}{h} \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\pi - \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \gamma) \\ &\quad + \frac{R^2}{h^2} \cos^2 \alpha \cdot \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$Q = \sin^2 \alpha (\pi - \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \gamma) + \frac{4R}{h} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma + \frac{2R^2}{h^2} (\pi - \gamma) \cos^2 \alpha$$

oder, wenn der Winkel  $\gamma$  durch den Winkel  $\alpha$  ausgedrückt wird,

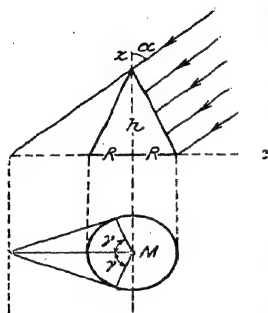


Abb. 34.

$$P = \frac{2}{3} \left( \frac{R^2}{h^2} \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2}{h^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha} \\ + \frac{2R}{h} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left( \pi - \operatorname{Arc} \cos \left( \frac{R}{h} \operatorname{ctg} \alpha \right) \right);$$

$$Q = \left( \frac{2R^2}{h^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) \left( \pi - \operatorname{Arc} \cos \left( \frac{R}{h} \operatorname{ctg} \alpha \right) \right) \\ + \frac{3R}{h} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{R^2}{h^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha},$$

und man hat demnach für den Fall, wo  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{R}{h}$ ,

$$X = \frac{\pi h^3 R P}{2(h^2 + R^2)}, \quad Z = \frac{\pi h^2 R^2 Q}{2(h^2 + R^2)}.$$

3. Verbindung des Zylinders und Kegels (gleiche Annahme  $m=2$ ).

a) Für den Fall, wo  $\operatorname{tg} \alpha < \frac{R}{h}$  (s. Abb. 35).

Man erhält einfach durch Addition:

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \pi \cdot \frac{4}{3} R a \cdot \sin^2 \alpha + \frac{\pi h^2 R^2 \cdot \pi \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{h^2 + R^2}, \\ Z &= \frac{\pi h^2 R^2 \cdot \pi \left( \sin^2 \alpha + \frac{2R^2}{h^2} \cos^2 \alpha \right)}{2(h^2 + R^2)}, \\ X \cdot \zeta &= \pi \cdot \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \cdot a^2 R + \frac{\pi \cdot h^2 R^2 \cdot \pi \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{h^2 + R^2} \cdot \left( a + \frac{h^2 - 2R^2}{3h} \right). \end{aligned} \right.$$

also

$$\zeta = \frac{\frac{2}{3} a^2 \sin^2 \alpha + \frac{h^2 \cdot R \cdot \pi}{h^2 + R^2} \left( a + \frac{h^2 - 2R^2}{3h} \right) \cdot \cos \alpha}{\frac{4}{3} a \sin \alpha + \frac{h^2 \cdot R \cdot \pi \cos \alpha}{h^2 + R^2}}.$$

b) Für den Fall, wo  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{R}{h}$

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \pi \cdot \frac{4}{3} R a \sin^2 \alpha + \frac{\pi h^3 R P}{2(h^2 + R^2)}, \\ Z &= \frac{\pi \cdot h^2 \cdot R^2 \cdot Q}{2(h^2 + R^2)}, \\ X \cdot \zeta &= \pi \cdot \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \cdot a^2 \cdot R + \frac{\pi \cdot h^3 R}{2(h^2 + R^2)} \cdot \left( a + \frac{h^2 - 2R^2}{3h} \right) \cdot P, \end{aligned} \right.$$

also

$$\zeta = \frac{\frac{2}{3} a^2 \sin^2 \alpha + \frac{h^3 P \left( a + \frac{h^2 - 2R^2}{3h} \right)}{2(h^2 + R^2)}}{\frac{4}{3} a \sin^2 \alpha + \frac{h^3 P}{2(h^2 + R^2)}}.$$

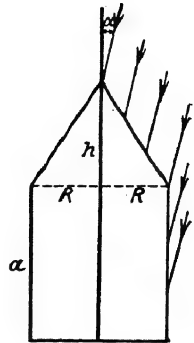


Abb. 35.

4. Durch Näherungsberechnungen auf Grund des Lösslschen Gesetzes ( $m=1$ ) findet W. Groß folgende Werte für den resultierenden Widerstand  $W$  eines Geschosses mit ogivaler Spitze:



bei Abrund.-Rad. 2 Kal.:  $W = \kappa R^2 \pi (0,3655 + 1,3606 \cdot \sin^2 \alpha)$  gültig für Winkel  $\alpha$  bis  
 " " " 2,5 "  $W = \kappa R^2 \pi (0,3312 + 1,6344 \cdot \sin^2 \alpha)$  aufwärts zu  
 " " " "  $\sin \alpha = 0,3$ .

Dabei bedeutet wiederum  $\kappa$  den Widerstand der Flächeneinheit bei senkrechter Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit, also bei 2,5 Kal. Abrundungsradius  $\kappa \cdot R^2 \pi \cdot 0,3312$  den Widerstand dieses Geschosses in dem Fall, daß die Geschosßachse in der Bahntangente liegt.

Was die Entfernung  $\zeta$  des Angriffspunktes der Resultanten vom Geschosßboden betrifft, so gelangt W. Groß für eine Granate von 3,5 Kal. Gesamtlänge und 1,5 Kal. Kopfhöhe zu folgenden Werten, wo  $2R$  das Kaliber bedeutet:

für $\sin \alpha = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ist $\zeta = 5,3$	4,8	4,4	4,1	3,9	3,7	3,5	3,4	3,3

3,0 mal  $R$ .

Der Schwerpunkt hat dabei den Abstand  $2,97 \cdot R$  vom Geschosßboden. Also selbst bei völliger Querstellung des Geschosses. ( $\alpha = 90^\circ$ ) würde darnach die Resultante vor dem Schwerpunkt angreifen. Für sehr kleine Winkel  $\alpha$  soll der Angriffspunkt etwa in der Mitte des Geschosßkopfs liegen.

Auch unter Voraussetzung des Newtonschen Wertes  $m=2$  ergibt die Rechnung, daß der Angriffspunkt im allgemeinen vor dem Schwerpunkt und für kleine Winkel nahe der Spitze liegt.  $\zeta$  ist dabei von  $\alpha$  abhängig. Nur für den senkrecht abgeschnittenen Zylinder, sowie für diejenige Verbindung von Zylinder und Kegel, bei der die Kopfhöhe  $h = 0,41 \cdot R$  ist, zeigt sich  $\zeta$  von  $\alpha$  unabhängig. Die Geschosßgeschwindigkeit  $v$  kommt allein in dem Faktor  $\kappa$  vor.

5. Th. Vahlen (s. loc. cit. S. 20) hat für kleine Winkel  $\alpha$  theoretisch das Resultat erhalten, daß der Abstand des Angriffspunktes der Luftwiderstandsresultanten bei schrägem Flug (d. h. bei  $\alpha \neq 0$ ) von dem Angriffspunkt bei geradem Flug (d. h. bei  $\alpha = 0$ ) proportional  $\alpha^2$  sei. P. Charbonnier findet, daß für die Praxis die Annahme genüge, der Angriffspunkt der Resultanten liege (bei nicht zu großem  $\alpha$ ) in der Mitte des Geschosßkopfs.

## B. Kritische Bemerkungen zum Vorhergehenden; experimentelle Methoden.

Gegenüber Berechnungen der obigen Art ist folgendes einzuwenden: Erstens ist über die eingangs erwähnten drei Annahmen nichts Sicheres bekannt. Zweitens kennt man, auch wenn diese Annahmen als zulässig gelten, nicht den für die ballistischen Verhältnisse am besten zutreffenden Wert von  $m$ . Drittens ist das Abfließen der Luft am Geschosß, die Bildung von Wellen und Wirbeln nicht berücksichtigt und kann zur Zeit noch nicht in befriedigender Weise mathematisch berücksichtigt werden.

Aus diesen Gründen wird weiterhin zuerst der Weg des Versuchs zu wählen sein.

Speziell über die Abhängigkeit der Lage des Angriffspunktes auf der Geschosßachse von dem Winkel  $\alpha$  hat 1875 E. Kummer zahlreiche und genaue Versuche mit geschosßartigen Körpern, jedoch nur mit kleinen Geschwindigkeiten und ohne Rotation, angestellt. Er suchte für eine bestimmte Form des Rotationskörpers die Beziehung zwischen  $\zeta$  und  $\alpha$ ,  $\alpha = f(\zeta)$ . Dabei wählte er

andere und andere Werte von  $\zeta$  und suchte je den zugehörigen Wert von  $\alpha$ , und zwar folgendermaßen:

Um eine horizontale Achse wurde das Geschoßmodell (aus Karton, um die Empfindlichkeit der Methode zu erhöhen) leicht beweglich angebracht und sodann das Geschoß mit etwa 8 m/sec Geschwindigkeit in ruhender Luft bewegt (mittels eines Rotationsapparates; das Geschoßmodell hing an einem über 2 m langen Arm, der um eine vertikale Achse gedreht wurde).

Das sinnreiche Verfahren Kummers bestand nun in folgendem: Für eine große Zahl von Lagen der Querachse bestimmte er die Gleichgewichtslage, welche der Körper allein unter der Wirkung des Luftwiderstandes annahm. Die Entfernung der Querachse vom Geschoßboden war also das frühere  $\zeta$ ; zu diesem wurde der zugehörige Winkel  $\alpha$  beobachtet, unter dem sich die Längsachse von selbst jedesmal einstellte.

Natürlich mußten alle übrigen Drehkräfte eliminiert werden; vor allem wurde die Schwerkraft als Drehkraft dadurch aufgehoben, daß der Schwerpunkt mittels eines Mechanismus im Innern stets auf der Querachse lag. Kummer führte die Beobachtungen durch für die Ebene, den Zylinder, die Verbindung von Zylinder mit Kegel, Halbkugel und halbem Ellipsoid und endlich für ein Modell des Mausergeschosses und der 4 pfündigen preußischen Granate. Einige Einzelheiten der Versuchsanordnung verbesserte Kummer in einer zweiten Arbeit.

Es mögen hier die Versuchsergebnisse Kummers mit dem Modell der Granate von der Zylinderhöhe  $a = 112,5$  mm, dem Radius  $R = 87,5$  mm, der Höhe des aufgesetzten Ogivals (halben Ellipsoids)  $h = 47,5$  mm wiedergegeben werden. Er fand für

$\zeta =$	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	104	106	108	110
$\alpha =$	86	83	82	79	73	70	69	68	64	55	48	43	39	36	34	33	32	30	25	23	21	18

Wenn also der Luftstrom unter immer kleineren Winkeln  $\alpha$  gegenüber der Achse gegen das Geschoß gerichtet ist, so rückt der Angriffspunkt mehr und mehr dem oberen Endpunkt des zylindrischen Teils ( $\zeta = 112,5$ ) zu. Für kleinere Winkel als  $\alpha = 18^\circ$  gab der Versuch keine bestimmten Ergebnisse mehr. Die Newtonsche Annahme gibt (für einen Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel):

$$\zeta = \frac{\frac{3}{8} a R \pi + a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\frac{3}{8} R \pi + 2 a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad (a \text{ Höhe des zylindrischen Teils, } 2R \text{ Kaliber}).$$

Setzt man hier  $\alpha = 0$ , so wird  $\zeta = a$ , in Übereinstimmung mit dem Experiment; dagegen sind im übrigen der so errechnete und der beobachtete Wert von  $\zeta$  für irgendein  $a$  merklich voneinander verschieden.

Für die Ballistik können solche Versuche, mit Geschwindigkeiten von 8 m/sec, nicht maßgebend sein, da es sich bei wesentlich größeren Geschwindigkeiten um andere Gesetzmäßigkeiten handelt. Vielmehr wird mit Geschwindigkeiten entsprechend denen der Geschosse verfahren werden müssen. Damit stellen sich jedoch sehr große Schwierigkeiten ein. Denn wenn es sich darum handelt, gegen ein ruhendes Geschoßmodell einen solchen Luftstrom längere Zeit wirken zu lassen, so müssen die Strömungslinien der Luft vor dem Modell

genau parallele Richtung besitzen und außerdem muß die Geschwindigkeit der Luft über dem Querschnitt konstant sein. Hierzu sind bedeutende sekundliche Arbeitsleistungen und besondere Vorrichtungen zur Messung der Richtung und Geschwindigkeit der Luft in einem Punkt erforderlich, wobei diese Vorrichtungen selbst die Luftströmungen nicht stören dürfen. Streng genommen müßte auch berücksichtigt werden, daß die modernen Langgeschosse eine rasche Rotation um ihre Längsachse besitzen. Es könnte vielleicht daran gedacht werden, die Komponenten und das Moment des Luftwiderstandes messen zu wollen nicht an einem ruhend aufgehängten Geschosßmodell, gegen das ein Luftstrom von bekannter Geschwindigkeit wirkt, sondern durch mehrmalige photographische Aufnahmen des fliegenden Geschosses selbst, — etwa nach der Methode Neesen oder nach der Methode Duda oder mittels elektrischer Momentphotographie (darüber s. Band III). Dem steht aber der erschwerende Umstand entgegen, daß das rotierende fliegende Langgeschosß sehr rasche Nutationspendelungen in der Luft ausführt und daß infolgedessen der Anstellwinkel  $\alpha$  immer andere und andere Werte annimmt.

Danach muß sich die Ballistik vorläufig mit den besten Messungen am ruhenden und nicht rotierenden Geschosßmodell begnügen, die zur Zeit existieren. Dies sind in Deutschland diejenigen, die L. Prandtl in seinem aerodynamischen Institut in Göttingen auszuführen imstande ist. Uns scheinen die Versuche von L. Prandtl in ballistischer Hinsicht weit wichtiger als alle früheren Versuche und auch weit zuverlässiger als alle in § 12 oben angeführten theoretischen Berechnungen. Die ganze Versuchseinrichtung seines Göttinger Instituts, seine Methode, einen konstanten und wirbelfreien Luftstrom zu erzielen usw., hat L. Prandtl selbst verschiedentlich beschrieben (z. B. Naturwissenschaften, Heft 8, 1922). Die Einzelheiten der Versuche, die er an Geschosßmodellen ausgeführt hat, und deren Ergebnisse zu veröffentlichen, möchten wir ihm selbst überlassen. Es sei jedoch im folgenden ein Beispiel angeführt, das einmal die charakteristische Art der Abhängigkeit der Luftwiderstandsgrößen vom Anstellwinkel  $\alpha$  veranschaulicht und weiterhin zeigen soll, wie man die speziellen Versuchsergebnisse verallgemeinern wird.

Es bezeichne:  $2R$  das Kaliber;  $s$  den Abstand Mitte Geschosßspitze bis Schwerpunkt;  $v$  die Geschwindigkeit des Geschosßschwerpunktes;  $\alpha$  den Anstellwinkel Geschosßachse gegen Bahntangente;  $W_0$  den Luftwiderstand bei geradem Flug (also bei  $\alpha = 0$ ),  $W_1$ ,  $W_2$  die Komponenten des Luftwiderstandes in Richtung bzw. senkrecht zur Bahntangente;  $M$  das Drehmoment des Luftwiderstandes um eine Querschachse durch den Schwerpunkt;  $\delta$  das Luftgewicht;  $\delta_0$  das normale

Luftgewicht. Nach den letzten Ausführungen unter § 10 ist dann

$$W_0 = R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot \lambda_0 \cdot v^2;$$

$\lambda_0$  ist dabei ein von Geschosßform und Geschwindigkeit  $v$  abhängiger Koeffizient. Für Geschosse mit ogivaler Spitze und 2 Kaliber Abbrundungsradius z. B. ist  $\lambda_0$  der in § 10 wiedergegebenen Krupp-Eberhardschen Tabelle zu entnehmen, die für  $\delta_0 = 1,22 \text{ kg/m}^3$  gilt und z. B. für  $v = 150 \text{ m/sec}$  einen Wert von  $\lambda_0 = 1,19 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{sec}^2$  ergibt.

Es wird nun für Komponenten und Momente des Luftwiderstandes der Ansatz gebildet:

$$W_t = W_0 \cdot \lambda_t; \quad W_s = W_0 \cdot \lambda_s; \quad M = W_0 \cdot s \cdot \lambda_m.$$

Und nun wird die Annahme gemacht, daß  $\lambda_t$ ,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_m$  ausschließlich Funktionen von  $\alpha$  sind, ein und dasselbe Geschosß vorausgesetzt. Diese Annahme besagt das Folgende: sind z. B. im Luftkanal für ein bestimmtes Geschosß  $W_t$ ,  $W_s$ ,  $M$  bei einer Geschwindigkeit  $v$  (Relativgeschwindigkeit Luft gegen Geschosß) und bei allen möglichen Werten von  $\alpha$  gemessen, sind also so die  $\lambda_t$ ,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_m$  für eine Geschwindigkeit bestimmt, so findet man die Werte von  $W_t$ ,  $W_s$ ,  $M$  bei einer beliebigen anderen Geschwindigkeit aus dem in obigem Ansatz gegebenen Beziehungen durch Einsetzen der also gefundenen Werte der  $\lambda$ . Daß diese Annahme den tatsächlichen Verhältnissen nicht gerecht wird, unterliegt keinem Zweifel; vielmehr sind die Koeffizienten  $\lambda_t$ ,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_m$  sicherlich auch von  $v$  abhängig; in welcher Weise jedoch, ist noch völlig ungeklärt. Man wird sich also gegenwärtig mit dieser Annahme, daß die Koeffizienten  $\lambda_t$ ,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_m$  ausschließlich von  $\alpha$  abhängen, abfinden müssen. Im übrigen kann man immerhin mit einer gewissen Berechtigung darauf vertrauen, daß die mit  $v \cong 50 \text{ m/sec}$  im Luftkanal gewonnenen Werte der  $\lambda$  zum mindesten für den Bereich der Unterschallgeschwindigkeit Gültigkeit besitzen.

Die im nebenstehenden Kurvenblatt, Abb. 36, wiedergegebenen Werte der Koeffizienten  $\lambda_t$ ,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_m$  sind aus speziellen Versuchswerten nach deren graphi-

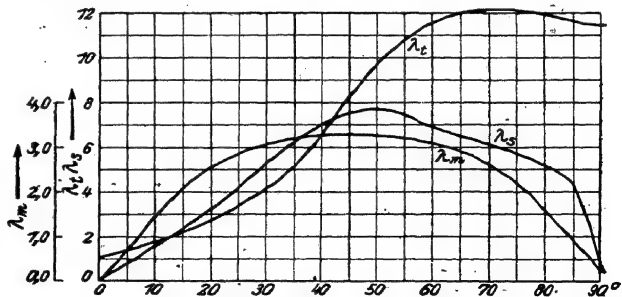


Abb. 36.

Kaliber 250 mm; Länge 1050 mm; ogivale Spitze von 2 Kal. Abbrundungsradius; Abstand  $s$  zwischen Schwerpunkt und Mitte der Geschosßspitze  $s = 430 \text{ mm}$ .

schem Ausgleich gewonnen. Die Versuchswerte sind von Prandtl angegeben für die auf dem Kurvenblatt vermerkten Geschosßdaten und für eine Luftgeschwindigkeit im Luftkanal von  $v = 40,5$  m/sec. Bei Berechnung von  $W_0$  wurde  $\delta = \delta_0$  gesetzt.

Die Richtung der Luftwiderstandsresultanten  $W = \sqrt{W_t^2 + W_s^2}$  bildet übrigens gegen die Geschosßachse einen erheblich größeren Winkel als  $\alpha$ , nämlich den Winkel  $\alpha + \beta$ , wobei  $\beta$  gegeben ist durch  $\tan \beta = W_s : W_t$ . Und der Angriffspunkt der Resultanten auf der Geschosßachse hat vom Schwerpunkt einen Abstand  $a$ , der sich ergibt aus:  $M = W \cdot a \cdot \sin(\alpha + \beta)$ .

Bei den mitgeteilten Versuchen errechnen sich  $(\alpha + \beta)$  und  $a$  zu folgenden Werten:

$\alpha$	0	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	Grad
$\alpha + \beta$	0	38	52	62	69	76	82	87	89	90	97	104	95	Grad
$a = (30,0)^1$	32,2	33,6	32,2	28,9	23,6	19,8	14,8	11,2	9,8	8,4	5,4	0,9	cm	

Die im ersten Teile des § 12 verwendeten Komponenten  $W_p$  und  $W_q$  hängen mit den Komponenten  $W_t$ ,  $W_s$  durch folgende Beziehungen zusammen:

$$W_p = W_t \cdot \cos \alpha - W_s \cdot \sin \alpha; \quad W_q = W_t \cdot \sin \alpha + W_s \cdot \cos \alpha.$$

Über aerodynamische Messungen in Frankreich (Andreu), in Italien (Burzio) und in England (Fowler—Gallop—Lock—Richmond) vgl. die Lit.-Note. Bemerkenswert ist die Arbeit der englischen Forscher, insofern sie einen neuen Weg beschreitet, die Luftwiderstandsgrößen auch bei Überschallgeschwindigkeit zu erhalten. Sie schossen horizontal mit schwach stabilen Geschossen (als günstigster Wert wird ein Stabilitätsfaktor von 1,5 angegeben) und bestimmten aus Scheibendurchschlägen die Rotationsbewegung des Geschosses auf eine kurze Strecke (etwa 200 m) nach dem Verlassen der Geschützöffnung. Die Resultate gestatteten die Berechnung des Luftwiderstandsmoments  $M$  und der Luftwiderstandskomponente  $W_q$  senkrecht zur Geschosßachse. Die Versuche wurden für Geschwindigkeiten bis zur doppelten Schallgeschwindigkeit durchgeführt. (Vgl. auch das unter § 58,8 Gesagte, ferner die früheren Arbeiten von Jansen, Terada und Okochi, vgl. Lit.-Note 57.)

### III. Der Formwert eines Geschosses.

#### § 13. Über die Berechnung der Spitzenkoeffizienten von Geschossen verschiedener Kopfform.

Wird in den Formeln für  $X$ ,  $Z$ ,  $X \cdot \zeta$  von § 12  $\alpha = 0$  gesetzt, so ist damit angenommen, daß die Geschosßachse in der Bahntangente liege. Man hat alsdann in Beziehung auf  $\vartheta$  von 0 bis  $2\pi$  zu integrieren. Es wird somit  $\int \cos \vartheta \cdot d\vartheta$  und damit  $X$  und  $X \cdot \zeta$  zu Null (der Wert von  $\zeta$  strebt jedoch einem endlichen Grenzwert zu, den man erhält, wenn man  $\zeta$  zunächst für einen endlich kleinen Winkel  $\alpha$  berechnet und dann erst  $\alpha = 0$  setzt).

<sup>1)</sup> Durch Extrapolation.

Es bleibt somit nur der Widerstand  $Z$  in Richtung der  $z$ -Achse, der Geschoßachse, übrig. Da jetzt  $\cos \omega = -\frac{d\rho}{ds}$  ist, so hat man, wenn man statt  $\rho$  die Bezeichnung  $x$  einführt, den folgenden Ausdruck für den Luftwiderstand  $W$  in Richtung der Geschoßachse für den Fall, daß diese Achse in der Bahntangente liegt:

$$W = 2\pi\kappa \cdot \int \left(\frac{dx}{ds}\right)^m \cdot x \cdot dx, \quad \text{wobei} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} \text{ ist.}$$

Dabei ist  $\kappa(v)$  der Widerstand gegen die Flächeneinheit bei senkrechter Bewegung und bei der betreffenden Geschwindigkeit  $v$  des Geschoßschwerpunkts. Mit  $m=2$  ist die Newtonsche, mit  $m=1$  die Lösslsche Annahme eingeführt.

Über die Unsicherheit der Berechnungen gilt das oben Gesagte.

Beispiele. 1. Geschoß, bestehend aus einem Kreiszylinder vom Kaliber  $2R$ , mit aufgesetztem Kegelstumpf von der Höhe  $h$  und dem Radius  $a$  des Stirnkreises. Annahme  $m=1$  (Lössl.-Groß). Der Widerstand  $W_1$  der Mantelfläche in

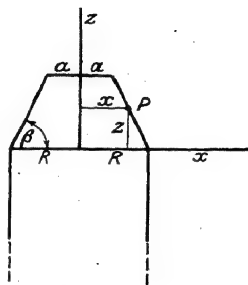


Abb. 37.

Richtung der Geschoßachse ist  $W_1 = 2\pi\kappa \cdot \int_{z=R}^{z=R} \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$  wobei

$$x - a = (h - z) \cdot \operatorname{ctg} \beta; \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{R - a}{h}.$$

$$dx = -\operatorname{ctg} \beta \cdot dz; \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\cos \beta},$$

somit

$$W_1 = 2\pi\kappa \cdot \cos \beta \cdot \int x \cdot dx = \kappa\pi(R^2 - a^2) \cos \beta.$$

Dazu kommt der Widerstand  $W_2 = \kappa a^2 \pi$  der ebenen Stirnfläche.

Der Gesamtwiderstand ist  $W = W_1 + W_2$ ; dieser ist gegenüber dem Widerstand  $\kappa R^2 \pi$  des senkrecht abgeschnittenen Zylinders vom Kaliber  $2R$  kleiner im Verhältnis

$$\cos \beta \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) + \frac{a^2}{R^2} \text{ zu } 1.$$

2. Ogivalgeschoß vom Abrundungsradius  $= n$  Halbkaliber. Annahme  $m=1$  (Lössl).  $AC$  sei der erzeugende Kreisbogen des Ogivals, Mittelpunkt  $O_1$ ,  $P$  ein beliebiger Punkt ( $xz$ ) des Kreisbogens. Es empfiehlt sich, statt  $x$  den Zentriwinkel  $\angle AO_1P = \varepsilon$  als unab-

hängige Veränderliche einzuführen. Dabei ist

$$O_1 P \cdot \cos \varepsilon = O_1 D = O_1 A - AD, \quad \text{also} \quad nR \cos \varepsilon = nR - (R - x),$$

$$x = nR \left( \cos \varepsilon - \frac{n-1}{n} \right); \quad dx = -nR \cdot \sin \varepsilon \cdot d\varepsilon; \quad ds = nR \cdot d\varepsilon;$$

also

$$W = 2\pi\kappa \int \frac{dx}{ds} \cdot x \cdot dx$$

$$= 2\pi\kappa \cdot \int \frac{nR \cdot \sin \varepsilon \cdot d\varepsilon}{nR \cdot d\varepsilon} \cdot nR \cdot \left( \cos \varepsilon - \frac{n-1}{n} \right) \cdot nR \sin \varepsilon \cdot d\varepsilon$$

$$= 2\pi\kappa R^2 n^2 \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\gamma} \sin^2 \varepsilon \left( \cos \varepsilon - \frac{n-1}{n} \right) d\varepsilon.$$

$$W = \kappa R^2 \pi n^2 \left( \sin \gamma - \frac{1}{3} \sin^3 \gamma - \gamma \cdot \cos \gamma \right).$$

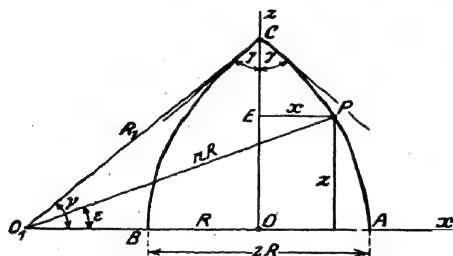


Abb. 38.

Dabei ist der Winkel  $\gamma$  als der Grenzwinkel  $\angle O_1 C$  bestimmt durch

$$\cos \gamma = \frac{nR - R}{nR} = \frac{n-1}{n}.$$

Bei diesem Anlaß sei erwähnt, daß für solche Ogivalgeschosse (Panzergranaten) die Kennzeichnungen durch den halben Ogivalwinkel  $\gamma$  an der Spitze, ferner durch die Kopfhöhe  $OC = h$ , endlich durch den Abrundungsradius

$R_1 = O_1 C = nR$ , folgendermaßen zusammenhängen:

$$\cos \gamma = \frac{n-1}{n}, \quad \sin \gamma = \frac{h}{R_1}, \quad \left( \frac{h}{2R} \right)^2 = \frac{R_1}{2R} \cdot \frac{1}{4}$$

so daß gleichwertig sind z. B. die Angaben:

Abrundungsradius in Kalibern:	$\frac{R_1}{2R} =$	0,5	1	1,5	2	3
oder Kopfhöhe in Kalibern:	$\frac{h}{2R} =$	0,5	0,866	1,118	1,323	1,658
oder halber Ogivalwinkel:	$\cos \gamma =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
	(Halbkugel)					
	$\gamma$	90°	60°	48° 11'	41° 25'	33° 34'
	(Halbkugel)					

Derartige Berechnungen für verschiedene Geschöskopfformen haben W. Groß auf Grund der Lösslschen Annahme und Ingalls

mit Zuhilfenahme des Ducheminschen Gesetzes, ferner neuerdings A. Sjöhwist mittels der Gesetze von v. Lössl, von Riabouchinsky und von Hamilton in größerer Anzahl durchgeführt (vgl. Lit. Note).

Hélie (Frankreich) nahm an, daß der Spitzenkoeffizient  $i$  von Ogivalgeschossen mit dem Sinus des halben Ogivalwinkels  $\gamma$  an der Spitze zu- und abnehme; dies soll durch zahlreiche Versuche bestätigt sein. A. Hamilton (Nordamerika) gibt dagegen an, es sei festgestellt, daß der  $i$ -Wert eines Geschosses proportional sei dem Mittelwert aus dem Sinus derjenigen Winkel, die die Tangenten an das Ogival in den verschiedenen Punkten gegenüber der Geschosfachse bilden. Danach würden sich die  $i$ -Werte zweier Geschosse umgekehrt wie die Oberflächen der Geschosspitzen verhalten. Wenn man  $i = 1$  wählt für ein Ogival mit 2 Kal. Abrundungsradius, so würde danach für  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$  Kal. Abrundung  $i$  resp. = 1,00; 0,82; 0,71; 0,64; 0,58; 0,54 sein. Daß die erwähnten Voraussetzungen bis jetzt nicht in aller Strenge als allgemein gültig durch den Versuch bewiesen sein können, soll weiter unten gezeigt werden.

In der folgenden Tabelle ist der spezifische Widerstand von Geschossen gleichen Kalibers, aber verschiedener Kopfform, also  $W: R^2 \pi x$ , der Widerstand des Geschoskopfes im Vergleich zu dem Widerstand  $R^2 \pi x$  des senkrecht abgeschnittenen Zylinders vom gleichen Kaliber, bezogen auf dieselbe Geschosgeschwindigkeit gegeben, wie er sich auf Grund der Elementargesetze von v. Lössl, Duchemin und Newton berechnet:

Kopfhöhe in Kalibern	oder (speziell bei Ogivalgeschossen) Abrundungsradius in Kalibern	Ogivale Kopfform			Kegelförmige Kopfform		
		Gesetz von F. v. Lössl (W. Groß)	Gesetz von Duchemin (Ingalls)	Gesetz von Newton (Kummer usw.)	Gesetz von F. v. Lössl (W. Groß)	Gesetz von Duchemin (Ingalls)	Gesetz von Newton (Kummer usw.)
0,5	0,5 (Halbkugel)	0,666	0,858	0,500	0,707	0,943	0,500
0,866	1	0,504	0,752	0,292	0,500	0,800	0,250
1,118	1,5	0,419	0,675	0,204	0,409	0,663	0,167
1,323	2	0,366	0,617	0,156	0,353	0,628	0,125
1,5	2,5	0,331	0,571	0,127	0,317	0,575	0,100

Dies ist der errechnete Spitzenkoeffizient  $i$ , falls dieser Koeffizient für den senkrecht abgeschnittenen Zylinder = 1 genommen wird.

Wie man sieht, stimmen die mit den einzelnen Gesetzen als Elementargesetzen erhaltenen Zahlenwerte für dieselbe Kopfform recht wenig überein. Neuerdings hat A. Sjöhwist für verschiedene Spitzenhöhen die Spitzenwerte nach v. Lössl, nach Riabouchinsky und nach Hamilton berechnet, und zwar für ogivale, für parabolische und für konische Form der Geschosspitze und damit die nachstehende Tabelle erhalten. Es zeigt sich daraus, daß mit den drei Annahmen fast dieselben Spitzenwerte bei ogivaler Spitze erhalten werden, daß dagegen bei parabolischer und bei konischer Spitzenform die Ergebnisse bedeutend voneinander abweichen. Aus der Vergleichung der theo-



retisch errechneten und der durch Schießversuche erhaltenen Formwerte schließt er, daß im allgemeinen nach v. Lössl die zuverlässigsten Spitzenwerte erhalten werden.

Spitzen- höhe  in Kal.	bei ogivaler Spitze Abrundungsradius der Spitze  in Kal.	Ogivale Spitze			Parabolische Spitze			Konische Spitze		
		nach v. Lössl	nach Riabouchinsky	nach Hamilton	nach v. Lössl	nach Riabouchinsky	nach Hamilton	nach v. Lössl	nach Riabouchinsky	nach Hamilton
0,500	0,500	1,825	1,361	1,910	1,693	1,362	2,251	1,937	1,525	2,700
0,750	0,813	1,510	1,270	1,536	1,315	1,187	1,683	1,521	1,525	2,119
1,000	1,250	1,249	1,156	1,254	1,068	1,019	1,326	1,225	1,525	1,708
1,118	1,500	1,148	1,099	1,149	0,981	0,952	1,166	1,118	1,515	1,555
1,250	1,813	1,052	1,035	1,049	0,896	0,885	1,088	1,019	1,488	1,418
1,323	2,000	1,000	1,000	1,000	0,858	0,851	1,035	0,970	1,467	1,350
1,500	2,500	0,907	0,921	0,896	0,773	0,778	0,920	0,866	1,408	1,208
1,750	3,313	0,789	0,823	0,780	0,679	0,694	0,796	0,751	1,314	1,049
2,000	4,250	0,699	0,740	0,691	0,605	0,625	0,701	0,666	1,220	0,927
2,250	5,313	0,630	0,671	0,618	0,542	0,568	0,625	0,595	1,132	0,829
2,500	6,500	0,573	0,612	0,560	0,496	0,520	0,565	0,534	1,052	0,749
2,750	7,813	0,518	0,563	0,510	0,455	0,480	0,515	0,490	0,991	0,684
3,000	9,250	0,474	0,518	0,470	0,419	0,445	0,472	0,449	0,915	0,627

In der Tabelle sind die Werte für ogivale Spitzen von 2 Kal. Abrundungsradius = 1 genommen. Wie große Beträge der Gewinn an Schußweite durch schlanke Form der Spitze annehmen kann, zeigt Sjöhwist z. B. durch Berechnungen der Schußweiten eines Geschosses von 15 cm Kaliber, 385,6 kg Gewicht,  $v_0 = 920$  m/sec; bei dem Abgangswinkel  $\varphi = 15^\circ$  wird mit ogivaler Spitze von 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 Kal. Abrundungsradius ein Schußweitengewinn (der Rechnung zufolge) von bzw. 0; 11; 19; 25; 31; 35; 39 % erzielt.

Laboratoriumsversuche mit kleinen Geschwindigkeiten liegen in größerer Anzahl vor. Z. B. erhielten Borda, Hutton und Vince folgende Ergebnisse. Der Widerstand gegen eine Halbkugel verhält sich zu demjenigen gegen die ebene Durchmesserfläche durchschnittlich wie 0,407 : 1 (Borda 0,405 : 1; Hutton 0,418 : 1; Vince 0,403 : 1); ferner verhält sich der Widerstand eines Kreiskegels von resp.  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $51^\circ 24'$  Kegelöffnung zu dem Widerstand gegen die ebene Grundfläche resp. wie 0,691, 0,543, 0,433 zu 1.

Didion gelangt bei Versuchen mit axial bewegten Zylindern von 10 cm Höhe, auf die ein Kreiskegel von resp. 1; 1,5; 2; 3; 4 Halbkalibern Höhe, endlich eine Halbkugel aufgesetzt war, zu dem Ergebnis, daß in diesen sechs Fällen die Widerstände untereinander sich resp. wie 73,26; 53,99; 47,74; 44,29; 40,96 und (bei der Halbkugel) 43,03 verhalten. Für Kugeln, die mit ca. 9 m/sec

Geschwindigkeit bewegt wurden, erhielt er  $W(\text{kg}) = 0,0275 \cdot \delta \cdot R^2 \pi v^2$ ;  $\delta$  Luftgewicht in  $\text{kg}/\text{cbm}$ ;  $R^2 \pi$  Querschnitt in  $\text{qm}$  und  $v$  Geschwindigkeit in  $\text{m}/\text{sec}$ .

A. Frank ermittelte 1906 für sehr verschiedene Körperformen auf Grund von Versuchen die Zahlenwerte für den Luftwiderstand bei kleinen Geschwindigkeiten (vgl. Lit. Note). Endlich wurde F. v. Lössl bei seinen Versuchen zu dem Ergebnis geführt, daß der Widerstand eines axial bewegten Kegels von der halben Öffnung  $\alpha$  zu dem Widerstand gegen die ebene Grundfläche sich wie  $0,83 \cdot \sin \alpha$  zu 1 verhalte (mit dem als Elementargesetz verwendeten Lösslschen Gesetz erhält man durch Rechnung das Verhältnis  $1 \cdot \sin \alpha$  zu 1). Ferner ist nach seinen Versuchen der Widerstand einer Kugel  $\frac{1}{4}$  des Widerstands gegen die ebene Durchmesserfläche (durch Rechnung wird auf Grund des Lösslschen Gesetzes genau das Doppelte, nämlich  $\frac{1}{2}$  erhalten, s. o.).

Dies deutet darauf hin, daß jene Gesetze wohl überhaupt nicht als Elementargesetze gelten können. Aber auch abgesehen davon können die Versuche mit Geschwindigkeiten bis etwa  $10 \text{ m}/\text{sec}$  aufwärts für die Ballistik nicht entscheidend sein.

Auf Grund deutscher Schießversuche sollen sich nach W. Heydenreich die Formwerte von Ogivalgeschossen mit resp.

0,5	0,7	1	1,5	2	3	4	6	8	Kal. Abrundungs- radius etwa wie verhalten,
1350	1200	1100	1000	950	850	800	700	650	

und diese Formwerte sollen, bei sonst gleichen Umständen, „unmittelbar von einem Geschoß auf ein anderes unabhängig vom Kaliber übertragen werden können“.

Seinen weiteren Ausführungen zufolge scheint W. Heydenreich selbst die Zuverlässigkeit obiger Zahlen als erschossener Formwerte und die allgemeine Übertragbarkeit eines Formwerts von einem Geschoß auf ein anderes in Zweifel zu ziehen. Es soll im folgenden gezeigt werden, wie die Formwerte in der Regel erschossen wurden und weshalb eine so gewonnene Zahl mehr einen Koeffizienten für den gegenwärtigen Stand der ballistischen Wissenschaft, einen „Koeffizienten unserer Unkenntnis“, als einen eigentlichen und übertragbaren Formwertfaktor vorstellt.

### Kritische Bemerkungen über das bisher meist übliche „Erschießen“ von Formwerten.

Das Erschießen des Spitzenkoeffizienten  $i$  ging bisher meist folgendermaßen vor sich: Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , die Schußweite  $X$ , der Abgangswinkel  $\varphi$  und das Tagesluftgewicht  $\delta$  werden beobachtet. Aus einer der Näherungslösungen des ballistischen Problems (vgl. 4. bis 7. Abschnitt) und aus der Kenntnis des Geschoßkalibers  $2R$  und Geschoßgewichts  $P$  erhält man das Produkt  $i\beta$ . Hier ist  $\beta$  ein Ausgleichsfaktor, der dazu dienen soll, den bei der Integration der Differentialgleichungen des ballistischen Problems begangenen Fehler auszugleichen. Durch Division mit  $\beta$  gewinnt man den  $i$ -Wert im Vergleiche zu einem Normalwert  $i = 1$ , der in bestimmter Weise definiert sein muß, aber sonst willkürlich ist.

a) Wenn man nun für irgendein Geschoß auf Grund derselben Werte  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $X$ ,  $2R$ ,  $P$ ,  $\delta$  den  $i$ -Wert mittels zweier verschiedener Lösungssysteme berechnet, die auf denselben Luftwiderstandsgesetzen basiert sind, so erhält man nicht immer denselben Wert; man kann Unterschiede bis zu 13% wahrnehmen. Der Grund liegt darin, daß der Ausgleich des Integrationsfehlers bei den verschiedenen Lösungssystemen mehr oder weniger gut gelungen ist (vgl. § 41).

Aber auch innerhalb desselben Lösungssystems (z. B. Siacci II) sind für die verschiedenen Abgangswinkel  $\varphi$  und Schußweiten  $X$  die Fehler in den betreffenden Werten  $\beta$  nicht durchweg gleich groß, ohne daß man übrigens genaue Kenntnis darüber hätte, ob  $\beta$  zu groß oder zu klein berechnet wurde und um wieviel. Rechnet man also z. B. grundsätzlich mit Siacci II, entnimmt dabei  $\beta$  aus der  $\beta$ -Tabelle, sieht dieses  $\beta$  als genau richtig an und ermittelt damit  $i$ , so verlegt man einen Teil des Fehlers von  $\beta$ , also einen Teil des Integrationsfehlers auf den  $i$ -Wert. Zu einem ersten Teile liegt somit die Ungenauigkeit der Bestimmung von  $i$  in dem mathematischen Integrationsverfahren.

b) Ferner ist, wie erwähnt, der Luftwiderstand nicht genau proportional mit dem Querschnitt des Geschosses. Bei der oben angedeuteten Berechnung des Spitzenkoeffizienten  $i$  wird aber diese Proportionalität angenommen. Folglich entsteht wiederum ein Fehler. Auch dieser Fehler wird bei der Rechnung zu einem Teil auf den  $i$ -Wert verlegt. Je mehr nun zwei der Spitzenform nach ähnliche Geschosse dem Kaliber nach sich unterscheiden, um so mehr wird der Umstand, daß Widerstand und Querschnitt einander nicht proportional sind, sich in dem berechneten Werte  $i$  geltend machen können.

c) Das Luftgewicht  $\delta$  ist tatsächlich variabel, weil von der Flughöhe  $y$  des Geschosses abhängig. Bei der Berechnung aber wurde das Luftgewicht vielfach konstant angenommen, nämlich entweder gleich demjenigen am Boden oder besser gleich einem mittleren Luftgewicht; also entspringt hieraus wiederum ein Fehler, der teilweise auf den Koeffizienten  $i$  abgeführt wird. Auch der entlang der Bahn auf das Geschöß wirkende und tatsächlich variable Wind wurde bisher entweder überhaupt nicht oder nur näherungsweise in Rechnung gestellt. Dieser Umstand führt ebenfalls von einer Bahn zu andern am gleichen Schießtag, sowie von einem Schießtag zum andern bei gleichen Bahnen eine Veränderlichkeit der  $i$  Werte herbei; nur wenn es gelingt, den Windeinfluß durch besondere Maßnahmen empirisch auszuschalten (Schießen abwechselnd in Richtung des Winds und entgegen dem Wind, oder Schießen nach 4 zueinander senkrechten Richtungen usw.) sind die  $i$ -Werte gleichmäßiger.

d) Der Widerstand ist, wie oben nachgewiesen wurde, auch nicht genau proportional einem einzigen Koeffizienten, vielmehr ist die Abhängigkeit des Widerstandes von der Form eine weit verwickeltere. Bei der Berechnung des Wertes  $i$  wird jene Proportionalität als genau gültig vorausgesetzt.

Es seien für dasselbe Geschöß und dieselbe Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und dasselbe Luftgewicht  $\delta$ , jedoch für mehrere Schußweiten  $X$  die zugehörigen Abgangswinkel  $\varphi$  gemessen, so kann man bei jeder einzelnen der betreffenden Flugbahnen dieses Geschosses seinen  $i$ -Wert in der erwähnten Weise berechnen. Dabei zeigt es sich aber häufig, daß die Reihe der so erhaltenen Werte nicht konstant ist, wie man früher wohl erwarten mochte, sondern zu- oder abnimmt.

Wenn die Lösung des ballistischen Problems eine vollkommene wäre, und wenn die Längsachse des Geschosses stets in der Flugbahntangente bliebe, was eine der Voraussetzungen von Abschnitt 4—7 bildet, müßten notwendig sämtliche  $i$ -Werte einander gleich sein, da ja die Form des Geschosses bei dessen Flug durch die Luft sich nicht ändert. Tatsächlich ändert sich jedoch der errechnete  $i$ -Wert, und zwar z. B. bei einigen neueren Infanteriegeschossen von einer Flugbahn zur andern ziemlich stark.

Die Ursache für diese Änderung der Formkoeffizienten liegt erstens darin, daß der Fehler in dem Ausgleichsfaktor  $\beta$  bei den verschiedenen Flugbahnen desselben Geschosses verschieden groß ist, zweitens darin, daß die Veränderlichkeit von  $i$  mit der Form und der Geschwindigkeit (s. o.) nicht oder nicht

genügend berücksichtigt wurde, drittens aber auch darin, daß die Geschosse zum Teil kräftige Pendelungen in der Luft ausführen (Näheres s. 9. Abschnitt). Im letzteren Falle trifft das angewendete Rechnungsverfahren noch weniger genau zu, da die Berechnung der Flugbahn mit Berücksichtigung der Geschöspendelungen hätte durchgeführt werden müssen (was freilich bis jetzt nicht in befriedigender Weise möglich ist). Wenn also dies nicht geschieht, wenn vielmehr das betreffende Näherungsverfahren auch hier angewendet wird, so muß sich der hieraus entstehende Fehler in einer scheinbaren Veränderlichkeit des Spitzenkoeffizienten zeigen, der dann gleichzeitig ein Stellungenkoeffizient ist.

Umgekehrt darf aber nicht ohne weiteres diese Veränderlichkeit als das quantitative Maß für die Pendelungsgröße betrachtet werden.

Aus den angeführten Gründen kann nicht mit Bestimmtheit behauptet werden, daß die in jener Weise erschossenen  $\alpha$ -Werte die wahren Formwerte darstellen und noch weniger, daß sie von einem Geschöß auf ein anderes unmittelbar übertragen werden dürfen.

#### § 14. Über die Berechnungen bezüglich der günstigsten Spitzenform des Geschosses. Sogen. Augustsche Geschößspitze.

Die Behandlung der Aufgabe, denjenigen Umriss der Geschößspitze zu bestimmen, bei dem der Gesamtwiderstand eines in Richtung seiner Längsachse mit gegebener Geschwindigkeit sich bewegenden Geschosses ein Minimum wird, geht auf Newton zurück. In der Abbildung ist die Längsachse des Geschosses als  $x$ -Achse genommen, senkrecht dazu steht die  $y$ -Achse. Gegeben ist das Halbkaliber  $R = BB_1 = CC_1$  und entweder die Höhe  $h = AB = x_1 - x_0$  des Geschößkopfes oder die ebene Stirnfläche  $y_0^2 \cdot \pi$  oder beides. Die Stirnfläche habe den Abstand  $x_0$  vom Koordinatenanfang  $O$ . Es handelt

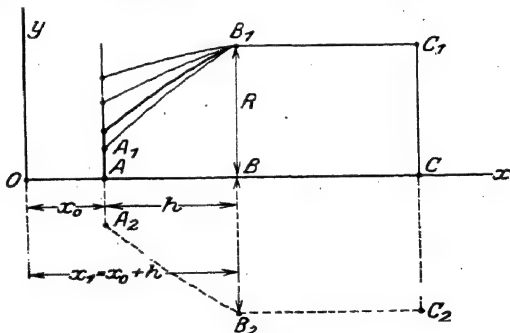


Abb. 39.

sich darum, die Meridiankurve  $A_1 B_1$  zu ermitteln, die bei ihrer Rotation um die  $x$ -Achse den kleinsten Widerstand in der Richtung der  $x$ -Achse gibt, wenn das Geschöß mit gegebener Geschwindigkeit  $v$  in der Richtung  $CA$  in ruhender Luft sich bewegt oder wenn die Luft mit derselben relativen Geschwindigkeit in der Richtung  $AC$  gegen den Geschößkopf heranströmt. Dabei möge wieder  $\kappa(v)$  den Widerstand der senkrecht zu ihrer Fläche bewegten Flächeneinheit bedeuten. Man soll den Widerstand gegen den gesamten Geschößkopf  $B_1 A_1 A_2 B_2$  berechnen und zu einem Minimum werden lassen.

Eliegt hier eine Aufgabe der Variationsrechnung vor. Ohne Ableitung sei das Folgende vorausgeschickt. Wenn es sich darum handelt, diejenige Funktion  $y$  von  $x$  (Kurve  $A_1B_1$ ) zu bestimmen, für die das gegebene bestimmte Integral  $\int_a^b F(x, y, y', y'' \dots) dx$  ein Extremum werden soll, so ist die Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots \quad (1)$$

zu integrieren. Die Integrationskonstanten werden in den einzelnen bestimmten Fällen folgendermaßen berechnet.

Sind erstens die Enden  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  des betreffenden Kurvenstückes fest gegeben, so muß für  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  und für  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  sein.

Ist der eine Endpunkt  $(x_1, y_1)$  fest, wie hier der Punkt  $B_1$  fest gegeben ist, soll dagegen der andere Endpunkt  $(x_0, y_0)$  auf einer Parallelen zur  $x$ -Achse verschiebbar sein, d. h. soll das gesuchte Kurvenstück von einem festen Punkt  $(x_1, y_1)$  bis zu einer Parallelen  $y = y_0$  zur  $x$ -Achse verlaufen und dort endigen, so muß für  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  und für  $y = y_0$ ,  $F - y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  sein, woraus die Konstanten zu berechnen sind.

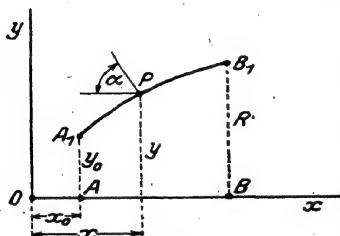


Abb. 40.

Es sei  $A_1B_1$  das fragliche Kurvenstück;  $P$  ein beliebiger Punkt desselben und  $ds$  ein Kurvenelement bei  $P$ . Durch Rotation des Elementes  $ds$  um die  $x$ -Achse entsteht ein unendlich schmaler Gürtel vom Flächeninhalt  $2\pi y \cdot ds$  als Element  $df$  der Mantelfläche des Geschosßkopfes. Ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung ( $x$ -Achse) und der Normalen zum Flächenelement, so ist bei Annahme des Newtonschen Gesetzes

$$\kappa \cdot df \cdot \cos^2 \alpha$$

oder  $\kappa \cdot 2\pi y ds \cdot \left( \frac{dy}{ds} \right)^2$  der Widerstand für das Flächenelement, gerichtet in der Normalen zu  $df$ . Die Komponente entlang der  $x$ -Achse ist  $\kappa 2\pi y ds \cdot \left( \frac{dy}{ds} \right)^3$  oder  $2\pi \kappa \cdot y dy \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2}$ . Es sei weiterhin  $\frac{dx}{dy}$

oder  $x'$  mit  $q$ ,  $\frac{dy}{dx}$  oder  $y'$  oder  $\frac{1}{q}$  mit  $p$  bezeichnet. Dann ist die Summe der  $x$ -Komponenten aller Widerstände gegen die krumme Oberfläche des Geschosßkopfs

$$W = 2\pi \kappa \cdot \int_{y=y_0}^{y=R} \frac{y \cdot dy}{1 + x'^2} = 2\pi \kappa \int_{y_0}^R \frac{y \cdot dy}{1 + q^2} \quad (2)$$

Hier ist  $y$  die unabhängige Variable, und die Funktion unter dem Integral ist  $\psi(y, x') = \frac{y}{1+x'^2} = \frac{y}{1+q^2}$ . Soll also obige Regel (1) der Variationsrechnung angewendet werden, so ist zu berücksichtigen, daß jetzt  $x$  und  $y$  ihre Rollen vertauscht haben, d. h. es ist die Differentialgleichung zu integrieren:  $0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right) + \dots$  Da in der Funktion  $\psi$  nur  $y$  und  $x'$ , aber nicht  $x$  vorkommt, so ist  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ , somit  $0 = \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right)$ ;  $\frac{\partial \psi}{\partial x'} = \text{const.}$  Nun ist  $\frac{\partial \psi}{\partial x'} = \frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{-2qy}{(1+q^2)^2}$ , also  $\frac{-2qy}{(1+q^2)^2} = \text{const.} = -2C$ ;  $y = C \frac{(1+q^2)^2}{q}$ . Ferner

$$dx = q \cdot dy = q \cdot C \cdot \frac{4q^2(1+q^2) - (1+q^2)^2}{q^3} \cdot dq$$

oder

$$\frac{dx}{C} = \left( 2q + 3q^3 - \frac{1}{q} \right) \cdot dq.$$

Also ist die Lösung der Aufgabe vorläufig in dem simultanen System gegeben

$$\left. \begin{aligned} x &= C \left( \frac{3}{4} q^4 + q^2 - \lg q + C_1 \right) \\ y &= \frac{C}{q} (1 + q^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dies ist die Kurvengleichung, in der Form  $x = f_1(q)$ ,  $y = f_2(q)$  mit dem Parameter  $q$ ; nach Ermittlung von  $C$  und  $C_1$  läßt sich somit die Kurve diskutieren und punktweise zeichnen. Es zeigt sich allgemein, daß die Kurve einen Rückkehrpunkt  $S_1$  und zwei Asymptoten besitzt; die erste parallel der  $x$ -Achse, die zweite parallel der  $y$ -Achse; der erste und untere Ast der Kurve geht von  $p = \sqrt{3}$  bis  $p = 0$ ; der zweite und obere von  $p = \sqrt{3}$ , d. h. vom Rückkehrpunkt  $S_1$  ab bis  $p = \infty$ . Hier kommt, wie sich später zeigen wird, allein der erste Zweig  $S_1 B_1$  in Betracht.

Was nun die Bestimmung der Konstanten  $C$  und  $C_1$  betrifft, so ist die erste Bedingung jedenfalls, daß für  $x = x_1$ ,  $y = R$  sein muß, weil der GeschöBkopf die direkte Fortsetzung des zylindrischen Teils bilden soll. Eine zweite Bedingung suchten sich N. von Wuich (1882) und später August (1888) durch die Überlegung zu verschaffen, daß die obere Stirnfläche  $A_1 A_2$  möglichst klein sein, also die Ordinate  $SS_1$  des Rückkehrpunktes  $S_1$  den Radius  $AA_1$  des Stirnkreises für den vorderen ebenen Abschluß des Geschosses bilden soll. Wie aus  $\frac{dy}{dq} = 0$  leicht zu sehen ist, hat die Kurvenordinate  $y$  ihren kleinsten Wert für  $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , oder  $p = \sqrt{3}$ , d. h. im Rückkehrpunkt  $S_1$ ,

dort ist der Winkel zwischen der Tangente und der  $x$ -Achse  $= 60^\circ$ . Somit sind die beiden Bedingungen für die Berechnung von  $C$  und  $C_1$  die folgenden: für  $x = x_0 + h$  muß  $y = R$ ; für  $x = x_0$   $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$  sein. Aber damit läßt sich überhaupt kein Extremum erhalten. Denn die Grenzbedingung lautet jetzt: für  $x = x_0$  muß sein  $\psi - q \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0$ , wo  $\psi = \frac{y}{1+q^2}$  ist; dies gibt  $\frac{y}{1+q^2} - q \cdot \frac{-2qy}{(1+q^2)^2} = 0$  oder  $q^2 = -\frac{1}{3}$ ; d. h. die Kurve liefert kein Extremum. In der Tat ist der Luftwiderstand gegen die krumme Fläche allein für sich um so kleiner, je mehr sich diese Fläche einem Zylinder nähert.

Auf den Fehler in der Augustschen Lösung haben Armanini und Lampe aufmerksam gemacht. Letzterer wies zahlenmäßig nach, daß bei gleichem Kaliber  $2R$  des zylindrischen Geschossteils und bei gleicher Kopfhöhe  $h$  für die Form der Mantelfläche des Geschoskopfes eine hyperboloidische Rotationsfläche mit ebener Stirnfläche gefunden werden kann, die einen noch etwas kleineren Widerstand geben würde als die Augustsche Fläche.

Der Fehler der Augustschen Rechnung liegt darin, daß der auf die ebene Stirnfläche  $A_1 A_2$  entfallende Teil des Widerstandes nicht in der richtigen Weise eingerechnet ist. Der Gesamtwiderstand gegen die krumme Oberfläche des Geschoskopfes und gegen die Stirnfläche soll ein Minimum werden; und bei der Variation des Endpunktes  $A_1$  auf der Parallelen zur  $y$ -Achse ändert sich nicht nur die Meridiankurve  $A_1 B_1$ , sondern auch die Stirnfläche  $AA_1^2 \cdot \pi$  oder  $y_0^2 \pi$ . Es ist also folgendermaßen zu verfahren:

Der ganze Widerstand gegen den Geschoskopf ist

$$W = 2\pi\kappa \cdot \left[ \int_{y=0}^{y=y_0} \frac{y \cdot dy}{1+q^2} \right]_{\text{für } q=0} + 2\pi\kappa \cdot \int_{y=y_0}^{y=R} \frac{y \cdot dy}{1+q^2}. \quad (4)$$

Hier bedeutet der erste Teil den Widerstand gegen die ebene Stirnfläche, entlang deren  $q = 0$  ist, da die Stirnfläche senkrecht zur  $x$ -Achse steht; der zweite Teil den Widerstand gegen die krumme Oberfläche des Geschoskopfes.

Das erste Integral sei in zwei Teile zerlegt:  $\int_0^{y_0} = \int_0^R + \int_R^{y_0} = \int_0^R - \int_{y_0}^R$ , ist also gleich  $\int_0^R \frac{y \cdot dy}{1+0} - \int_{y_0}^R \frac{y \cdot dy}{1+0} = \frac{R^2}{2} - \int_{y_0}^R y \cdot dy$ . Ein Minimum soll folglich werden





von  $W$  vorliegt, erkennt man aus der zweiten Variation:  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$  wird  $= \frac{2y(1-3q^2)}{(1+q^2)^3}$ . Da derjenige Zweig der Kurve in Betracht gezogen ist, dessen Asymptote parallel der  $x$ -Achse ist, und da die Kurve vom Punkt  $B_1$  bis zum Punkt  $A_1$  mit Tangentenneigung  $45^\circ$  reicht, so ist  $y$  positiv, und ist  $3q^2 > 1$ , also ist  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$  negativ, das Integral ein Maximum. (In aller Strenge hat Kneser die Extremumseigenschaften untersucht.)

### Kritische Bemerkungen zu vorstehender Lösung des Problems.

Schwerwiegender als der rein mathematische Fehler, der bei der Augustschen Berechnung der günstigsten Spitzenform begangen ist, dürfte die Tatsache sein, daß eine Reihe von Umständen durch obige Theorie teils nicht, teils in ganz unsicherer Weise einbezogen ist.

a) Es ist unwahrscheinlich, daß das Newtonsche Gesetz überhaupt ein Elementargesetz ist und daß es für die hier in Betracht kommenden großen Geschwindigkeiten Anwendung finden darf.

b) Der Normalwiderstand eines Flächenelements  $df$  ist nicht nur abhängig von  $\kappa \cdot df$  und  $\alpha$ , also nicht genau gleich  $\kappa \cdot df \cdot \cos^2 \alpha$  (s. oben), sondern nach § 8 wahrscheinlich noch eine Funktion der Entfernung  $y$  des Flächenelements von der Geschoßlängsachse, überhaupt noch eine Funktion der ganzen Geschoßform. Diese Abhängigkeit ist jedoch nicht bekannt.

c) Die Form des Geschosses geht implizit in die Luftwiderstandsfunktion  $\kappa(v)$  ein. Die Einflüsse der Reibung — parallel, und da das Geschöß rotiert, auch senkrecht zu den Mantellinien des Geschosses —, sowie die Wellen- und Wirbelbildung sind völlig unberücksichtigt.

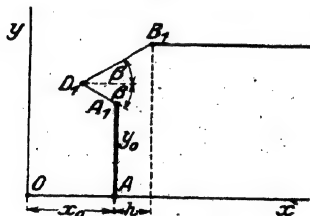


Abb. 42.

Zu welchen Ungereimtheiten obige Theorie führt, wenn das Abfließen der Luft am Geschöß, die Wellen- und Wirbelbildung, nicht in Rechnung gezogen wird, zeigt folgende Schlußfolgerung: Man lasse die bisher stillschweigend benutzte, jedoch in der Aufgabe nicht liegende Voraussetzung fallen, daß für die gesuchte Kurve  $y = f(x)$  der erste

Differentialquotient durchweg stetig sein müsse, nehme die Ordinate  $y_0$  des Anfangspunktes  $A_1$  beliebig an und denke sich zwischen den Punkten  $A_1$  und  $B_1$  als Umriß der krummen Oberfläche des Geschößkopfes eine gebrochene Linie  $A_1 D_1 B_1$ . Diese soll aus den zwei Geraden  $A_1 D_1$  und  $D_1 B_1$  bestehen, die gegen die  $x$ -Achse um den be-

liebig angenommenen Winkel  $\beta$  gleich geneigt sind (ein solcher Punkt  $D_1$  läßt sich zu jedem angenommenen Winkel  $\beta$  leicht geometrisch konstruieren). Es ist dann entlang  $A_1 D_1 B_1$  der Wert von  $p$  gleich  $\pm \operatorname{tg} \beta$ ,  $p^2 = + \operatorname{tg}^2 \beta$  oder  $q^2 = \operatorname{ctg}^2 \beta$ .

Dann wird

$$W = \kappa \cdot R^2 \pi - 2 \pi \kappa \cdot \int_{y_0}^R \frac{y \cdot q^2}{1 + q^2} \cdot dy = \kappa R^2 \pi - 2 \pi \kappa \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} \int_{y_0}^R y \cdot dy$$

(da  $\operatorname{ctg}^2 \beta$  konstant ist), also

$$W = \kappa R^2 \pi - \pi \kappa \cos^2 \beta (R^2 - y_0^2).$$

Der Winkel  $\beta$  kann beliebig klein gewählt werden; also ist an der Grenze  $W = \kappa R^2 \pi - \pi \kappa \cdot 1 \cdot (R^2 - y_0^2) = \pi \kappa \cdot y_0^2$ . Und wenn  $A_1$  speziell auf der Längsachse angenommen wird ( $y_0 = 0$ ), so ist im Grenzfall der Luftwiderstand  $W$  gegen ein solches Spitzgeschoß mit kegelförmiger Spitze und kegelförmiger Ausbohrung der Spitze theoretisch gleich Null (auf diese Lösung haben schon Legendre und Weierstraß aufmerksam gemacht).

Niemand aber wird glauben, daß tatsächlich der Widerstand gegen Geschosse von der Form I oder II oder III ihres Längsschnitts sehr klein sei. Der Grund des scheinbaren Widerspruchs liegt darin, daß das Abströmen der Luft am Geschosß von der Theorie nicht berücksichtigt ist und vorläufig auch nicht völlig berücksichtigt werden kann.

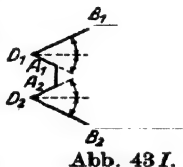


Abb. 43 I.



Abb. 43 II.

Aus diesen Gründen haben solche theoretische Berechnungen im vorliegenden Fall keine praktische Bedeutung. Vielmehr kann vorläufig nur der (einwandfreie) Versuch über die günstigste Form des Geschosses entscheiden.

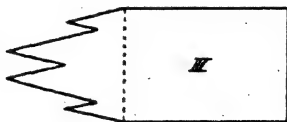
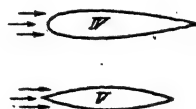


Abb. 43 III-V.



Übrigens sei bei diesem Anlaß darauf hingewiesen, daß sicher auch die Form des hinteren Geschosßendes von wesentlicher Bedeutung ist. Es ist nicht unmöglich, daß die Natur durch Anpassung in der Form des Vogel- und Fischkörpers und die jahrtausendelange Erfahrung der Menschheit in der Form des Schiffs (vgl. Abb. IV und V) für kleine Geschwindigkeiten eine günstigere Lösung der Aufgabe gefunden hat, als es bisher der Variationsrechnung möglich war.

Die Formen IV und V wurden schon 1744 von d'Alembert und 1831 von Piobert vorgeschlagen; die Eiform 1761 von Robins; ein Kegelstumpf am hinteren Geschoßende 1840 von Dreyse und 1860 von Witworth; von letzterem und von Hebler außerdem scharfe Zuspitzung des Geschoßkopfs. Hierüber und über spanische Versuche mit torpedoförmigen Geschossen (Form IV und V) aus dem Jahr 1906 vgl. die Lit.-Note. Letztere Form ist rein hydrodynamisch ohne Zweifel günstig; aber Gründe der Stabilisierung des Geschosses im Rohr und beim Flug in der Luft und andere praktische Gründe sprechen gegen diese Geschoßform.

Besser als torpedoförmige Geschosse haben sich bei großen Anfangsgeschwindigkeiten solche Geschosse bewährt, die am hinteren Ende eine Verjüngung in Form eines Kegelstumpfs besitzen, dessen Höhe und dessen Bodendurchmesser nur etwa 82% des eigentlichen Geschoßkalibers betragen. Und was den Geschoßkopf anlangt, so scheint es weniger darauf anzukommen, ob die Meridiankurve des Geschoßkopfes ogival oder parabolisch oder hyperbolisch usw. ist, als vielmehr darauf, daß, wenn z. B. ein Ogival gewählt wird, der Abrundungsradius des Ogivals möglichst groß ist und daß alle Übergangsteile an der Geschoßoberfläche nach Möglichkeit abgerundet sind, damit das Entstehen von starken Luftwellen und Luftwirbeln möglichst vermieden wird. Um bei langer Spitze eine zu starke Vermehrung des Gesamtgewichts des Geschosses und eine zu weitgehende Verlegung des Gesamtschwerpunkts nach der Spitze hin zu vermeiden, wird man unter Umständen, je nach der beabsichtigten Verwendung der Geschosse, die Spitze zwar geschlossen, aber hohl anordnen (sogen. Haubengeschosse, Vorschlag von O. v. Eberhard). Im übrigen sei auf die Aufsätze von Hptm. Justrow (s. Lit.-Note), sowie auf die Waffenlehren von Wille, Berlin, Zimmerle usw. verwiesen.

## IV. Einfluß der Luftdichte.

### § 15. Berechnung des Tagesluftgewichts $d$ .

Der Luftwiderstand hängt nach dem obigen u. a. von der zur Zeit des Schusses herrschenden Dichte der das Geschoß umgebenden Luft ab. Es handelt sich also darum, aus der Lufttemperatur  $t^{\circ}\text{C}$ , dem reduzierten Barometerstand  $H_0$  mm und dem Feuchtigkeitsgehalt  $100 \cdot s\%$  der Luft das Gewicht  $\delta$  zu berechnen, das 1 cbm Luft am Versuchstag in der Nähe des Mündungshorizonts oder auch in der Höhe  $y$  (m) darüber besitzt.

#### A. Luftgewicht $\delta_0$ am Erdboden (für $y = 0$ ).

Das Gewicht von 1 cbm vollkommen trockener Luft beträgt für  $45^{\circ}$  geographischer Breite und für Meereshöhe 1,293 03 kg, für Berlin mit der Breite  $52^{\circ} 30'$  und 40 m Höhe über dem Meer 1,293 88 kg. Somit ist das Gewicht  $P$  von 1 cbm trockener Luft bei  $t^{\circ}\text{C}$  Temperatur und bei  $H_0$  mm Barometerstand nach dem vereinigten Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac für Berlin

$$P = 1,2939 \cdot \frac{H_0}{760} \cdot \frac{1}{1 + 0,00367 t} \quad (1)$$

Nun ist die Luft feucht; daher ist  $\delta_0 < P$ , da der Wasserdampf, den die Luft teilweise enthält, nur  $\frac{3}{8}$  vom Gewicht des gleichen Volumens trockener Luft wiegt. Der Barometerstand  $H_0$  bezieht sich auf den Druck der feuchten Luft. Man hat sich also zu denken, daß in einen cbm trockener Luft Wasserdampf von der Spannung  $e$  einströme, und daß dafür ein gewisses Quantum trockener Luft austrete, so daß der Druck ebenso groß ist, wie er tatsächlich für die feuchte Luft gemessen wurde, nämlich gleich  $H_0$ . Die trockene Luft, die dabei in dem cbm übrig bleibt, wiege  $G_1$  kg, ihr Partialdruck betrage  $H_1$  mm. Der eingeströmte Wasserdampf wiege  $G_2$  kg, der Partialdruck sei  $e$  mm. Nun ist nach dem Gesetz von Dalton der Druck eines Gemisches gleich der Summe der Partialdrucke, die man hätte, wenn je das betreffende Gas allein für sich denselben Raum erfüllen würde, d. h. es ist

$$H_0 = H_1 + e. \quad (2)$$

Führt man diese Vorstellung durch, so hat man sich zu denken, daß zuerst allein die  $G_1$  kg trockener Luft in dem cbm sich befinden. Der Druck ist  $H_1$ . Vergleicht man diesen Fall mit dem Fall von Gleichung (1), der sich gleichfalls auf Füllung des cbm mit trockener Luft bezieht, so hat man, da nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte die Drucke wie die Gewichte pro cbm sich verhalten,

$$\frac{G_1}{P} = \frac{H_1}{H_0} = \frac{H_0 - e}{H_0}. \quad (3)$$

Stellt man sich ebenso vor, es befänden sich nur die  $G_2$  kg Wasserdampf in dem cbm, wobei der Druck  $e$  mm betrage und vergleicht diese Füllung mit der oben erwähnten, wobei das cbm mit Wasserdampf vom Druck  $H_0$  mm gefüllt ist (Gewicht des cbm  $\frac{3}{8} P$ ), so ist angenähert

$$\frac{G_2}{\frac{3}{8} P} = \frac{e}{H_0}. \quad (4)$$

Diese Werte von  $G_1 + G_2$  in  $\delta_0 = G_1 + G_2$  eingesetzt, gibt

$$\delta_0 = \frac{P}{H_0} \cdot \left( H_0 - \frac{3}{8} e \right) \quad (5)$$

oder, wegen (1),

$$\delta_0 (\text{kg/cbm}) = \frac{1,2939}{760 \cdot (1 + 0,00367 t)} \cdot \left( H_0 - \frac{3}{8} e \right). \quad (I)$$

Wenn die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist, läßt sich  $e = E$  (Spannkraft des Wasserdampfes bei  $t^\circ \text{C}$ ) aus der in der Physik und Technik wohlbekannten Tabelle entnehmen. Wenn sie, wie gewöhnlich, nicht gesättigt ist, so ist  $e$  nur ein Bruchteil von  $E$ ,  $e = s \cdot E$ .

$s$  wird, mit 100 multipliziert, von den Prozenzhygrometern direkt angegeben, somit ist

$$\delta_0 = \frac{1,2939 \cdot H_0}{760} \cdot \frac{273}{273 + t} - 0,174 \cdot \frac{s \cdot E}{273 + t} \quad (\text{II})$$

Um die Bedeutung der Bezeichnungen zu wiederholen, so ist  $t$  die Lufttemperatur in Grad Celsius,

$s$  die relative Feuchtigkeit, d. h. das Verhältnis der Spannkraft  $e$  des tatsächlich in der Luft vorhandenen Wasserdampfes zu der Spannung  $E$  des Wasserdampfes im Fall der Sättigung (für  $E$  Tabelle Nr. 3 im Anhang);  $100 \cdot s$  von den Prozenzhygrometern (z. B. von Koppe und von Lamprecht) direkt angegeben.

$H_0$  der auf  $0^\circ \text{C}$  reduzierte Barometerstand in mm.

Abgelesen werden  $H$  mm am Quecksilberbarometer. Da man jedoch speziell mit dem Barometer nur den Luftdruck, nicht auch außerdem die Ausdehnung des Quecksilbers mit der Temperatur zu messen wünscht, bezieht man, um Vergleichen zu ermöglichen, die Angaben des Barometers auf eine und dieselbe Temperatur, die Normaltemperatur  $0^\circ \text{C}$ . Nun ist der Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers  $1 : 5550$ , also ist der abgelesene Barometerstand

$$H = H_0 \left( 1 + \frac{t}{5550} \right); \quad \text{folglich } H_0 = \text{nahezu } H \left( 1 - \frac{t}{5550} \right).$$

Die Korrektur beträgt  $\frac{H \cdot t}{5550} = 0,000181 \cdot H \cdot t$ ; diese ist abzuziehen. Andererseits dehnt sich auch der Maßstab am Barometer aus. Wird dieser als aus Messing (Ausdehnungskoeffizient  $0,000019$ ) bestehend angenommen, so hat man von der letzterwähnten Zahl wieder  $0,000019 \cdot H \cdot t$  abzuziehen. Folglich beträgt die im ganzen am abgelesenen Barometerstand  $H$  abzuziehende Korrektur nur  $0,000162 \cdot H \cdot t$ .

Häufig wird bei der Berechnung des Tagesluftgewichts  $\delta_0$  von dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft abgesehen, da dieser Einfluß geringfügig ist. In diesem Fall wird (s. o.)

$$\delta_0 = \frac{0,465 \cdot H_0}{273 + t} \quad (H_0 \text{ in mm}), \quad (\text{III})$$

was in den meisten Fällen genügt.

Die Verwendung eines einheitlichen Luftgewichts  $\delta_0$  (des sogen. Bodenluftgewichts) kann in allen den Fällen als zulässig angesehen werden, wo man in einer ausreichenden Zahl von Schießversuchen zu verschiedenen Abgangswinkeln, darunter auch zu dem Abgangswinkel der größten Schußweite, oder zu einem diesem sehr naheliegenden, die Schußweiten erschießt. Der durch Annahme eines einheitlichen Bodenluftgewichts  $\delta_0$  für alle Bahnen gemachte Fehler

fällt dann mit manchen anderen Vernachlässigungen dem aus den Schießergebnissen berechneten ballistischen Koeffizienten zur Last (vgl. § 13 am Schluß). Doch wird man auch in diesem Falle gut tun, nach einem bereits zu Kriegsbeginn durch C. Cranz gemachten Vorschlag zur Berechnung des Bodenluftgewichts nicht die momentane Lufttemperatur am Boden, sondern einen in geeigneter Weise aus periodischen Ablesungen der letzten 24 Stunden gewonnenen Mittelwert zu nehmen, um den in unmittelbarer Bodennähe besonders schwankenden Temperaturgang auszuschalten.

B. Luftgewicht  $\delta_y$  (kg/m<sup>3</sup>) in der Höhe  $y$  (m) über dem Mündungshorizont.

Um die Änderung des Luftgewichts mit der Erhebung  $y$  (m) über dem Erdboden zu berücksichtigen, nahm St. Robert die lineare Funktion  $\delta_y = \delta_0 (1 - 0,00008 \cdot y)$ ; P. Charbonnier 1904  $\delta_y = \delta_0 \cdot (1 - 0,00011 \cdot y)$ . E. Everling (s. Lit.-Note) findet mit Berücksichtigung der Erfahrungswerte von Schubert, Coym und Linke eine für Formelberechnungen bequeme Exponentialfunktion:  $\delta_y = \delta_0 \cdot e^{-0,000106 \cdot y} = \delta_0 \cdot 10^{-0,000046 \cdot y}$  (dabei  $y$  in m) und eine für Zahlenrechnungen geeignete Formel:

$$\delta_y = 1,250 - 0,1153 y + 0,003024 \cdot y^2,$$

dabei  $y$  in Kilometern.

C. Cranz schlug 1910 vor, für eine rohe Näherungsberechnung, die nicht viel Zeit in Anspruch nehmen darf, mit einem konstanten Luftgewicht zu operieren, wie es in  $\frac{2}{3}$  der Gipfelhöhe herrscht; denn  $\frac{2}{3} \cdot y_g$  ist nach § 1 die Höhe, in der sich bezüglich der Zeit und der horizontalen Kartenentfernung das Geschöß, wenigstens im luftleeren Raum, durchschnittlich befindet.

Die Cranzsche Regel ist in den ersten Kriegsjahren bei der deutschen Artillerie mit gutem Erfolge zur rechnungsmäßigen Ausschaltung der Witterungseinflüsse benützt worden. Auf Veranlassung von K. Becker fand diese Regel eine weitere Verschärfung durch die im Frühjahr 1918 auf deutscher Seite erfolgte Einführung des „ballistischen Luftgewichts“. Darunter versteht man ein angenommenes einheitliches Luftgewicht, das konstant während des ganzen Geschößfluges wirkend den gleichen Einfluß auf die Schußweite hat, wie das mit der Geschößflughöhe variable tatsächliche Luftgewicht. Einzelheiten darüber siehe in § 49 und besonders im 12. Abschnitt.

Bei großen Höhen  $y$ , in die das Geschöß gelangt, wird man genauer in der Weise zu rechnen haben, wie es O. v. Eberhard und A. v. Brunn (s. Lit.-Note) ausgeführt haben: Es bedeute  $p_0$  (kg/m<sup>2</sup>) den Luftdruck und  $T_0$  die absolute Temperatur am Erdboden;  $p_y$  bzw.  $T$

den Luftdruck bzw. die Temperatur in der Höhe  $y$  (m). Bis zu einer Höhe von  $y = \text{ca. } 12000$  m oder in der sog. Troposphäre, nimmt unter normalen Verhältnissen nicht nur der Luftdruck  $p$ , sondern auch die absolute Temperatur  $T$  der Luft mit wachsender Erhebung  $y$  ab; es ist  $T = T_0 - \lambda \cdot y$ ;  $\lambda$  heißt das Temperaturgefälle. In der sog. Stratosphäre ( $y > 12000$  m) ist die Temperatur konstant gleich  $-54,6^\circ \text{C}$ , also im absoluten Maß  $T \text{ konst.} = 218,4$ . Um nun das Verhältnis  $\delta_y : \delta_0$  des Luftgewichts  $\delta_y$  in der Höhe  $y$  (m) zum Luftgewicht  $\delta_0$  am Erdboden in seiner Abhängigkeit von der jeweiligen Höhe  $y$ , von der Temperatur  $T_y$  und dem Luftdruck  $p_y$  daselbst zu erhalten, hat man die Gleichgewichtsbedingung  $dp_y = -\delta_y \cdot dy$  und das Gasgesetz  $p_y = \delta_y \cdot R \cdot T_y$  anzuwenden, wo  $R$  die Gaskonstante bedeutet (für Luft  $R = 29,29$ ).

a) In der Troposphäre ist  $T_y = T_0 - \lambda \cdot y$ . Das Temperaturgefälle  $\lambda$  ergibt sich daraus, daß für  $y = 12000$  m  $T_y = 218,4$  ist; somit ist  $218,4 = T_0 - \lambda \cdot 12000$ ;  $\lambda = \frac{1}{12000} \cdot (T_0 - 218,4)$ . Aus den beiden angeführten Gleichungen, der Gleichgewichtsbedingung und dem Gasgesetz, folgt

$$\frac{dp_y}{p_y} = -\frac{dy}{R \cdot T_y} = -\frac{dy}{R \cdot (T_0 - \lambda \cdot y)};$$

durch Integration 
$$\frac{p_y}{p_0} = \left(1 - \frac{\lambda \cdot y}{T_0}\right)^{\frac{1}{R \cdot \lambda}}.$$

Und da 
$$\frac{\delta_y}{\delta_0} = \frac{p_y}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_y} = \frac{p_y}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_0 - \lambda \cdot y},$$

so wird 
$$\frac{\delta_y}{\delta_0} = \left(1 - \lambda \cdot \frac{y}{T_0}\right)^{\frac{1}{R \cdot \lambda} - 1}, \quad \text{worin} \quad \lambda = \frac{T_0 - 218,4}{12000}. \quad (\text{IV})$$

Näherungsweise kann man bei der obigen Gleichung  $\frac{dp_y}{p_y} = -\frac{dy}{R \cdot T_y}$  auch in der Troposphäre statt mit einem veränderlichen  $T_y$  einfach mit einer konstanten mittleren Temperatur rechnen, die mit  $T_m$  bezeichnet sein möge. In diesem Fall erhält man durch die Integration

$$\frac{p_y}{p_0} = e^{-\frac{y}{R \cdot T_m}}, \quad \text{also} \quad \frac{\delta_y}{\delta_0} = \frac{T_0}{T_y} e^{-\frac{y}{R \cdot T_m}}, \quad (\text{IVa})$$

man braucht also nur die Temperatur in den verschiedenen Höhen  $y$  zu kennen. In der Grenze zwischen Troposphäre und Stratosphäre ist

$$\frac{p_{12000}}{p_0} = \left(1 - \frac{\lambda \cdot 12000}{T_0}\right)^{\frac{1}{R \cdot \lambda}}, \quad \frac{\delta_{12000}}{\delta_0} = \left(1 - \frac{\lambda \cdot 12000}{T_0}\right)^{\frac{1}{R \cdot \lambda} - 1}$$

b) In der Stratosphäre, wo

$$T \text{ konst.} = T_0 - \lambda \cdot 12000 = T_{12000} = 218,4 \text{ ist}$$

(in Graden C = -54,6), hat man durch Integration der Gleichung

$$\frac{dp_y}{p_y} = - \frac{dy}{R \cdot T_y} \text{ von jener Grenze ab:}$$

$$\frac{p_y}{p_{12000}} = \frac{\delta_y}{\delta_{12000}} = e^{-\frac{y-12000}{R \cdot T_{12000}}}$$

Also ist in der Stratosphäre das Verhältnis des Luftgewichts  $\delta_y$  zum Bodenluftgewicht  $\delta_0$

$$\frac{\delta_y}{\delta_0} = \left(1 - \frac{\lambda \cdot 12000}{T_0}\right)^{\frac{1}{R \cdot \lambda} - 1} \cdot e^{-\frac{y-12000}{R \cdot (T_0 - \lambda \cdot 12000)}} \quad (\text{V})$$

Als Erster hat O. v. Eberhard richtig erkannt, welche Bedeutung diesen Beziehungen (IV) und (V) für sehr großen Steighöhen eines Geschosses zukommt:

Man denke sich, unter Voraussetzung eines normalen Temperatur-Gradienten<sup>1</sup>, das Luftgewicht als Funktion der Steighöhe  $y$  in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Kurve dargestellt; die  $\delta_y$  als Abszissen; die Steighöhen  $y$  als Ordinaten (s. Abb. 44). Dies möge folgendermaßen dreimal geschehen. Die Kurve 1 beziehe sich auf Normaltemperatur  $T_0$  am Erdboden und Normal-Barometerstand  $p_0$  am Erdboden, woraus sich gemäß  $p_0 = \delta_0 \cdot R \cdot T_0$  das normale Luftgewicht  $\delta_0 = OD$  am Erdboden ergibt. Die Kurve 2 sei gezeichnet unter Voraussetzung eines gleichen Bodenluftdrucks  $p_0$ , aber einer niedrigeren Bodenlufttemperatur  $T_0'$  und folglich eines größeren Bodenluftgewichts  $\delta_0' = OE$ . Die Kurve 3 sei gezeichnet unter Voraussetzung einer unveränderten, also normalen Boden-Lufttemperatur  $T_0$ , aber eines höheren Boden-Luftdrucks  $p_0'$ , derart, daß ein höheres Bodenluftgewicht  $\delta_0' = OE$  resultiert. Also in den drei Kurven sind die für  $y=0$  vorausgesetzten Größen: Lufttemperatur, Luftdruck, Luftgewicht bzw. die folgenden: in 1.  $T_0, p_0, \delta_0$ , in 2.:  $T_0', p_0, \delta_0'$ , in 3.:  $T_0, p_0', \delta_0'$ .

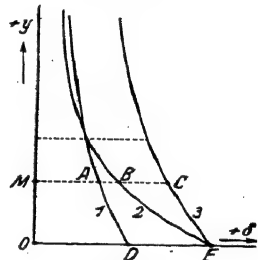


Abb. 44.

a) Vergleicht man die beiden Kurven 1 und 2 (wo der Luftdruck am Boden derselbe  $p_0$  ist), so sieht man, daß die beiden Kurven sich schneiden. Die Flächen aller solchen Kurven wie 1 und 2 mit gleichem Bodenluftdruck  $p_0$  sind unter sich gleich; d. h. die Fläche zwischen der Abszissenachse, der Ordinatenachse und der Kurve 1 ist gleich der Fläche zwischen der Abszissenachse, der Ordinatenachse und der Kurve 2. Denn eine solche Fläche ist nichts anderes, als das Gewicht der Luftsäule, die über 1 qm des Erdbodens steht, weil eine solche Fläche einerseits  $= \int_0^{\infty} \delta_y \cdot dy$  und wegen der obigen Gleich-

gewichtsbedingung andererseits auch  $= - \int_{p_0}^0 dp = + p_0$  ist.

b) In den beiden Kurven 1 und 3 ist die Bodenlufttemperatur die gleiche  $T_0$ , (aber in 3 das Bodenluftgewicht  $\delta_0'$  statt  $\delta_0$  und der Bodenluftdruck  $p_0'$  statt  $p_0$ ). Aus Gleichung (IV) und (V) folgt dann, daß in einer und der-



selben Höhe  $y = OM$  über dem Erdboden  $\delta_y: \delta_0 = \delta'_y: \delta'_0$  oder  $MA:MC = OD:OE$  ist; denn in (IV) und (V) sind dann die rechten Seiten konstant. Also in diesem Falle, wo die Bodenlufttemperatur sich nicht ändert und streng genommen nur in diesem Falle, kann, falls sich das Bodenluftgewicht um  $\Delta \delta_0$  gegenüber dem normalen Bodenluftgewicht ändert, die relative Änderung  $\Delta \delta_y: \delta_y$  des Luftgewichts in der Flughöhe  $y$  einfach gleich der relativen Änderung  $\Delta \delta_0: \delta_0$  des Bodenluftgewichts gesetzt werden.

c) In den beiden Kurven 2 und 3 ist das Bodenluftgewicht dasselbe  $\delta'_0$ , (aber  $p$  und  $T$  haben sich in 3 gegenüber 2 beide geändert, und zwar in dem Verhältnis, daß  $p_0: T'_0 = p'_0: T_0$ ). Von diesen beiden Kurven 2 und 3 verläuft diejenige (2) mit der niedrigeren Lufttemperatur  $T'_0$  unterhalb derjenigen (3) mit der höheren Bodenlufttemperatur  $T_0$ . Also ist bei gleichem Bodenluftgewicht der Luftwiderstand kleiner an einem kälteren Tag, als an einem warmen Tag; und es wird danach in der kalten Luft weiter geschossen, trotz des gleichen Bodenluftgewichts  $\delta'_0$ .

Betrachtet man nun für diese 3 Kurven je die Kurvenfläche zwischen der Abszissenachse  $ODE$ , der Ordinatenachse  $OM$ , einer Parallelen  $MABC$  zur Abszissenachse in der gegebenen Flughöhe  $OM = y$  und der betreffenden Kurve selbst, also die Kurvenfläche  $OMAD$ , bzw.  $OMBE$ , bzw.  $OMCE$ , so zeigt sich folgendes:

Bei kleinen Flughöhen  $y$  oder  $OM$  ist die Fläche  $EBC$  klein gegenüber der Fläche  $DACE$ , oder die Kurvenfläche  $OMCE$  ist nahezu gleich der Kurvenfläche  $OMBE$ . Das heißt: wenn sich das Bodenluftgewicht  $\delta_0$  oder  $OD$  auf den Wert  $\delta'_0$  oder  $OE$  ändert, so kommt es wenig darauf an, ob sich dabei die Temperatur  $T_0$  am Erdboden auf  $T'_0$  geändert hat; für die Bemessung der Kurvenflächen, — von deren Bedeutung für die Schußweiten nachher die Rede sein soll, — ist vielmehr das Wichtigste, daß sich das Bodenluftgewicht  $\delta_0$  in  $\delta'_0$  abgeändert hat.

Dagegen bei großen Flughöhen  $y$  ist die Kurvenfläche  $DABE$ , wie sich bei richtiger zahlenmäßiger Darstellung des Diagramms (unter Berücksichtigung des Vorzeichens der betr. Flächenstücke, aus denen sich  $DABE$  zusammensetzt) zeigt, klein gegen die Fläche  $EBC$ . Also ist die Kurvenfläche  $OMAD$ , nahezu gleich der Kurvenfläche  $OMBE$ . Obgleich sich das Bodenluftgewicht von  $\delta_0$  oder  $OD$  auf  $\delta'_0$  oder  $OE$  abgeändert hat, kommt es bei großen Steighöhen  $y$  für die Bemessung der Kurvenflächen weniger auf diese Änderung des Bodenluftgewichts an, als vielmehr darauf, daß sich der Barometerstand am Erdboden von  $p_0$  auf  $p'_0$  geändert hat.

Und nun hat O. v. Eberhard betreffs dieser Kurvenflächen der Luftgewichtsfunktion  $\delta(y)$  das folgende interessante Theorem aufgestellt und durch zahlreiche Berechnungen von Flugbahnen bewiesen.

Satz von O. v. Eberhard: Die Schußweitenänderung  $\Delta X$ , die dadurch bewirkt wird, daß die der Schußtafel zugrunde gelegten normalen Luftverhältnisse (nämlich Temperatur  $T_0$ , Barometerstand  $p_0$ , somit Luftgewicht  $\delta_0$  am Erdboden, und damit  $T'_y, p'_y, \delta'_y$  in der Höhe über dem Erdboden) am Schießtage auf die Tageswerte:  $T'_0, p'_0, \delta'_0$  am Boden und somit  $T'_y, p'_y, \delta'_y$  in der Höhe  $y$  sich geändert haben, ist proportional der Änderung desjenigen Teils der Kurvenfläche der Luftgewichtskurve, der zwischen der Abszissenachse und der Parallelen dazu im Abstand  $y$ , der Gipfelhöhe der Flugbahn liegt. Oder, was dasselbe ist,  $\Delta X$  ist proportional der von der Abszissenachse der  $\delta$  bis zu der Parallelen dazu im Abstand  $y$ , reichenden Fläche  $ACDE$  zwischen der Normalluftgewichtskurve  $AD$  und der Tagesluftgewichtskurve  $CE$ .

Nach dem Obigen ist die Kurvenfläche  $OMCE$  der Tagesluftgewichtskurve  $= p_0' - p_y'$ , die Kurvenfläche  $OMAD$  der Normalluftgewichtskurve  $= p_0 - p_y$ . Somit ist

$$\Delta X = \kappa [p_0' - p_y' - (p_0 - p_y)] = \kappa \cdot P. \quad (VI)$$

Die Normalluftgewichtskurve kann ein für allemal gezeichnet und von 1000 zu 1000 m Steighöhe  $y$  integriert werden; dann ist  $p_0 - p_y$  eine gegebene Funktion von  $y$ , die aus einer Tabelle oder einem Diagramm sich ergibt. Am Schießtag wird der Barometerstand  $p_0'$  am Erdboden (sowie bei anormalem Temperaturgradient auch die Temperatur in verschiedenen Höhen über dem Erdboden) gemessen; der Barometerstand  $p_y'$  in der Gipfelhöhe der betr. Flugbahn ist dann leicht zu berechnen. Man kennt somit in Gleichung (VI) den Wert der eckigen Klammer oder  $P$ . Und den Proportionalitätsfaktor  $\kappa$  wird man für das betreffende Geschütz und den in Frage kommenden Abgangswinkel  $\varphi$  rein empirisch ermitteln, indem man statt des normalen Barometerstands  $p_0$  einen etwa um 40<sup>mm</sup> Hg größeren Tages-Barometerstand  $p_0'$  bei gleicher Bodentemperatur annimmt. Dazu gehört ein ganz bestimmter Barometerstand  $p_y'$  für die Gipfelhöhe. Man kennt alsdann für diese spezielle Annahme den Wert von  $P$ ; und die Schußweite  $X'$  der abgeänderten Flugbahn liefert, wenn sie berechnet ist, die zugehörige Schußweitenänderung  $X' - X$  oder  $\Delta X$ . Dieses  $\Delta X$  dividiert man durch den vorhin gewonnenen speziellen Wert der eckigen Klammer  $P$  und hat so für das betreffende Geschütz, die betreffende Ladung und den betreffenden Abgangswinkel  $\varphi$  den Wert von  $\kappa$ . Diese Zahlen  $\kappa$  wird man in der Schußtafel bei den einzelnen Abgangswinkeln  $\varphi$  eintragen.

Speziell bei so großen Steighöhen, daß dabei das Geschöß in Regionen der Stratosphäre gelangt, wo die Luftdichte verschwindend klein ist, kann praktisch  $p_y$  und  $p_y'$  gleich Null gesetzt werden. Dann ist

$$\Delta X = k(p_0' - p_0). \quad (VII)$$

Also die Schußweitenänderung ist dann einfach proportional der Differenz zwischen dem Tages-Barometerstand und dem Normal-Barometerstand am Erdboden.

Bei mittleren Steighöhen kann man nach Gleichung (VI) verfahren. Oder aber wird man, falls der Temperaturgradient der normale ist, einfach die

Tagestemperatur  $T_0$  am Erdboden messen und die Gleichung  $\frac{\delta_y}{\delta_0} = \frac{p_y}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_y - \lambda y}$  verwenden. Oder endlich wird man von einer Wetterwarte den Verlauf der Temperatur in den verschiedenen Höhen  $y$  oder auch nur  $T_y$  als Funktion von  $p_y$  aus Drachenaufstiegen mitgeteilt erhalten und dann  $\frac{\delta_y}{\delta_0} = \frac{p_y}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_y}$  berechnen.

Eine ausführliche Tabelle für das Verhältnis  $\frac{\delta_y}{\delta_0}$  und die Ableitung nach  $y$  hat O. Wiener gegeben; siehe Lit.-Note u. Bd. III; die Tabelle reicht bis  $y = 16000$  m.

Betreffs weiterer Einzelheiten, auch der Berücksichtigung von nichtnormalen Temperaturgradienten, ferner der Änderung der Luftgewichtsformel durch die Abnahme der Schwerkraftbeschleunigung mit der Höhe usw., sei auf die Schrift von O. v. Eberhard: Einiges über die Ballistik großer Schußweiten, Berlin 1924, Verlag von G. Bath, verwiesen.

## § 16. Zusammenfassende kritische Schlußbemerkung zu diesem Abschnitt.

Überblickt man die obigen Resultate der Theorie und Beobachtung über den Luftwiderstand gegen Geschosse, so ist das Gesamt-

bild ein wenig befriedigendes bezüglich der Theorie, und man erhält den Eindruck, daß dieses ganze Gebiet erst in den Anfängen seiner Entwicklung sich befindet.

Die Versuche, durch rein theoretische Erwägungen zu einem Gesetz für den Widerstand der Luft gegen ein axial bewegtes und rotierendes Langgeschosß zu gelangen, haben insofern zu keinem allgemein gültigen und zugleich für die Ballistik brauchbaren Ergebnis geführt, als die theoretisch erhaltenen Gesetze nicht die sämtlichen, je nach den speziellen Verhältnissen mehr oder weniger in Betracht kommenden Begleiterscheinungen einbegreifen. Das Geschosß verliert seine Energie beim Flug durch die Luft dadurch, daß den Teilchen der umgebenden Luft Beschleunigungen erteilt werden. Diese Beschleunigungen sind mit Wellenbildung und infolge von Reibungen mit Wirbelbildung verbunden. Diese äußerst verwickelten Vorgänge der Luftbewegung wurden von den verschiedenen Theorien einseitig als eine einfache Stoßerscheinung oder einseitig als ein thermodynamischer (adiabatischer oder isothermischer) Vorgang usw. in Rechnung gezogen. Andere Gesetze wie das Lorenzsche und das Vieillesche, die wenigstens die wichtigsten Umstände der Luftbewegung um das Geschosß mathematisch wiedergeben, sind derart, daß noch nicht völlig sicher nachgewiesen ist, ob sie für die praktischen Zwecke der Ballistik direkt verwendbar sind.

Es hat sich gezeigt, daß die verschiedenen Größen, die für den Luftwiderstand maßgebend sind, nämlich der Querschnitt  $R^2\pi$ , der Formkoeffizient  $i$ , die Geschwindigkeit  $v$  usw., nicht in der früher angenommenen einfachen Weise, nämlich als Faktoren eines Produktes reinlich voneinander geschieden, in der wahren Luftwiderstandsfunktion vorkommen, daß es speziell einen Formkoeffizienten  $i$ , der allein den Einfluß der Geschosßform charakterisieren würde, streng genommen nicht gibt.

Für den Fall, daß das Langgeschosß sich nicht axial in der Luft bewegt, daß vielmehr die Längsachse mit der Tangente der Schwerpunktsbahn einen endlichen Winkel bildet, lassen sich zwar die Komponenten des Luftwiderstandes parallel und senkrecht zur Längsachse und ebenso die Lage des Angriffspunktes der Luftwiderstandseresultanten auf der Achse mit Hilfe eines Elementargesetzes (Newton, Lössl usw.) berechnen, allein diese Berechnungen sind sehr unsicher, Abgesehen von den vorerwähnten Umständen schon deshalb unsicher, weil jede genaue Kenntnis darüber fehlt, welches Elementargesetz für die große Geschwindigkeit von Geschossen in Berechnung zu nehmen ist, ja ob überhaupt ein Elementargesetz mit genügender Genauigkeit hier unmittelbar in der Art angewendet werden kann, daß mit dessen Hilfe über die dem Luftwiderstand ausgesetzte Geschosßoberfläche integriert werden darf.

Der gleichen Unsicherheit sind deshalb auch alle bisherigen Formwerthberechnungen unterworfen. Besonders die sog. Augustsche Spitzenform kann unmöglich die wahre Lösung des Newtonschen Problems der günstigsten Widerstandsfläche sein. Denn nicht nur ist in der rein mathematischen Berechnung eine grundsätzliche Unrichtigkeit enthalten, sondern, was wichtiger ist, es sind die bei der Berechnung gemachten Annahmen im Widerspruch mit den tatsächlichen Vorgängen der Luftbewegung um das Geschöß.

Wenn trotzdem mit jenen Proportionalitäten, besonders auch mit Formkoeffizienten  $\epsilon$  weiter gearbeitet wird, so liegt der Grund darin, daß die Ballistik einfach und rasch arbeitender Verfahren bedarf und daß der Genauigkeitsgrad der zur Zeit vorhandenen Rechnungsarten immerhin ein derartiger ist, daß er in Anbetracht der natürlichen Geschößstreuungen für die meisten Bedürfnisse der Praxis genügt, wie z. B. aus § 41 hervorgeht. Es soll also auch im folgenden die Verzögerung des Geschosses durchweg  $= cf(v)$  gesetzt werden, wobei  $c$  proportional dem Querschnitt  $R^2\pi$ , dem Luftgewicht  $\delta$ , einem Formkoeffizienten  $\epsilon$  und umgekehrt proportional dem Geschößgewicht  $P$  ist.

Dabei soll jedoch ausdrücklich betont werden, daß dies nur aus Mangel eines Besseren geschieht. Es wird einer Zeit von mehreren Jahrzehnten und des Zusammenwirkens zahlreicher Kräfte bedürfen, bis die Lehre vom Luftwiderstand auf eine feste Unterlage gestellt ist. Ohne Zweifel wird dabei der einwandfreie Versuch das Fundament liefern müssen, auf dem die Theorie weiterbauen kann.

### Dritter Abschnitt.

## Das spezielle ballistische Problem. Angabe des Problems und allgemeine Folgerungen für die Flugbahn.

### § 17. Die allgemeinen Gleichungen.

Die parabolische bzw. elliptische Geschößbahn, die im ersten Abschnitt für den luftleeren Raum erhalten worden war, wird durch den Luftwiderstand im allgemeinen derart abgeändert, daß die Schußweite verkürzt, die Gipfelhöhe und die Endgeschwindigkeit verringert, der spitze Auffallwinkel vergrößert wird. Allerdings ist es nicht grundsätzlich ausgeschlossen, daß der Luftwiderstand die Schußweite vergrößert — und v. Minarelli, sowie Sabudski (s. Lit.-Note) berichten über die Beobachtung derartiger Fälle; auch

C. Cranz hat (s. w. u.) an rotierenden Holz-Langgeschossen solches einige Male beobachtet; bei photogrammetrischer Festlegung von Flugbahnen ist wiederholt, zwar nicht eine Schußweiten-Vergrößerung gegenüber dem Schuß im Vakuum, aber eine auffallende Streckung des absteigenden Astes konstatiert worden —; dies ist bei Langgeschossen unter Umständen dann möglich, wenn der vordere Teil der Geschosßachse stets oder wenigstens im größten Teil der Flugbahn oberhalb der Bahntangente liegt, also die Wirkung der Luft gegen das schiefgestellte Geschosß eine derartige ist, wie sie bei Luftschiffen durch schiefgestellte Segel absichtlich herbeigeführt wird, (bei kugelförmigen Geschossen kann ein solcher Fall dann eintreten, wenn das Geschosß eine Rotation um eine horizontale Achse von unten über vorn nach oben angenommen hat), vgl. § 55. Jedoch gehören derartige Fälle zu den Seltenheiten, und sie sind ausgeschlossen, wenn, wie in diesem Abschnitt geschehen soll, die Voraussetzung gemacht wird, daß die Achse des Langgeschosses durchweg in der Bahntangente liege (oder, falls es sich um kugelförmige Geschosse handelt, daß eine Rotation nicht vorhanden sei). Weiter soll von störenden Einflüssen wie Erdrotation, Wind usw. vorläufig abgesehen werden. Die einzelnen Aufgaben, um die es sich handelt, werden später besprochen werden.

Der in der Verzögerung  $cf(v)$  des Geschosses durch den Luftwiderstand vorkommende ballistische Koeffizient  $c$  ist eine gegebene Funktion der Flughöhe  $y$ . Denn in  $c$  ist u. a. das Luftgewicht  $\delta$  enthalten, das gemäß § 15 mit der Höhe  $y$  veränderlich ist. Ebenso ist die Fallbeschleunigung  $g$  dem Gravitationsgesetz zufolge eine Funktion von  $y$ . [Übrigens sind Sondergeschosse denkbar und zum Teil auch verwendet, bei denen das gleichfalls in dem Faktor  $c$  enthaltene Geschosßgewicht auch eine Funktion der Zeit ist — rauchgebende Geschosse, Lichtspurgeschosse usw. — oder solche, bei denen sich sogar der Geschosßquerschnitt mit der Zeit ändert. In solchen Fällen wäre  $cf(v)$  eine Funktion der Geschwindigkeit  $v$ , der Höhe  $y$  und der Zeit  $t$ ;  $cf(v) = \varphi(v, y, t)$ .]

Wenn gerader Flug des Geschosses und Konstanz von  $g$  vorausgesetzt ist, so stellt die Aufgabe, bei gegebenen Anfangsbedingungen die Elemente der Flugbahn zu berechnen, „das spezielle ballistische Problem im engeren Sinne“ dar; wenn auch noch konstantes  $c$  vorausgesetzt ist, spricht man von dem „ballistischen Problem im engsten Sinn“. Auch dieses Problem als eine bloße Korrektionsaufgabe gegenüber den Verhältnissen im luftleeren Raum zu behandeln, ist im allgemeinen nicht angängig, vielmehr höchstens bei verhältnismäßig kleinen Anfangsgeschwindigkeiten und verhältnismäßig großen Massen der Geschosse. Dies zeigen die folgenden Beispiele:

Beispiele. 1. Französisches Infanteriegeschloß:  $v_0 = 701$  m/sec;  $2R = 8$  mm;  $P = 12,8$  g. Bei  $\varphi = 4^\circ 59'$  ist die Schußweite  $= 2400$  m  $= 23\%$  von derjenigen im leeren Raum.

2. Französische 22 cm-Mörsergranate M. 87:  $P = 118$  kg. Mit  $\varphi = 45^\circ$  und mit  $v_0$  bzw.  $= 78, 146, 193, 228$  m/sec ist die Schußweite bzw.  $= 97, 92, 87, 83\%$  von derjenigen im leeren Raum.

Das System von Gleichungen, das im Folgenden für die Behandlung des speziellen ballistischen Problems im engeren Sinn aufgestellt wird, hat nur zur Voraussetzung, daß der Geschloßflug ein gerader ist, d. h. daß die Achse des Langgeschosses dauernd in der Bahntangente liegt. Der Luftwiderstandskoeffizient  $c$  und die Fallbeschleunigung  $g$  können Funktionen von  $y$  sein,  $c(y)$  und  $g(y)$ .

#### A. Das Gleichungssystem bei Verwendung von rechtwinkligen Koordinaten $x, y$ .

Koordinatenanfang im Abgangspunkt  $O$  des Geschosses; die  $x$ -Achse horizontal und positiv in der Schußrichtung; die  $y$ -Achse vertikal und positiv nach oben. In einem beliebigen Flugbahnpunkt  $(xy)$ , der nach  $t$  Sekunden erreicht wird, sei die Geschwindigkeit des Geschossschwerpunkts  $v$ , ihre Horizontalkomponente  $v_x$  oder  $v \cdot \cos \vartheta$ , ihre Vertikalkomponente  $v_y$  oder  $v \cdot \sin \vartheta$ , dabei  $\vartheta$  der Neigungswinkel der Bahntangente gegen die Horizontale;  $\tan \vartheta$  oder  $\frac{dy}{dx}$  sei mit  $p$  bezeichnet;  $m$  sei die Masse des Geschosses,  $m = \frac{P}{9,81}$ ;  $P$ (kg) das Geschossgewicht.

Da nach der gemachten Voraussetzung der Luftwiderstand  $m \cdot c \cdot f(v)$  in der Richtung der Tangente (entgegen der Bewegungsrichtung des Geschossschwerpunkts) liegt, so wirken auf das Geschloß die folgenden Kräfte: In Richtung der positiven  $x$ -Achse die Komponente  $-m c f(v) \cos \vartheta$  des Luftwiderstands; in Richtung der positiven  $y$ -Achse die Luftwiderstandskomponente  $-m c f(v) \sin \vartheta$  und das Gewicht  $-mg$ . Somit ist

$$dv_x = -c f(v) \cos \vartheta \cdot dt \quad \text{und} \quad dv_y = -c f(v) \sin \vartheta \cdot dt - g \cdot dt.$$

Entlang der Bahntangente ist die Bewegungsgleichung  $dv = -c f(v) dt - g \sin \vartheta \cdot dt$ . Entlang der Normalen zur Bahntangente ist die Normalbeschleunigung einerseits  $-g \cos \vartheta$ , andererseits  $v^2/\rho$ , wo  $\rho$  den Krümmungsradius der Bahn in dem betrachteten Flugbahnpunkt bedeutet. Da das Bogenelement  $ds = \rho \cdot d\vartheta$  und  $v = ds/dt$ , somit  $\rho \cdot d\vartheta = v \cdot dt$  und  $dx = ds \cdot \cos \vartheta$ ,  $dy = ds \cdot \sin \vartheta$  ist, so hat man  $-g \cdot \cos \vartheta = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2 \cdot d\vartheta}{v \cdot dt} = v \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = v^2 \cdot \frac{d\vartheta}{ds}$ . Weiter ist  $g \cdot dx = -v^2 \cdot d\vartheta$ ;  $g \cdot dy = -v^2 \cdot \tan \vartheta \cdot d\vartheta$ ;  $g \cdot ds = -v^2 \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta$ . Eliminiert man  $dt$

aus der vorhin abgeleiteten Gleichung  $g \cdot dt = -v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta$  und der obigen Gleichung der Geschößbewegung entlang der  $x$ -Achse,  $d(v \cos \vartheta) = -c \cdot f(v) \cdot \cos \vartheta \cdot dt$ , so erhält man die Beziehung  $g \cdot d(v \cos \vartheta) = v \cdot cf(v) \cdot d\vartheta$ , die als die Hauptgleichung des ballistischen Problems für geraden Geschößflug bezeichnet zu werden pflegt, und wofür sich mehrere andere Formen aufstellen lassen (s. w. u. in der Zusammenstellung).

Durch Quadrieren der Gleichung  $g \cdot dt = -v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta$  erhält man  $v^2 \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = g^2 \cdot dt$ , wo  $v^2 \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = -g \cdot \frac{dx}{dt}$  und  $\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = d(\operatorname{tg} \vartheta) = dp$  ist; somit ergibt sich:  $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = -g$ ; eine Beziehung, die mitunter gute Dienste leistet.

Etwas umständlicher läßt sich aus den beiden erstangeführten Differentialgleichungen der Geschößbewegung längs der  $x$ - und der  $y$ -Achse das System der übrigen Gleichungen dadurch ableiten, daß man durch Multiplikation der beiden Gleichungen mit  $\sin \vartheta$  bzw.  $\cos \vartheta$  und Addition die Luftwiderstandsverzögerung  $cf(v)$  eliminiert.

#### Zusammenstellung.

Längs der  $x$ -Achse:

$$dv_x = -cf(v) \cdot \cos \vartheta \cdot dt = -\frac{cf(v)}{v} \cdot v_x \cdot dt. \quad (1)$$

Längs der  $y$ -Achse:

$$dv_y = -cf(v) \cdot \sin \vartheta \cdot dt - g \cdot dt = -\left(\frac{cf(v)}{v} v_y + g\right) \cdot dt. \quad (2)$$

Hauptgleichung, 1. Form:

$$g \cdot d(v \cos \vartheta) = v \cdot cf(v) \cdot d\vartheta, \quad (3)$$

Hauptgleichung, 2. Form:

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \cdot \left(\frac{cf(v)}{g} + \sin \vartheta\right) = \frac{dq}{1-q^2} \cdot \left(\frac{cf(v)}{g} + q\right), \text{ wo } q = \sin \vartheta. \quad (3a)$$

Hauptgleichung, 3. Form:

$$\frac{dw}{dz} = \mathfrak{X}_3 \mathfrak{z} + F(w); \quad (3b)$$

(Form von R. Rothe und C. Cranz, s. Lit.-Note); dabei ist  $w = \log \operatorname{nat} v$ ;  $\mathfrak{z} = \mathfrak{Xr} \mathfrak{Xg}(\sin \vartheta)$  oder  $\sin \vartheta = \mathfrak{Xg} \mathfrak{z}$ ;  $F(w) = \frac{cf(v)}{g}$ .

Für die Zeit  $t$ :

$$g \cdot dt = -v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta = -v_x \cdot d(\operatorname{tg} \vartheta). \quad (4)$$

Für die Abszisse  $x$ :

$$g \cdot dx = -v^2 \cdot d\vartheta = -v_x^2 \cdot d(\operatorname{tg} \vartheta). \quad (5)$$

Für die Ordinate  $y$ :

$$g \cdot dy = -v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta = -v_x^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d(\operatorname{tg} \vartheta). \quad (6)$$

Für die Bogenlänge  $s$ :

$$g \cdot ds = -v^2 \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta = -v_x^2 \cdot \sec \vartheta \cdot d(\operatorname{tg} \vartheta). \quad (7)$$

Beziehung zwischen  $x$ ,  $p$ ,  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = -g. \quad (8)$$

In diesem Gleichungssystem (1) bis (8) ist die Hauptgleichung die einzige Gleichung, die bei konstantem Faktor  $c$  nur zwei Variable der Flugbahn enthält [nämlich  $v$  und  $\vartheta$  in der Form (3) oder (3a); bzw.  $w$  und  $\beta$  in der Form (3b)]. Man wird somit, falls man nicht vorzieht, zur Lösung die Taylorsche Entwicklung anzuwenden, darauf ausgehen müssen, zunächst diese Gleichung (3) zu integrieren, wobei sich die Integrations-Konstante daraus ergibt, daß für  $\vartheta = \varphi$ , also im Beginn der Flugbahn,  $v = v_0$  ist. Ist es gelungen,  $v$  in Funktion von  $\vartheta$  zu erhalten,  $v = F(\vartheta)$ , so wird

$$\left. \begin{aligned} dx &= -\frac{1}{g} (F(\vartheta))^2 \cdot d\vartheta; & dy &= -\frac{1}{g} (F(\vartheta))^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta; \\ dt &= -\frac{1}{g} F(\vartheta) \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta; & ds &= -\frac{1}{g} (F(\vartheta))^2 \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Man hat also dann nur noch nötig, die  $dx$ ,  $dy$ ,  $dt$ ,  $ds$  zu integrieren, oder die Aufgabe ist auf Quadraturen zurückgeführt. Mit den verschiedenen Methoden, die dazu dienen können, diesen Plan durchzuführen, beschäftigt sich der Hauptsache nach der 4. und 5. Abschnitt.

### B. Das Gleichungssystem bei Verwendung von schiefwinkligen Koordinaten $\xi$ , $\eta$ .

Wiederholt ist in der ballistischen Literatur die (unrichtige) Behauptung aufgetaucht, es lasse sich das ballistische Problem auf Grund der folgenden Überlegung lösen:  $OA$  (vgl. Abb. 45) sei die Richtung der Anfangstangente. Wenn die Schwere nicht wirken würde, sondern allein der Luftwiderstand, so würde bis zu einer Zeit  $t$  das Geschöß geradlinig weitergehen von  $O$  bis  $A$ , verzögert durch den Luftwiderstand. Wenn nunmehr allein die Schwere ebensolange wirken würde, der Luftwiderstand nicht, so würde das Geschöß von  $A$  nach  $P$  herabfallen. Die wirkliche Lage des Flugbahn-

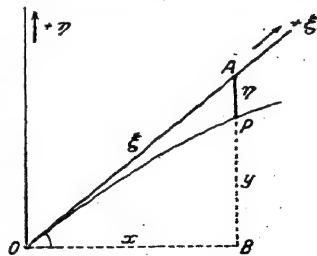


Abb. 45.

punktes  $P$  sei bei diesem ruckweisen Wirken beider Kräfte dieselbe wie bei dem tatsächlich gleichzeitigen Wirken derselben. Wenn also  $OA$  mit  $\xi$  und  $AP$  mit  $\eta$  bezeichnet wird, so geht die Behauptung dahin, daß diese Funktionen  $\xi$  und  $\eta$  von  $t$  unabhängig voneinander aufgestellt werden können, wobei  $\xi(t)$  bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit nur vom Luftwiderstand,  $\eta(t)$  nur von der Schwerebeschleunigung abhängen solle.



Oder aber wurde behauptet (vgl. § 42 und Lit.-Note 42), auf dem Wege  $AP$  wirke zwar gleichfalls der Luftwiderstand, aber die Funktionen  $\xi$  und  $\eta$  seien unabhängig von dem Abgangswinkel  $\varphi$ , sie seien also dieselben, mag sich  $P$  im Mündungshorizont befinden oder nicht. Es wurde alsdann vorgeschlagen, auch für irgendeinen Teil  $OP$  einer Steilbahn diese Wertepaare  $\xi$  und  $\eta$  aus den Flachbahnen zu entnehmen, bei denen sich  $P$  im Mündungshorizont befindet. In diesem Falle wurde also eine gewöhnliche Schußtafel zugrunde gelegt, daraus  $\xi$  und  $\eta$  entnommen (dabei  $P$  im Mündungshorizont) und alsdann bei einer beliebigen Anfangsrichtung  $OA = \xi$ ,  $AP = \eta$  aufgetragen und auf diese Weise Flugbahnpunkte  $P$  konstruiert.

Daß diese Anschauungsweisen wenigstens im Prinzip nicht richtig sind, vielmehr nur Näherungslösungen liefern können, läßt sich am einfachsten erkennen, wenn an Stelle des für rechtwinklige Koordinaten  $x$  und  $y$  gebildeten Gleichungssystems (1) bis (8) dasjenige Gleichungssystem aufgestellt wird, das sich auf schiefwinklige Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  bezieht.

Die eine Koordinatenachse sei die Anfangstangente, die andere die Vertikale durch den Abgangspunkt. Nach der Zeit  $t$  befinde sich das Geschloß in  $P$ , mit den schiefen Koordinaten  $OA = \xi$  und  $AP = \eta$ . Die Vergleichung mit den früher benützten rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$  (vgl. Abb. 45) gibt

$$\begin{aligned}\xi \cos \varphi &= x, \\ \xi \sin \varphi &= y + \eta.\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der  $\xi$ - bzw.  $\eta$ -Achse sind  $\frac{d\xi}{dt}$  bzw.  $\frac{d\eta}{dt}$ . Mit den Abkürzungen  $\frac{d\xi}{dt} = u$ ;  $\frac{d\eta}{dt} = w$ ;  $\frac{w}{u} = \frac{d\eta}{d\xi} = q$  hat man

$$\begin{aligned}u \cos \varphi &= \frac{dx}{dt} = v \cos \vartheta, \\ u \sin \varphi &= \frac{dy}{dt} + w = v \sin \vartheta + w.\end{aligned}$$

Werden diese zwei Gleichungen mit  $\sin \vartheta$  bzw.  $-\cos \vartheta$  multipliziert und addiert, so erhält man

$$u \cdot \sin (\vartheta - \varphi) = -w \cos \vartheta \quad \text{oder} \quad q = -\frac{\sin (\vartheta - \varphi)}{\cos \vartheta}.$$

Daraus

$$dq = -\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \vartheta} \cdot d\vartheta; \quad d\vartheta = -\cos^2 \vartheta \cdot \sec \varphi \cdot dq.$$

Werden ferner dieselben zwei Gleichungen quadriert und addiert, so folgt

$$v^2 = u^2 (1 + q^2 - 2 q \sin \varphi). \quad (10)$$

Damit lassen sich die früheren Gleichungen (3), (4), (5), (6) auf die neuen Koordinaten übertragen:

Die Gleichung  $g \cdot d(v \cos \vartheta) = v \cdot c f(v) \cdot d\vartheta$  geht über in:

$$g \cdot du \cdot \cos \varphi = -v \cdot c f(v) \cos^2 \vartheta \sec \varphi dq$$

oder, da  $v \cos \vartheta = u \cos \varphi$  ist, in

$$g \cdot du = -\frac{c f(v)}{v} u^2 dq.$$

Ferner wird

$$g \cdot dt = -\frac{v d\vartheta}{\cos \vartheta} + \frac{v \cos^2 \vartheta}{\cos \vartheta \cos \varphi} \cdot dq = u \cdot dq,$$

$$g \cdot dx = -v^2 d\vartheta + v^2 \cos^2 \vartheta \sec \varphi dq$$

wird zu:

$$g \cos^2 \varphi \cdot d\xi = + u^2 \cos^2 \varphi \, dq \quad \text{oder} \quad g \cdot d\xi = + u^2 \, dq.$$

Endlich die Gleichung

$$g \cdot dy = - v^2 \operatorname{tg} \vartheta \, d\vartheta = + v^2 \operatorname{tg} \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta \sec \varphi \, dq$$

geht über in:

$$g \sin \varphi \, d\xi - g \, d\eta = + u^2 \cos \varphi \operatorname{tg} \vartheta \, dq$$

oder, mit Einsetzung des vorigen Wertes von  $g \, d\xi$ , in:

$$g \, d\eta = u^2 \, dq.$$

Also hat man zusammen das folgende System von Gleichungen:

$$g \cdot du = - \frac{cf(v)}{v} u^2 \cdot dq, \quad (11)$$

$$g \cdot dt = u \cdot dq, \quad (12)$$

$$g \cdot d\xi = u^2 \cdot dq, \quad (13)$$

$$g \cdot d\eta = u^2 \cdot q \cdot dq. \quad (14)$$

Die Gleichung (11), in der  $v$  mittels (10) in den Variablen  $u$  und  $q$  ausgedrückt zu denken ist, enthält nur die Variablen  $u$  und  $q$ . Wenn diese Gleichung gelöst ist, erhält man  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $t$  durch mechanische Quadratur.

Dieses System von Gleichungen (10) bis (14), das schon früher, auf eine z. T. etwas andere Weise, von A. Greenhill und P. Charbonnier aufgestellt wurde (vgl. Lit.-Note) läßt erkennen, daß  $\xi$  und  $\eta$  nicht unabhängig voneinander erhalten werden können (außer wenn  $cf(v) = cv$  ist, weil die Lösungen  $\xi$  und  $\eta$  aus (13) und (14) durch die Lösung von (11) bedingt sind; ferner zeigen sie, daß die Funktionen  $\xi$  und  $\eta$  nicht unabhängig von  $\varphi$  sind, da auf der rechten Seite von (10)  $\sin \varphi$  vorkommt. Nur für kleine Abgangswinkel  $\varphi$  kann diejenige Näherungslösung, bei der von  $\sin \varphi$  abgesehen wird, einigermaßen richtige Werte  $\xi$  und  $\eta$  liefern; mit wachsendem  $\varphi$  muß aber auch der Fehler wachsen; für Winkel  $\varphi$  nahe an  $90^\circ$  wird der Fehler wieder kleiner, da in dieser Gegend von  $\varphi \sin \varphi$  nahezu konstant ist; K. Popoff hat die Fehler untersucht, s. Lit.-Note.

### C. Die neue Hauptgleichung von E. Cavalli.

Wie schon bemerkt, ist in dem Ausdruck für die Verzögerung durch den Luftwiderstand, also in  $c \cdot f(v)$  der Faktor  $c$  von der Luftdichte und damit von der jeweiligen Steighöhe  $y$  des Geschosses abhängig. E. Cavalli (s. Lit.-Note) ging daher 1921 darauf aus, statt der Hauptgleichung (3) eine andere aufzustellen, in der diese Abhängigkeit bereits berücksichtigt ist und die doch nur zwei Variable enthält. Dies geschieht natürlich dadurch, daß aus (3) und (6), also aus

$$g \cdot d(v \cos \vartheta) = c \cdot f(v) \cdot v \cdot d\vartheta$$

und

$$g \cdot dy = - v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta$$

die Variable  $y$  eliminiert wird. Zu diesem Zweck wählt Cavalli für das in  $c$  vorkommende Verhältnis  $\frac{\delta(y)}{\delta_0}$  der Luftdichte  $\delta(y)$  in der Höhe  $y$  zu der Luftdichte  $\delta_0$  im Mündungshorizont die Be-

ziehung  $\frac{\delta(y)}{\delta_0} = e^{-h \cdot v}$ , wo  $h = 0,000106$  ist (siehe oben § 15). Das Resultat, zu dem E. Cavalli auf diese Weise geführt wird, ist das folgende: Mit den Abkürzungen  $\frac{v \cdot f'(v)}{f(v)} = n(v)$  und  $\frac{v \cdot \cos \vartheta}{\cos \varphi} = u$  erhält er

$$\frac{d^2 \vartheta}{du^2} + h \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{g} \cdot \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \cdot u^2 \cdot \left( \frac{d\vartheta}{du} \right)^2 + (n(v) + 1) \left( \frac{1}{u} + \operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{du} \right) \cdot \frac{d\vartheta}{du} = 0. \quad (15)$$

Bezüglich der Funktion  $n(v) + 1$  weist er nach, daß sie durchweg sehr angenähert gleich  $n(u) + 1$  ist, und er gewinnt damit schließlich die einfachere Differentialgleichung zwischen  $J$  und  $\xi$ :

$$\frac{d^2 \xi}{dJ^2} + [\kappa \cdot u^2 (1 + \xi^2) + n(u) - 1] \cdot \frac{\xi}{1 + \xi^2} \cdot \left( \frac{d\xi}{dJ} \right)^2 = 0; \quad (16)$$

dabei ist

$$\xi = \operatorname{tg} \vartheta; \quad J = - \int \frac{2g \cdot du}{u \cdot f(u)}; \quad \kappa = \frac{h \cdot \cos^2 \varphi}{g}; \quad v \cdot \cos \vartheta = u \cdot \cos \varphi;$$

$$n(u) = \frac{u \cdot f'(u)}{f(u)}.$$

E. Cavalli zeigt noch, daß die Gleichung (16) mit den elementaren Integrationsmethoden eine Lösung in geschlossener Form zuläßt bei der speziellen Annahme (von J. de Jong):  $cf(v) = c \cdot v$ , also in dem Fall  $n = 1$ .

Im übrigen wird man abzuwarten haben, wie die weitere Entwicklung des Problems in der Hand von E. Cavalli sich vollzieht. Falls auf der Grundlage von Gleichung (15) oder (16) die Berechnung aller Flugbahnelemente sich künftig tatsächlich einfacher und ebenso genau gestalten läßt, wie wenn die beiden Gleichungen  $g \cdot d(v \cos \vartheta) = c(y) \cdot f(v) \cdot v \cdot d\vartheta$  und  $g \cdot dy = -v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta$  als ein System von simultanen Differentialgleichungen zwischen  $v$ ,  $\vartheta$  und  $y$  mit einem Verfahren der sukzessiven Approximation integriert werden (s. darüber den späteren § 34), so ist mit dem Vorschlag von E. Cavalli ein erheblicher Fortschritt gewonnen.

#### D. Über die Hodographenkurve der Flugbahn.

Die Hauptgleichung (3) [oder, was derselbe ist, die Gleichung (3a) oder (3b)] stellt in mechanischer Hinsicht die Differentialgleichung des Hodographen der Flugbahn dar.

Unter dem Hodographen versteht man folgendes (vgl. Abb. 46 a und b): Man denke sich zu der Tangente in einem beliebigen Bahnpunkt eine Parallele durch den Anfang  $O$  eines Polarkoordinatensystems gezogen. Die Horizontalneigung dieser Parallelen ist  $\vartheta$ . Auf dieser Parallelen durch  $O$  sei die Größe  $v$  der zugehörigen Bahngeschwindigkeit des Geschosses als radius vector  $OP$  von  $O$  aus ab-

getragen. Die Konstruktion denke man sich für alle Punkte der Bahn ausgeführt, so erfüllen die Endpunkte der auf den Strahlen aus  $O$  aufgetragenen Strecken  $v$  eine Kurve, die Hodographenkurve zu der betreffenden Bahnkurve. Die Variablen  $v$  und  $\vartheta$  sind also jetzt nichts anderes als die Polarkoordinaten des Hodographen  $v = \psi(\vartheta)$ .

In der Abb. a sind sechs Radienvektoren  $OA$ ,  $OP$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ ,  $OE$  eingezeichnet.  $OA$  soll die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  bedeuten; somit ist der zugehörige Polarwinkel  $AOB$  gleich dem Abgangswinkel  $\varphi$ . Ferner  $OP$  gleich der Geschwindigkeit  $v$  in einem beliebigen Punkt des aufsteigenden Astes; dazu Polarwinkel  $POB = \vartheta$ . Die horizontale Strecke  $OB$  bedeutet die Gipfelgeschwindigkeit  $v_s$ ; zugehöriger Polarwinkel  $\vartheta = 0$ . Der radius vector  $OC$  bedeutet die Minimalgeschwindigkeit  $v_m$  (darüber vgl. § 19, Satz 7).  $OD$  soll die Auffallgeschwindigkeit  $v_e$  im Mündungshorizont darstellen, so daß der zugehörige negative Polarwinkel  $DOB$  gleich dem spitzen Auffallwinkel  $\omega$  ist. Endlich  $OE$  bedeutet die sog. Grenzgeschwindigkeit  $v_1$ , die zu  $\vartheta = -90^\circ$  gehört (darüber vgl. § 20, Satz 6).

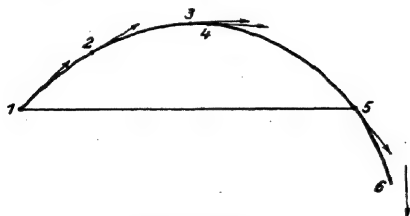


Abb. 46a.

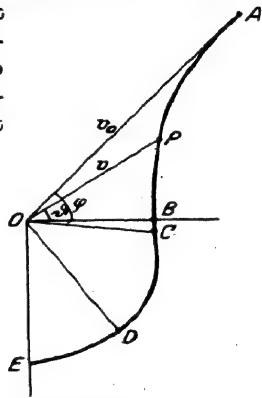


Abb. 46b.

Im allgemeinen ist die Hodographenkurve eine krumme Linie. Speziell für den luftleeren Raum ist sie eine lotrechte Gerade durch Punkt  $A$ . Denn in diesem Falle ist  $cf(v) = 0$ , also wird die Hauptgleichung (3) zu  $d(v \cos \vartheta) = 0$ ;  $v \cos \vartheta = \text{const} = v_0 \cos \varphi$ . Ferner hat P. Charbonnier nachgewiesen, daß im Fall  $cf(v) = cv$  der Hodograph eine schiefe Gerade ist. Dies läßt sich übrigens sofort aus der Hauptgleichung (11) in § 17 ablesen, die sich auf die Verwendung von schiefwinkligen Koordinaten bezieht. Denn diese Gleichung gibt  $-\frac{g}{c} \cdot \frac{du}{u^2} = dq$ , daraus durch Integration  $\frac{g}{c} \cdot \frac{1}{u} = q + \text{konst.}$  Da  $q = \frac{w}{u}$  ist, folgt  $w + \text{konst.} \cdot u = \frac{g}{c}$ , womit der Satz bewiesen ist.

Mit den Eigenschaften der Hodographenkurve haben sich insbesondere P. Charbonnier und Col. Jacob (vgl. Lit.-Note) eingehend

beschäftigt. Einige dieser Eigenschaften sind identisch mit dem weiter unten in § 19 (Sätze 6 und 7) Gesagten. Des weiteren sei folgendes angeführt:

Wenn der ballistische Koeffizient  $c$  als konstant betrachtet wird und wenn angenommen wird, daß der Luftwiderstand rascher wächst als proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit  $v$ , so verläuft die Hodographenkurve im allgemeinen wie in Abb. b angegeben ist: Der Punkt  $C$ , dessen radius vector  $OC$  die kleinste Geschwindigkeit  $v$  bedeutet, liegt unterhalb  $B$ , gehört also zum absteigenden Ast der Flugbahn. In diesem Punkt  $C$  besitzt die Kurve einen Wendepunkt, und der radius vector  $OC$  steht senkrecht auf der Wendepunktstangente. Für  $\vartheta = -90^\circ$  ist  $OE$  gleich der Grenzggeschwindigkeit  $v_1$ , der die Geschwindigkeit auf der Verlängerung des absteigenden Astes immer mehr zustrebt; in diesem Punkt  $E$  besitzt der Hodograph eine horizontale Tangente.

Ferner hat Jacob (vgl. Lit.-Note) den interessanten Satz bewiesen: Eine orthogonale Trajektorie zu den Hodographenkurven eines Geschosses kann, welches auch das benützte Luftwiderstandsgesetz sein möge, erhalten werden durch eine in geschlossener Integralforn aufzustellende Gleichung, die nur noch eine mechanische Integration erfordert.

Dies ist folgendermaßen einzusehen. Die Tangentenrichtung in einem Punkt des Hodographen ist gegeben durch  $\frac{v d\vartheta}{dv}$ . Dies ist aber nach Gleichung (3a) gleich  $\frac{g \cos \vartheta}{c f(v) + g \sin \vartheta}$ . Setzt man statt dieses Bruchs den negativen und reziproken Wert, so erhält man die Tangentenrichtung der zugehörigen orthogonalen Trajektorie. Diese hat also die Differentialgleichung:

$$\frac{v d\vartheta}{dv} = - \frac{c f(v) + g \sin \vartheta}{g \cos \vartheta},$$

oder

$$d(v \sin \vartheta) = - \frac{c}{g} f(v) \cdot dv.$$

Man erhält somit durch eine Integration nach  $v$  die Trajektorien in Polarkoordinaten  $v$  und  $\vartheta$ .

## § 18. Über die Integrierbarkeit der Hauptgleichung mittels der elementaren Integrationsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen.

Nur bei bestimmter Annahme über die Form der Funktion  $c \cdot f(v)$  für die Geschößverzögerung durch den Luftwiderstand gestattet die Gleichung (3) von § 17:  $g \cdot d(v \cdot \cos \vartheta) = v \cdot c f(v) \cdot d\vartheta$  eine

erste Integration mit geschlossenen Ausdrücken, wobei man als Hilfsmittel zuläßt die elementaren Funktionen und die Quadraturen, d. h. die unbestimmten Integrale:

Für die Annahme  $cf(v) = cv^n$  führte schon Joh. Bernoulli 1719 die Integration durch. Danach ist es, wie man nach den obigen Ausführungen erkennt, möglich, für das quadratische Luftwiderstandsgesetz  $cf(v) = cv^2$ , ebenso für das kubische  $cv^3$ , das bi-quadratische  $cv^4$  usw. das außerballistische Problem durch einen geschlossenen Ausdruck zu lösen. Und wenn man eine empirisch gegebene Luftwiderstandstabelle durch eine Reihe von Zonen-Gesetzen wiedergibt (vgl. § 10), so kann auch in diesem allgemeineren Fall eine Flugbahn durch Zerlegung in mehrere aufeinander folgende Teile für jeden von diesen Teilen durch einen geschlossenen Ausdruck berechnet werden. Davon handeln die späteren Nummern 21, 22, 25, 38, 41 dieses Bandes.

D'Alembert zeigte sodann 1744, daß und wie die Integration für das allgemeinere Gesetz  $cf(v) = c \cdot v^n + a$  möglich ist, in dem die Bernoullische Annahme als Sonderfall enthalten ist; gleiches zeigte er für die Funktionen  $a \log v + b$ ;  $a v^n + R + b v^{-n}$ ;  $a (\log v)^2 + R \log v + b$  (mit zwei bzw. drei willkürlich zu wählenden Konstanten, wobei in den zwei letzten Formen zwischen  $a$ ,  $R$ ,  $b$  und  $n$  bzw. zwischen  $R$ ,  $a$ ,  $b$  eine Beziehung besteht). Diesen drei weiteren Formen dürfte vorerst keine Wichtigkeit für die Ballistik zukommen.

Der von d'Alembert gegebenen Anregung, andere Formen integrierbarer Funktionen aufzusuchen, kam F. Siacci 1901 nach, indem er 14 weitere Funktionen bekannt machte; u. a.:

$$A v \sqrt{2c + v^2} + B(c + v^2), \quad (A, B, c \text{ Konstanten}).$$

Mit der Substitution  $\sqrt{2c + v^2} = v \cdot z (Bc - \sin \vartheta)$  wird die Hauptgleichung  $\frac{z \cdot dz}{z^2 (B^2 c^2 - 1) + 2 A c z + 1} + \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta (Bc - \sin \vartheta)} = 0$ , womit die Variablen getrennt sind. In dieser Form ist (mit  $A = 0$ ) die von Legendre 1782 behandelte enthalten. Noch weitere Funktionen dieser Art sind von M. Appel, von M. E. Ouivet und von T. Hayashi (Tokio) aufgestellt worden.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß die Zahl der zu der Hauptgleichung  $g \cdot d(v \cos \vartheta) = cf(v) \cdot v \cdot d\vartheta$  gehörigen integrierbaren Funktionen unendlich groß sein muß. Denn man hat nur nötig, eine beliebige Beziehung zwischen  $\cos \vartheta$  und  $v$ ,  $\cos \vartheta = \psi(v)$ , anzunehmen, diesen Wert und  $d\vartheta = -\frac{d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}$  in die Hauptgleichung einzusetzen und nach  $cf(v)$  aufzulösen, so hat man jedesmal eine

solche Funktion. Auch durch irgendeine Annahme  $y = \psi(x)$  über die Gleichung der Flugbahnkurve (Hyperbel usw.) erhält man nach § 19 (s. w. u.) weitere integrable Funktionen.

Die Ballistik würde jedoch schwerlich eine glückliche Entwicklung nehmen, wenn das Bestreben der Ballistiker darauf gerichtet sein würde, die Zahl der integrierbaren Funktionen zu vermehren.

#### A. Das d'Alembertsche Gesetz $cf(v) = a + c \cdot v^n$ .

Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, wie die Lösung der Hauptgleichung bei Zugrundelegung des d'Alembertschen Gesetzes  $cf(v) = a + c v^n$ , worin die meisten der Zonengesetze und das Chapelsche Gesetz als Spezialannahmen enthalten sind, sich vollzieht.

Die Hauptgleichung lautet jetzt  $g \cdot d(v \cos \vartheta) = v \cdot d\vartheta \cdot (a + c v^n)$ . Wird die linke Seite dieser Gleichung ausgeführt, die Gleichung mit  $v^{n+1}$  dividiert und  $a v^{-n} \cdot d\vartheta$  nach links gebracht, so ist

$$g \cdot \cos \vartheta \cdot v^{-n+1} \cdot dv - (a + g \sin \vartheta) v^{-n} \cdot d\vartheta = c \cdot d\vartheta. \quad (1)$$

Setzt man für den Augenblick  $v^{-n} = u$ , woraus folgt  $-n v^{-n-1} \cdot dv = du$ , so erhält man eine Gleichung von der Eulerschen Form

$$\frac{du}{d\vartheta} + R(\vartheta) \cdot u = Q(\vartheta),$$

wobei 
$$R = + \frac{a + g \sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot \frac{n}{g} \quad \text{und} \quad Q = - \frac{nc}{g \cos \vartheta}.$$

Das Integral dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Störungslied ist bekanntlich

$$u = e^{-\int R \cdot d\vartheta} \cdot \left\{ \int (Q \cdot e^{+\int R \cdot d\vartheta}) d\vartheta + \text{Int.-Konst.} \right\}.$$

Folglich ist im vorliegenden Fall die gesuchte Beziehung zwischen  $v$  und  $\vartheta$  die folgende

$$\frac{1}{(v \cos \vartheta)^n} = e^{-\frac{n}{g} \int \frac{a + g \sin \vartheta}{\cos \vartheta} d\vartheta} \cdot \left\{ -\frac{n}{g} \cdot \int \frac{c \cdot e^{+\frac{n}{g} \int \frac{a + g \sin \vartheta}{\cos \vartheta} d\vartheta}}{\cos^{n+1} \vartheta} \cdot d\vartheta + \text{Int.-Konst.} \right\} \quad (2)$$

#### B. Speziell für $a = 0$ liegt das eingliedrige Potenzgesetz

$$cf(v) = c v^n$$

für die Luftwiderstandsverzögerung vor. Also erhält man zu irgendeinem Tangentenneigungswinkel  $\vartheta$  die Geschossgeschwindigkeit  $v$  aus:

$$\frac{1}{(v \cos \vartheta)^n} = -\frac{nc}{g} \int \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta} + \text{Int.-Konst.} \quad (3)$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Bedingung, daß für  $\vartheta = \varphi$ , also im Anfang der Bahn,  $v = v_0$  ist.

Diese Beziehung läßt sich übrigens im vorliegenden speziellen Fall  $cf(v) = cv^n$  aus der Hauptgleichung  $g \cdot d(v \cos \vartheta) = cf(v) \cdot v \cdot d\vartheta$  folgendermaßen einfach ableiten:

$$g \cdot d(v \cos \vartheta) = cv^n \cdot v \cdot d\vartheta = c(v \cos \vartheta)^{n+1} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta},$$

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{(v \cos \vartheta)^{n+1}} = \frac{c}{g} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta};$$

integriert gibt dies:

$$\frac{1}{(v \cos \vartheta)^n} = -\frac{nc}{g} \int \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta} + \text{Int.-Konst.}$$

Für die Berechnung des hier vorkommenden Integrals  $\int \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta}$  sei an die Rekursionsformel erinnert:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x},$$

woraus z. B. folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin x (1 + \operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \frac{1 + \sin x}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2} \{ p \sqrt{1 + p^2} + \lg \operatorname{tg} (p + \sqrt{1 + p^2}) \}, \quad \text{wo } p = \operatorname{tg} x, \end{aligned} \quad (4)$$

Für diese Funktion, die kurz mit  $\xi$  bezeichnet sein möge, sind im Anhang, Tabelle 8b, die Werte

$$\xi(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \lg \operatorname{tg} \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \lg \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{x}{2} \right) \right\}$$

gegeben. Eine ausführliche Tabelle bei Otto: Tafeln für den Bombenwurf, Berlin 1842; für andere  $n$ -Werte vgl. auch Tabelle 8a.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x, \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \lg \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right), \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x; \text{ usw.} \quad (7)$$

Z. B. für  $n = 2$  wird

$$\frac{1}{(v \cdot \cos \vartheta)^2} = -\frac{c}{g} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + \lg \operatorname{tg} \frac{1 + \sin \vartheta}{\cos \vartheta} \right) + \text{Konst.}$$

oder mit der Abkürzung  $\operatorname{tg} \vartheta = p$ ,

$$\frac{1 + p^2}{v^2} = -\frac{c}{g} \{ p \sqrt{1 + p^2} + \lg \operatorname{tg} (p + \sqrt{1 + p^2}) \} + \text{Konst.}$$

Führt man die so gewonnenen Ausdrücke für  $v$  bzw.  $v^2$  in die allgemeinen Gleichungen  $g \cdot dx = -v^2 \cdot d\vartheta$ ;  $g \cdot dy = -v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta$ ;



$g \cdot dt = -v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta$ ;  $g \cdot ds = -v^2 \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta$  ein, so sind  $dx$ ,  $dy$ ,  $dt$ ,  $ds$  allein in  $\vartheta$  (oder, mit  $\operatorname{tg} \vartheta = p$ , allein in  $p$ , oder, mit  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}) = z$ , allein in  $z$ ) ausgedrückt, so daß nur noch übrig bleibt, diese Integrationen auszuführen; d. h. das Problem ist auf Quadraturen zurückgeführt.

C. Speziell für  $a = 0$  und  $n = 1$ , also für die Annahme  
 $cf(v) = cv$

lassen sich die Ausdrücke für sämtliche Bahnelemente in endlicher Form genau ermitteln. Man erhält je in Funktion von  $t$ :

$$x = v_0 \cos \varphi \cdot \frac{1 - e^{-ct}}{c} \quad (8)$$

$$y = -\frac{g}{c}t + \frac{g + cv_0 \sin \varphi}{c^2} \cdot (1 - e^{-ct}) \quad (9)$$

$$v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi \cdot e^{-ct}$$

$$v \sin \vartheta = -\frac{g}{c} + \frac{g + cv_0 \sin \varphi}{c} \cdot e^{-ct}. \quad (11)$$

Für die Zwecke der Ballistik ist, dieses Luftwiderstandsgesetz  $cf(v) = cv$  neuerdings von dem holländischen Ballistiker G. de Josselin de Jong (s. Lit.-Note) verwendet worden. Zwar ist der Luftwiderstand bei Geschösgeschwindigkeiten  $v$  nicht proportional der 1. Potenz von  $v$ ; und es ist selbstverständlich, daß eine Lösung des ballistischen Problems um so befriedigender ausfallen wird, auf je größere Intervalle von  $v$  hin die Annahme  $cf(v)$  mit den Luftwiderstandsmessungen sich deckt. Wenn man aber nur in genügend kleinen Teilen eine Flugbahn berechnet, scheint nach den Untersuchungen von de Jong die Annahme  $cf(v) = cv$  eine ausreichende Approximation zu gestatten; und man hat dann den Vorteil, daß innerhalb eines Bahnteils ein mathematischer Fehler nicht in Betracht kommt, und daß außerdem einfache Tabellen Verwendung finden können. Darüber siehe weiter unten § 38.

D. Speziell für  $a = 0$  und  $n = 2$ , also für die Annahme  
 $cf(v) = cv^2$

liegt das quadratische Luftwiderstandsgesetz vor.

Es wird nach obigem

$$\frac{1}{(v \cos \vartheta)^2} = -\frac{2c}{g} \cdot \xi(\vartheta) + \text{Int.-Konst.}$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich aus der Bedingung, daß im Abgangspunkt  $v = v_0$  und  $\vartheta = \varphi$ . Also wird

$$v^2 = \frac{g}{2c} \cdot \frac{1}{\cos^2 \vartheta (C - \xi(\vartheta))} \quad (12)$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$C = \frac{g}{2c(v_0 \cos \varphi)^2} + \xi(\varphi) \quad (13)$$

wo

$$\xi(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \lg \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right).$$

Diese Konstante hängt mit der Geschwindigkeit  $v$ , des Geschosses im Gipfel der Bahn durch eine einfache Beziehung zusammen. Da im Gipfel  $\vartheta = 0$ , also  $\xi(\vartheta) = 0$  und  $v = v_0$ , so ist auch

$$C = \frac{g}{2cv_0^2}. \quad (14)$$

Führt man die so erhaltenen Ausdrücke von  $v^2$  bzw. von  $v$  in die Systemgleichungen

$$gdx = -v^2 \cdot d\vartheta, \quad gdy = -v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta,$$

$$g \cdot dt = -v \cdot \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}, \quad g \cdot ds = -v^2 \cdot \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}$$

ein, so wird

$$2c \cdot dx = - \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot (C - \xi(\vartheta))}, \quad (15)$$

$$2c \cdot dy = - \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot (C - \xi(\vartheta))}, \quad (16)$$

$$\sqrt{2gc} \cdot dt = - \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot \sqrt{C - \xi(\vartheta)}}, \quad (17)$$

$$2c \cdot ds = - \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot (C - \xi(\vartheta))}. \quad (18)$$

Diese letzere Gleichung (18) läßt eine nochmalige Integration in endlicher Form zu. Da nämlich (s. o.)  $\frac{d\xi}{d\vartheta} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}$ , läßt sich schreiben

$$2c \cdot ds = - \frac{d\xi}{C - \xi} = + \frac{d(C - \xi)}{C - \xi};$$

somit hat man

$$2c \cdot s = \lg(C - \xi(\vartheta)) + \text{Int.-Konst.} \quad (19)$$

a) Wenn man den Flugbahnbogen  $s$  wie bisher vom Abgangspunkt  $O$  aus rechnet ( $s = 0$  für  $\vartheta = \varphi$ ), so wird

$$s = \frac{1}{2c} \lg \frac{C - \xi(\vartheta)}{C - \xi(\varphi)}, \quad \text{oder} \quad \xi(\vartheta) = C - \frac{g}{2c(v_0 \cos \varphi)^2} \cdot e^{2cs}.$$

b) Wird dagegen (s. w. u.) der Bogen  $s$  vom Gipfelpunkt  $S$  aus gerechnet ( $s = 0$  für  $\vartheta = 0$  und damit für  $\xi(\vartheta) = 0$ ), so ist einfach

$$s = \frac{1}{2c} \lg \frac{C - \xi(\vartheta)}{C}, \quad \text{oder} \quad \xi(\vartheta) = C(1 - e^{2cs}). \quad (20)$$

Die Flugbahn besitzt zwei Asymptoten. Die Verlängerung des absteigenden Astes nähert sich nach § 20, 6 mehr und mehr der Vertikalen

die den Abstand  $\frac{1}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} v^2 \cdot d\vartheta$  vom Anfangspunkt hat. Im Gipfel ändert die

Integrationsvariable ihr Vorzeichen,  $\xi(\vartheta)$  wird Null und weiterhin negativ; somit ist dieser Abstand

$$\frac{1}{2c} \cdot \int_{\vartheta=\varphi}^{\vartheta=0} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta (\xi(\vartheta) - C)} + \frac{1}{2c} \cdot \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta (\xi(\vartheta) + C)}.$$

Die Rückverlängerung des aufsteigenden Astes ( $t = -\infty$ ,  $x = -\infty$ ,  $y = -\infty$ ) konvergiert gegen eine schiefe Gerade, deren Horizontalneigung  $\beta$  gegeben ist durch  $C - \xi(\beta) = 0$  und für deren Abstand vom Koordinatenanfang sich leicht ein Ausdruck aufstellen läßt. Ohne Ableitung sei angegeben, daß dieser Abstand ist:

$$\frac{1}{2c \cdot \cos \beta} \cdot \int_{\vartheta=\varphi}^{\vartheta=\beta} \frac{(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \vartheta) \cdot d\vartheta}{\cos^2 \vartheta (\xi(\beta) - \xi(\vartheta))}.$$

wobei  $\beta$  aus der Bedingung  $\xi(\beta) = C$  berechnet gedacht ist.

Ähnliches gilt allgemein für das Luftwiderstandsgesetz  $cf(v) = cv^n$ .

### Zusammenstellung der Resultate.

1. Verzögerung durch den Luftwiderstand  $= cv^n + a$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} g \cdot dx = -v^2 \cdot d\vartheta = -2 \cdot v^2 \cdot \frac{dz}{1+z^2}, \\ g \cdot dy = -v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta = -v^2 \cdot \frac{z^2-1}{z^2+1} \cdot \frac{dz}{z}, \\ g \cdot dt = -v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta = -v \cdot \frac{dz}{z}, \\ g \cdot ds = -v^2 \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta = -v^2 \cdot \frac{dz}{z}, \end{array} \right.$$

hier ist  $v$  in  $\vartheta$  bzw.  $z$  ausgedrückt durch

$$\frac{1}{(v \cos \vartheta)^n} = e^{-\frac{n}{g} \int \frac{g \cdot d\vartheta}{\cos \vartheta}} \cdot \left\{ -\frac{n}{g} \int \frac{c \cdot e^{+\frac{n}{g} \int \frac{g \cdot d\vartheta}{\cos \vartheta}}}{\cos^{n+1} \vartheta} \cdot d\vartheta + \text{Int.-Konst.} \right\}$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$\frac{1}{v^n} = -\frac{n}{g} (1+z^2)^{-n} \cdot z^{-n} \left( \frac{g}{c} \right)^{-1} \left[ \int c \cdot (1+z^2)^n \cdot z^{\frac{n}{g}-n-1} \cdot dz + C \right],$$

wobei  $z = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right)$  bedeutet und die Integrationskonstante  $C$  aus der Anfangsbedingung:  $v = v_0$  für  $\vartheta = \varphi$  oder  $z = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$  zu berechnen ist.

2. Verzögerung durch den Luftwiderstand  $cf(v)$  spezieller  
 $= cv^n$ :

$$\begin{aligned} g \cdot dx &= -v^2 \cdot d\vartheta; & g \cdot dy &= -v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta; \\ g \cdot dt &= -v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta; & g \cdot ds &= -v^2 \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta; \end{aligned}$$

dabei

$$\frac{1}{v^n \cos^n \vartheta} = -\frac{nc}{g} \int \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta} + \text{Int.-Konst.}$$

Wird die Integrationskonstante aus der Bedingung  $v = v_0$  für  $\vartheta = \varphi$  bestimmt, so ist  $\frac{1}{(v \cos \vartheta)^n} - \frac{1}{(v_0 \cos \varphi)^n} = -\frac{nc}{g} (F(\vartheta) - F(\varphi))$ ,  
 oder

$$v = \frac{\sec \vartheta}{\left[ C - \frac{nc}{g} \cdot F(\vartheta) \right]^{\frac{1}{n}}},$$

wobei zur Abkürzung

$$F(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta}; \quad F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{(v_0 \cos \varphi)^n} + \frac{nc}{g} \cdot F(\varphi)$$

gesetzt ist. Also ist:

$$\left\{ \begin{aligned} dx &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\sec^2 \vartheta \cdot d\vartheta}{\left[ C - \frac{nc}{g} \cdot F(\vartheta) \right]^{\frac{2}{n}}}, \\ dy &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\sec^2 \vartheta \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta}{\left[ C - \frac{nc}{g} \cdot F(\vartheta) \right]^{\frac{2}{n}}}, \\ dt &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\sec^2 \vartheta \cdot d\vartheta}{\left[ C - \frac{nc}{g} \cdot F(\vartheta) \right]^{\frac{1}{n}}}, \\ ds &= -\frac{1}{g} \cdot \frac{\sec^2 \vartheta \cdot d\vartheta}{\left[ C - \frac{nc}{g} \cdot F(\vartheta) \right]^{\frac{2}{n}}}. \end{aligned} \right.$$

a)  $n = 2$ ;  $cf(v) = cv^2$  (quadratisches Gesetz):

$$v^2 = \frac{g}{2c} \frac{1}{\cos^2 \vartheta \cdot (C - \xi(\vartheta))},$$

wo

$$\xi(\vartheta) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + \operatorname{lgnt} \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\vartheta}{2} \right) \right)$$

speziell

$$\xi(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \operatorname{lgnt} \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

bedeutet (dafür Tabelle 8 b, im Anhang) und  $C$  eine Abkürzung ist für

$$C = \frac{g}{2c(v_0 \cos \varphi)^2} + \xi(\varphi) \quad \text{oder auch} \quad C = \frac{g}{2c \cdot v_0^2}.$$

Damit hat man

$$2c \cdot dx = - \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot (C - \xi(\vartheta))},$$

$$2c \cdot dy = - \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot (C - \xi(\vartheta))},$$

$$\sqrt{2gc} \cdot dt = - \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot \sqrt{C - \xi(\vartheta)}},$$

$$2c \cdot ds = - \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot (C - \xi(\vartheta))},$$

$$s = \frac{1}{2c} \operatorname{lgnt} \frac{C - \xi(\vartheta)}{C - \xi(\varphi)}, \quad \text{wenn } s \text{ vom Abgangspunkt aus gezählt wird.}$$

$$s = \frac{1}{2c} \operatorname{lgnt} \frac{C - \xi(\vartheta)}{C}, \quad \text{wenn } s \text{ vom Gipfel aus gezählt wird.}$$

b)  $n = 3$ ; Verzögerung  $cf(v) = cv^3$  (kubisches Gesetz):

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = - \frac{v^2}{g} \cdot d\vartheta \\ dy = - \frac{v^2}{g} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta \\ dt = - \frac{v}{g} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \\ ds = - \frac{v^2}{g} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{wobei für } v \text{ einzusetzen ist:} \\ v = \frac{1}{\cos \vartheta \cdot \sqrt[3]{C - \frac{3c}{g} \left( \operatorname{tg} \vartheta + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \vartheta \right)}}, \\ C \text{ Abkürzung für:} \\ C = \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \varphi} + \frac{3c}{g} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi \right) \\ \text{oder auch } C = \frac{1}{v_0^2}. \end{array}$$

Die Integrationen  $x, y, t, s$  führen für  $a = 0$  und  $n = 3$  oder  $n = 4$  auf elliptische Integrale. Entsprechende Tabellen auf Grund der Legendreschen Tafeln haben Greenhill (für  $n = 3$ ) und Sabudski (für  $n = 4$ ) aufgestellt.

Anmerkung. Über ähnliche Flugbahnen. Übertragungsregeln.

Unter Voraussetzung des Potenzgesetzes  $cf(v) = cv^n$  war, bei Integration

über  $\vartheta$  von  $\varphi$  bis  $\vartheta$ ,  $\frac{1}{(v \cos \vartheta)^n} - \frac{1}{(v_0 \cos \varphi)^n} = - \frac{nc}{g} \int_{\varphi}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta}$ , woraus

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{\left( 1 - \frac{nc}{g} (v_0 \cos \varphi)^n \cdot \int_{\varphi}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta} \right)^{\frac{1}{n}}}. \quad (1)$$

Da nun allgemein  $g \cdot ds = -v^2 \cos^2 \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$  und  $g \cdot dt = -v \cos \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ , so wird zwischen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta$ :

$$\frac{gs}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\left(1 - \frac{nc}{g} (v_0 \cos \varphi)^n \cdot \int_{\varphi}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta}\right)^{\frac{2}{n}} \cdot \cos^2 \vartheta} \quad (2)$$

und

$$\frac{gt}{v_0 \cos \varphi} = - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\left(1 - \frac{nc}{g} (v_0 \cos \varphi)^n \cdot \int_{\varphi}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^{n+1} \vartheta}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \cos^2 \vartheta} \quad (3)$$

Man denke sich nun die zwei Flugbahnen  $A$  und  $A'$  zweier verschiedener Geschosse, die unter demselben Abgangswinkel  $\varphi$ , aber mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  und  $v_0'$  verfeuert sind und denen die ballistischen Koeffizienten  $c$  und  $c'$  zugehören. Bei der Bahn  $A$  liege zwischen der Anfangsneigung  $\vartheta_1$  und der Endneigung  $\vartheta$  der Bahntangente der Flugbahnbogen  $s$ , bei der Bahn  $A'$  liege zwischen denselben Neigungen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta$  der Bogen  $s'$ . Die zu  $s$  bzw.  $s'$  gehörigen Flugzeiten der beiden Geschosse seien bzw.  $t$  und  $t'$ .

Die Bahnen  $A$  und  $A'$  sollen ähnlich heißen, wenn bei gleichen Anfangs- und Endneigungen der Bahntangenten gegen den Horizont das Verhältnis  $s:s'$  der Flugbahnbögen konstant ist. Angenommen, es handle sich um dieselbe Luftwiderstandszone und dabei um dasselbe Potenzgesetz, es sei also außer  $\varphi$ ,  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  auch  $n$  konstant, so ist  $\frac{gs}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = \frac{gs'}{v_0'^2 \cos^2 \varphi}$ , d. h. es ist  $s:s'$  konstant (gleich  $v_0^2:v_0'^2$ ), falls man hat:  $c(v_0 \cos \varphi)^n = c'(v_0' \cos \varphi)^n$  oder  $cv_0^n = c'v_0'^n$ . In diesem Fall ist  $\frac{gt}{v_0 \cos \varphi} = \frac{g \cdot t'}{v_0' \cos \varphi}$  oder  $t:t'$  konstant ( $= v_0:v_0'$ ).

In irgendeinem Punkte gleicher Endneigung  $\vartheta$  der Tangenten bei den beiden Bahnen seien die Geschwindigkeiten der zwei Geschosse bzw.  $v$  und  $v'$ . Offenbar gilt, unter der obigen Voraussetzung  $cv_0^n = c'v_0'^n$ , wegen (1) die Beziehung  $v:v' = v_0:v_0'$ . Somit auch  $cv^n = c'v'^n$ , d. h. die Verzögerung durch den Luftwiderstand ist in den homologen Punkten beider Bahnen, mit gleichem  $\vartheta$ , von derselben Größe.

Im ganzen hat man also folgendes Ergebnis: Wenn für zwei Geschosse dasselbe Potenzgesetz gilt, wenn sie ferner unter demselben Anfangswinkel  $\varphi$  verfeuert sind und wenn die anfänglichen Luftwiderstandsverzögerungen für beide Geschosse gleich groß sind, so stehen die Flugbahnbögen  $s$  und  $s'$ , die zwischen gleichen Tangentenneigungen enthalten sind, in konstantem Verhältnis, sie verhalten sich nämlich wie die Quadrate der Anfangsgeschwindigkeiten  $s:s' = v_0^2:v_0'^2$ ; ebenso stehen die zugehörigen Flugzeiten in gleichem Verhältnis, sie verhalten sich wie die Anfangsgeschwindigkeiten selbst,  $t:t' = v_0:v_0'$ . Die Verzögerung durch den Luftwiderstand endlich in homologen Punkten beider Bahnen, d. h. bei gleicher Tangentenneigung, für beide Geschosse gleich groß. Diese Sätze über ähnliche Bahnen verdankt man St. Robert und F. Siacci.

Eine Anwendung der Sätze über ähnliche Flugbahnen ist neuerdings von E. Röggl gegeben worden. Dieser ermittelt die Flugbahnelemente für eine Haubitze oder einen Mörser mit Hilfe der Schußtafel eines bekannten Geschützes.

Der ballistische Koeffizient  $c$  ist, bei gleichem Luftgewicht und bei gleicher Form des Geschosses, umgekehrt proportional dessen Querschnittsbelastung  $q = \frac{P}{R^2 \pi}$ ;  $P$  das Geschößgewicht,  $R^2 \pi$  der Querschnitt. Somit kann obiges Ergebnis auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

**Zusammenfassung.** Für ein Geschütz  $A$  sei  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit,  $x$  die horizontale Entfernung und  $v$  die Geschwindigkeit des Geschosses nach  $t$  Sek.; speziell  $x_s$  die Gipfelabszisse,  $v_s$  die Geschwindigkeit im Gipfel,  $t_s$  die Flugzeit bis zum Gipfel;  $X$  die Maximalschußweite (bei ca.  $45^\circ$  Abgangswinkel),  $T$  die zugehörige Gesamtflugzeit,  $v_e$  die Endgeschwindigkeit;  $P$  das Geschößgewicht,  $R^2 \pi$  der Geschößquerschnitt,  $q = P : R^2 \pi$  die Querschnittsbelastung. Für ein anderes Geschütz  $B$  sollen  $v_0', x', v', t', x_s', v_s', t_s', X', T', v_e', q'$  das Entsprechende bezeichnen. Die Werte  $x', t', v'$  sollen sich beim Geschütz  $B$  auf den Flugbahnpunkt mit der gleichen Tangentenneigung beziehen, wie  $x, t, v$  bei dem Geschütz  $A$ . Beiderseits sei ferner der Abgangswinkel, das Luftgewicht und die Geschößform dieselbe. Falls dann

$$v_0^2 : v_0'^2 = q : q',$$

ist

$$\begin{aligned} v_0^2 : v_0'^2 &= (q : q') = x : x' = x_s : x_s' = X : X' \\ &= v^2 : v'^2 = v_s^2 : v_s'^2 = v_e^2 : v_e'^2, \end{aligned}$$

$$\text{ferner } t : t' = t_s : t_s' = v_0 : v_0' = v : v' = v_s : v_s'.$$

**Beispiel.** Bei einem amerikanischen Küstenmörser ist  $2R = 25,4$  cm;  $P = 274$  kg; also Querschnittsbelastung  $q = 0,54$  kg/qcm;  $v_0 = 352$  m/sec; Maximalschußweite  $X = 10500$  m; dabei  $v_e = 298$  m/sec.

Dies soll übertragen werden auf ein anderes Geschütz mit  $q' = 0,343$  kg/qcm (bei gleichem  $\delta$  und  $i$ ). Wie groß muß die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0'$  sein; welches wird die Maximalschußweite  $X'$  und welches die Endgeschwindigkeit  $v_e'$ ?

$$X' : 10500 = 0,343 : 0,54, \quad v_0'^2 : 352^2 = 0,343 : 0,54;$$

$$v_e' : 298 = v_0' : v_0. \quad \text{Also } X' = 6670 \text{ m; } v_0' = 280 \text{ m/sec; } v_e' = 237 \text{ m/sec.}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß obige Regel in innigem Zusammenhang steht mit den von Newton und Froude aufgestellten und in allgemeiner Form von v. Helmholtz ausgesprochenen Modellübertragungsregeln (vgl. die Lit.-Note zu § 13). Ein Teil dieser Regeln lautet: Wenn man mit einem Modell Versuche anstellen will, die für einen anderen, in demselben Medium (z. B. Luft) bewegten Körper maßgebend sein sollen, und wenn dabei die linearen Dimensionen  $l$  im Verhältnis  $n$  verändert werden, so müssen die Quadrate der Geschwindigkeiten und die Quadrate der Zeiten ebenfalls im Verhältnis  $n$  geändert werden. Die Luftwiderstände  $W$  (auf den ganzen Querschnitt, also in kg gemessen) sind dann geändert im Verhältnis  $n^2$ .  $n = n^2$ , also  $v : v' = t : t' = \sqrt{n}$ ;  $W : W' = n^2$ , wo  $n = l : l'$  ist. Im vorliegenden Fall verhalten sich, bei gleicher Geschößform und gleichem Geschößmaterial, die Querschnittsbelastungen annähernd wie die Geschößlängen und diese wie die sämtlichen entsprechenden Längen, also wie  $n$ .

### § 19. Ein Umkehrungsproblem.

Wenn die Geschößbahn selbst bekannt wäre (entweder durch ihre Gleichung  $y = \psi(x)$  zwischen den Koordinaten  $x$  und  $y$  eines beliebigen Bahnpunkts, oder auch auf irgendeine Weise experimentell

gewonnen), so ließe sich für jeden Flugbahnpunkt  $(xy)$  die zugehörige Geschwindigkeit  $v$  des Geschosßschwerpunkts, die Horizontalneigung  $\vartheta$  der Bahntangente, die Flugzeit  $t$  und, wenn die Geschosßachse immer in der Bahntangente bliebe, der Luftwiderstand  $W = m \cdot cf(v)$  auf folgende Weise erhalten: man bilde die drei ersten Ableitungen von  $y$  oder  $\psi(x)$  nach  $x$ ; sie seien mit  $y' y'' y'''$  bezeichnet; so ist

$$v = \sqrt{g} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}}; \quad v \cdot \cos \vartheta = \sqrt{\frac{g}{-y''}};$$

$$cf(v) = -\frac{g}{2} \cdot \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{y''^2}; \quad dt = dx \cdot \sqrt{\frac{-y''}{g}}.$$

Die Zeit  $t$  ergibt sich also durch eine Integration aus letzterer Gleichung.

Differentiiert man nämlich  $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx} = y'$  nach  $\vartheta$ , so wird

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{d\vartheta} = y'' \cdot \frac{dx}{d\vartheta},$$

oder da  $\frac{dx}{d\vartheta} = -\frac{v^2}{g}$  ist, so wird  $\frac{1}{\cos^2 \vartheta} = -\frac{v^2}{g} \cdot y''$ , also  $v \cos \vartheta = \sqrt{\frac{g}{-y''}}$ . Da ferner  $\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ , so ist  $v = \sqrt{g} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}}$ , wobei entlang der Flugbahn  $y''$  negativ, somit  $\sqrt{-y''}$  reell ist.

Die Beziehung für  $t$  folgt aus  $v \cos \vartheta = \frac{dx}{dt}$ ,  $dt = \frac{dx}{v \cos \vartheta} = dx \sqrt{\frac{-y''}{g}}$ . Endlich ist nach der Hauptgleichung (3)  $cf(v) = \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{v \cdot d\vartheta}$ . Da hier  $v \cos \vartheta = \sqrt{\frac{g}{-y''}}$ , somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta}(v \cos \vartheta) &= \frac{d(v \cos \vartheta)}{dx} \cdot \frac{dx}{d\vartheta} = -\frac{v^2}{g} \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}\right) (y'')^{-\frac{3}{2}} \cdot y''' \\ &= + \frac{v^2 \cdot y'''}{2 \sqrt{-g} \sqrt{(y'')^3}}, \end{aligned}$$

$$\text{so wird } cf(v) = \frac{g \cdot v \cdot y'''}{2 \sqrt{-g} \sqrt{(y'')^3}} = -\frac{g \cdot y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{2 y''^2}.$$

Beispiele. 1. Daß die Flugbahnkurve des Geschosses in manchen Fällen zweckmäßig durch eine Hyperbel ersetzt werden könne, deren eine Asymptote vertikal steht, haben im Laufe der Entwicklung der Ballistik insbesondere Newton, Indra, Okinghaus und Stauber geäußert. E. Okinghaus hat in mehreren Aufsätzen die Ansicht vertreten, daß die lange gesuchte Flugbahnkurve in der Tat mit einer derartig liegenden Hyperbel identisch sei; später sah er sich veranlaßt, die beiden Asymptoten schief zu legen und betrachtete die hyperbolische Lösung des ballistischen Problems nur als eine Näherungslösung; dazu vgl. übrigens Nr. 20, Satz 6.



Angenommen, die Flugbahn wäre eine Hyperbel  $y = \frac{ax - x^2}{b - x} \cdot \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi$ , so findet sich

$$cf(v) \cdot \cos \vartheta = \frac{3 \cdot g \cdot a}{4 \cdot b^2 (b - a) \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot (b - x)^2, \quad (v \cos \vartheta)^2 = \frac{ga(b - x)^3}{2b^2(b - a) \operatorname{tg} \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b(b - a)}{(b - x)^2} \right), \quad t = \frac{2}{\sqrt{b}} \left( \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b - x}} - 1 \right) \sqrt{\frac{2b^2}{ag} (b - a) \operatorname{tg} \varphi}.$$

2. Piton-Bressant setzte als Flugbahnkurve eine Parabel 3. Ordnung voraus:  $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} (1 + mx)$ , wo  $m$  eine empirisch zu bestimmende

Konstante ist (vgl. auch § 32). In diesem Falle wird, da  $y'' = -\frac{3gm}{v_0^2 \cos^2 \varphi}$ , das Gesetz für die Verzögerung durch den Luftwiderstand das folgende:

$$cf(v) = -\frac{3m}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot v^4 \cdot \cos^2 \vartheta, \quad \text{dazu} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \left( 1 + \frac{3}{2} mx \right),$$

$$v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi \cdot (1 + 3mx)^{-\frac{1}{2}}, \quad t = \frac{2}{9mv_0 \cos \varphi} \cdot (\sqrt{1 + 3mx} - 1).$$

3. C. F. Close machte (s. o.) folgenden Vorschlag: Angenommen, das Prinzip des Schwenkens der Flugbahnen sei genau zutreffend und eine Schußtafel sei empirisch genau aufgestellt, so könnte man für die größte in der Schußtafel vorkommende Flugbahn des betreffenden Geschützes eine große Zahl von Flugbahnpunkten durch Schwenken der kleineren Bahnen erhalten. Diese Punkte sind alsdann durch ihre Polarkoordinaten gegeben. Die Beziehung zwischen den Radienvektoren und den Polarwinkeln stellt man durch eine Gleichung dar und erhält somit nach dem obigen allgemeinen Prinzip die Werte  $v$ ;  $v \cos \vartheta$ ;  $t$ ;  $cf(v)$  für einen beliebigen Punkt der größten Flugbahn. Man wäre somit imstande, allein mit Hilfe einer Schußtafel das Luftwiderstandsgesetz zu gewinnen. Die zugehörigen Berechnungen haben G. Greenhill und C. E. Wolff eingehend gegeben. Über die Zuverlässigkeit der Annahmen vgl. § 11 und 42.

## § 20. Allgemeine Eigenschaften jeder Flugbahn.

Die Kenntnis der in § 17 aufgestellten Differentialgleichungen genügt, um unabhängig von der Annahme eines besonderen Luftwiderstandsgesetzes, also in allgemeiner Gültigkeit für jede Flugbahn im luftgefüllten Raum, eine Reihe von Eigenschaften abzuleiten. Voraussetzung ist dabei lediglich, daß die Luftwiderstandresultante stets in der Flugbahntangente liegt und daß die Verzögerung  $cf(v)$  durch den Luftwiderstand nur eine stetige Funktion der Geschwindigkeit  $v$  allein ist. Im folgenden sollen vornehmlich jene allgemeinen Eigenschaften der ballistischen Kurve abgeleitet werden, die den Unterschied zwischen der Flugbahn im luftgefüllten und im luftleeren Raum besonders kennzeichnen, (in der ballistischen Literatur spricht man in dieser Hinsicht vielfach von der dynamischen und der geometrischen Unsymmetrie der ballistischen gegenüber der parabolischen Bahn). Diese Eigenschaften lassen sich aus den Systemgleichungen in § 17 ablesen.

1. Die Horizontalkomponente  $v \cos \vartheta$  der Bahngeschwindigkeit  $v$  des Geschosses nimmt entlang der Flugbahn fortwährend ab.

Beweis. In der Hauptgleichung  $gd(v \cos \vartheta) = cf(v) \cdot v \cdot d\vartheta$  ist  $c$  und  $f(v)$  positiv,  $d\vartheta$  ist stets negativ, da der Horizontalneigungswinkel  $\vartheta$  vom Anfangswert  $\varphi$  an abnimmt; somit ist die rechte Seite der Gleichung negativ, also auch  $d(v \cos \vartheta)$  negativ oder  $v \cos \vartheta$  nimmt dauernd ab.

Zahlenbeispiel: Granate einer Feldkanone;  $v_0 = 442$  m/sec,  $\varphi = 15\frac{1}{4}$  Grad, Kaliber 8,8 cm, Geschossgewicht  $P = 7,5$  kg. Für die horizontalen Entfernungen  $x = 0, 3000, 5000$  m ist  $v \cos \vartheta = 425, 223, 168$  m/sec.

2. Der spitze Auffallwinkel  $\omega$  ist größer als der Abgangswinkel  $\varphi$ . Allgemein ist für zwei Punkte  $A$  und  $A_1$  gleicher Ordinaten ( $A$  auf dem aufsteigenden und  $A_1$  auf dem absteigenden Ast gelegen) der spitze Horizontalneigungswinkel  $\vartheta_1$  der Tangente in  $A_1$  größer als  $\vartheta$  in  $A$  (vgl. Abb. 47).

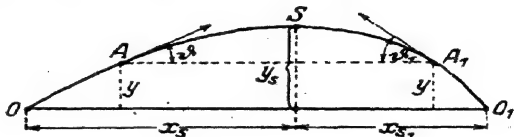


Abb. 47.

Beweis. Die Gleichung

$$g dy = -v^2 \cdot d\vartheta \cdot \operatorname{tg} \vartheta$$

oder

$$-\operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = +g \cdot \frac{dy}{(v \cos \vartheta)^2}$$

werde integriert, erstens vom Anfangspunkt  $O$  bis zum Gipfel  $S$  oder von  $\vartheta = \varphi$  bis  $\vartheta = 0$  oder auch, was dasselbe ist, von  $y = 0$  bis  $y = y_s$ ; andererseits vom Aufschlagspunkt  $O_1$  bis zum Gipfel  $S$  ( $\vartheta = \omega$  bis  $\vartheta = 0$  oder  $y = 0$  bis  $y = y_s$ ), so ist

$$\text{einerseits } +\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi = \int_{y_s}^0 \frac{g \cdot dy}{(v \cos \vartheta)^2} \quad \text{andererseits } \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \omega = \int_0^{y_s} \frac{g \cdot dy}{(v_1 \cos \vartheta_1)^2}$$

Im zweiten Integral ist, da  $v \cos \vartheta$  immer abnimmt, der Nenner durchweg kleiner als der Nenner im ersten Integral oder es ist der Bruchausdruck unter dem zweiten Integral immer größer, als derjenige im ersten; also ist das zweite Integral größer als das erste, somit  $\operatorname{tg} \omega > \operatorname{tg} \varphi$ ;  $\omega > \varphi$ . Dasselbe gilt, wenn von  $A$  bzw.  $A_1$  aus integriert wird. Gleiches Zahlenbeispiel wie bei Satz 1: Es wird  $\omega = 24^\circ 53'$ ;  $\varphi = 15\frac{1}{4}$  Grad.

3. Die Gipfelhöhe  $y_s$  der Flugbahn liegt der Größe nach jedenfalls zwischen  $\frac{1}{4} X \cdot \operatorname{tg} \varphi$  und  $\frac{1}{4} X \cdot \operatorname{tg} \omega$  ( $X$  die Schußweite).

Einen strengeren Beweis dieses Satzes hat im ballistischen Laboratorium 1914 Hauptm. Anér (schwed. Infant.) ausgearbeitet. Hier nur folgendes zur Plausibelmachung des Satzes: Es sei daran erinnert, daß für die parabolische

Flugbahn im leeren Raum  $y_s = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$ ,  $X = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$ , also  $y_s = \frac{X}{4} \operatorname{tg} \varphi$ ; vgl. Abb. 48a. Man denke sich nun (vgl. Abb. 48b) über derselben Strecke  $OO_1 = X$  erstens die parabolische Bahn  $OBO_1$  mit Abgangs- und Auffallwinkel  $\varphi$ , für diese ist die Gipfelhöhe  $AB = \frac{1}{4} X \operatorname{tg} \varphi$ ; zweitens die parabolische Flugbahn  $OCO_1$  mit Abgangs- und Auffallwinkel  $\omega$ ; für diese ist die Gipfelhöhe  $AC = \frac{1}{4} X \operatorname{tg} \omega$ ;

drittens die wirkliche Flugbahn  $OSO_1$  mit Abgangswinkel  $\varphi$  und Auffallwinkel  $\omega$ ; für diese ist die Gipfelhöhe  $DS$ . Letztere ist jedenfalls kleiner als  $AC$  und größer als  $AB$ , da die wirkliche Flugbahn  $OSO_1$  zwischen den beiden parabolischen Flugbahnen  $OBO_1$  und  $OCO_1$  verlaufen muß; also liegt  $DS$  zwischen  $\frac{1}{2} X \cdot \operatorname{tg} \varphi$  und  $\frac{1}{2} X \cdot \operatorname{tg} \omega$ .

Dasselbe Zahlenbeispiel wie bei Satz 1:  $X = 4501$  m; Gipfelhöhe zwischen 320 m und 520 m. Der wahrscheinlichste Wert ist also das Mittel 420 m. Die Berechnung nach Siacci (§ 27) ergab 416 m, mit den Tabellen 10 im Anhang 425 m.

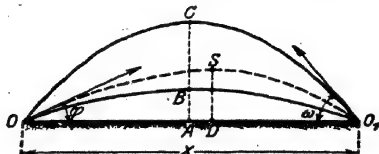
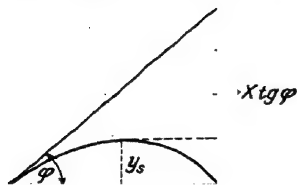


Abb. 48b.

Je nachdem man das arithmetische oder das geometrische Mittel benützt, erhält man zur Berechnung der Gipfelhöhe eine Formel, die wie es scheint zuerst von Weygand-Plönies aufgestellt wurde, bzw. eine andere, die in Frankreich seit längerer Zeit Verwendung findet, nämlich:

$$y_s = \frac{X}{8} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega), \quad \text{bzw.} \quad y_s = \frac{X}{4} \sqrt{\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \omega}.$$

4. Sind  $A$  und  $A_1$  zwei Flugbahnpunkte von derselben Höhe  $y$  über dem Mündungshorizont  $OO_1$ , so ist die Geschwindigkeit  $v$  im Punkt  $A$  des aufsteigenden Astes der Flugbahn größer als die Geschwindigkeit  $v_1$  im Punkt  $A_1$  des absteigenden Astes.

Beweis. Die Gleichung der Bewegung des Geschosses längs der Bahntangente ist nach § 17  $\frac{dv}{ds} = -cf(v) - g \sin \theta$ , oder wenn  $s$  den Flugbahnbogen bis zu dem betreffenden Punkt darstellt,  $\frac{1}{2} d(v^2) = -cf(v) \cdot ds - g \sin \theta \cdot ds = -cf(v) ds - g \cdot dy$ . Wird diese Gleichung von  $A$  bis  $A_1$  integriert, so wird  $\int dy = 0$  und es bleibt  $\frac{1}{2} (v_1^2 - v^2) = -c \int_A^{A_1} f(v) \cdot ds$ . Die rechte Seite ist negativ, somit ist  $v_1 < v$ . [Die benützte Gleichung hätte auch ohne weiteres mittels der Überlegung angeschrieben werden können, daß die Änderung  $\frac{m}{2} (v_1^2 - v^2)$  der lebendigen Kraft des Geschosses von  $A$  bis  $A_1$  gleich der Summe der Arbeiten von Luftwiderstand und Schwere ist, welche letztere gleich Null wird, da  $A$  und  $A_1$  in gleicher Höhe liegen sollen,  $\frac{m}{2} (v_1^2 - v^2) = - \int mcf(v) ds$ .]

Zahlenbeispiel wie in Satz 1: für  $y = 0$ ;  $v_0 = 442$  m/sec,  $v_1 = 197$  m/sec.

5. Der Gipfelpunkt  $S$  der Flugbahn liegt, in horizontaler Richtung gemessen, dem Auftreffpunkt  $O_1$  näher als dem Abgangspunkt  $O$ .

Beweis. Die Gleichung  $dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} \vartheta}$  werde integriert, erstens vom Anfangspunkt  $O$  bis zum Gipfel  $S$  oder von  $y = 0$  bis  $y = y_s$ , dabei sei  $\vartheta$  der spitze Horizontalneigungswinkel der Tangente, zweitens vom Auffallpunkt  $O_1$  bis zum Gipfel, spitzer Tangentenwinkel  $\vartheta_1$ ; so hat man  $x_s = \int_0^{y_s} \frac{dy}{\operatorname{tg} \vartheta}$ ,  $x_{s_1} = \int_0^{y_s} \frac{dy}{\operatorname{tg} \vartheta_1}$ . Nun ist nach Satz 2, für dasselbe  $y$ ,  $\vartheta_1 > \vartheta$ , also  $\frac{dy}{\operatorname{tg} \vartheta_1} < \frac{dy}{\operatorname{tg} \vartheta}$ , somit  $x_{s_1} < x_s$ .

Zahlenbeispiel wie in Satz 1: Die Rechnung nach Siacci ergibt:  $x_s = OD = 2500$  m;  $x_{s_1} = O_1D = 2001$  m.

6. Der absteigende Ast der Flugbahn besitzt eine vertikale Asymptote, die den Abstand  $\frac{1}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} v^2 \cdot d\vartheta$  vom Anfangspunkt hat; die Bahngeschwindigkeit  $v$  nähert sich dabei einem Grenzwert  $v_1$ , der, wenn  $c$  als konstant betrachtet wird, aus der Gleichung  $cf(v_1) = g$  zu berechnen ist.

Beweis. Es ist  $dt = -\frac{1}{g} \cdot \frac{v \cdot d\vartheta}{\cos \vartheta} = -\frac{v \cos \vartheta}{g} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ . Wird diese Gleichung integriert von  $t = 0$  bis  $t = t$ , so läßt sich auf der rechten Seite ein Mittelwert  $\mu$  von  $v \cos \vartheta$  heraussetzen, da  $v \cos \vartheta$  stets endlich und stetig ist und da  $\frac{1}{\cos^2 \vartheta}$

sein Vorzeichen nicht wechselt. Somit ist  $t = -\frac{1}{g} \mu \cdot \int_{\varphi}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = -\frac{\mu}{g} (\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi)$ .

Für  $t = \infty$  wird die linke Seite unendlich, somit auch die rechte Seite, und da  $\mu$  und  $\operatorname{tg} \varphi$  endlich sind, muß  $\operatorname{tg} \vartheta = -\infty$ ,  $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$  werden, d. h. die Verlängerung der Geschosßbahn über den Mündungshorizont hinaus konvergiert gegen eine Vertikale. Daß diese Vertikale, der sich der absteigende Ast mehr und mehr nähert, eine im Endlichen verlaufende Gerade ist, erkennt man aus der Beziehung  $dx = -\frac{v}{g} \cdot d\vartheta$ ,

$x_1 = -\frac{1}{g} \int_{\varphi}^{\infty} v^2 \cdot d\vartheta$ . Hier ist  $v^2$  stets

endlich; denn die Bahngeschwindigkeit  $v$  wird notwendig folgenden Verlauf haben (vgl. Abb. 49a):

Vom Anfangswert  $v_0$  ab nimmt sie, falls  $\varphi$  von Null verschieden und positiv ist, zunächst ab infolge der Arbeit der Schwere und des Luftwiderstandes. Nachdem sie ein Minimum erreicht hat, von dem nachher die Rede sein soll, nimmt sie wegen der Arbeit der Schwere wieder zu, bis schließlich der Luftwiderstand gleich dem Gewicht des Geschosses geworden ist; denn wenn dieser Grenzwert  $v_1$  er-



Abb. 49a.

reicht ist, was theoretisch im allgemeinen erst nach unendlich langer Zeit möglich ist, heben sich die auf das Geschöß wirkenden Kräfte  $mc f(v)$  und  $mg$  auf und das Geschöß bewegt sich mit dieser konstanten Geschwindigkeit  $v_1$  weiter (immer dabei  $c$  als konstant betrachtet).

Somit ist das Integral  $\int_{\varphi}^{\vartheta} v^2 \cdot d\vartheta$  stets endlich, welchen Wert zwischen  $\varphi$  und  $-\frac{\pi}{2}$  auch  $\vartheta$  haben möge; der Grenzwert  $x_{\infty}$  von  $x$  ist somit

$$x_{\infty} = -\frac{1}{g} \int_{\varphi}^{-\frac{\pi}{2}} v^2 \cdot d\vartheta = +\frac{1}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} v^2 \cdot d\vartheta.$$

**Zahlenbeispiel.** Am 28. April 1892 wurde (einer anderweitigen Veröffentlichung zufolge) bei Meppen mit den folgenden Anfangsbedingungen ein Schuß abgegeben: Kaliber 24 cm; Geschößgewicht 215 kg; Abrundungsradius der ogivalen Geschößspitze 2 Kaliber, Anfangsgeschwindigkeit 640 m/sec, Abgangswinkel  $44^\circ$ , das Luftgewicht sei angenommen zu 1,22 kg/cbm. Für diesen Schuß gibt die Rechnung folgendes: horizontale Schußweite 19066 m, Flugzeit 68,8 sec, Endgeschwindigkeit 380,4 m/sec, spitzer Auffallwinkel  $58^\circ 21,5'$ , Gipfelabszisse 10840 m, Gipfelordinate 6150 m. Ferner ist der Grenzwert  $v_1$ , dem die Geschößgeschwindigkeit immer mehr zustrebt, etwa = 580 m/sec und die Entfernung  $x_{\infty}$  der vertikalen Asymptote vom Abgangspunkt etwa = 29300 m.

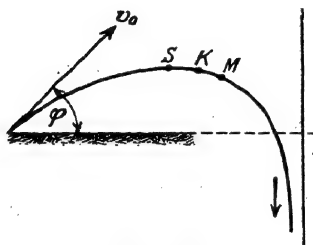


Abb. 49b.

7. Die Werte eines Minimums  $v_m$ , das die Geschößgeschwindigkeit  $v$  annimmt, sind an die Bedingung gebunden  $cf(v_m) = -g \sin \vartheta$ . Wenn  $c$  als konstant betrachtet wird, kann nur ein einziges Minimum vorkommen; der Flugbahnpunkt, in dem dieser Wert erreicht wird, liegt jenseits des Gipfels, also auf dem absteigenden Ast.

**Beweis.** Soll diejenige Neigung der Bahntangente ermittelt werden, bei der  $v$  ein Minimum wird, so ist die Ableitung von  $v$  nach  $\vartheta$  gleich Null zu setzen; nun ist allgemein  $\frac{dv}{d\vartheta} = \frac{v}{\cos \vartheta} \left( \frac{cf(v)}{g} + \sin \vartheta \right)$ , also ergibt sich ohne weiteres der erste Teil des Satzes.

Ferner läßt sich die Bahngeschwindigkeit  $v$  in jedem Punkt in eine horizontale Komponente  $v \cos \vartheta$  und eine vertikale Komponente  $v \sin \vartheta$  zerlegen. Vom Abgangspunkt bis zum Gipfel nehmen beide Komponenten ab, also auch die Resultante  $v$ . Im Gipfel ist die horizontale Komponente im weiteren Abnehmen begriffen, die vertikale Komponente dagegen hat ihr Minimum erreicht oder mit anderen Worten, sie ist momentan konstant, somit ist die Änderung der Resultante  $v$  durch das Verhalten der hier variablen, also der horizontalen Komponente bedingt, und da diese abnimmt, so ist  $v$  im Gipfel im Abnehmen begriffen. Da  $v$  auf dem beliebig verlängert gedachten absteigenden Ast jedenfalls später wieder wächst, so muß das Minimum jenseits des Gipfels liegen.

Der genauere Ort ist daraus zu ermitteln, daß mit Hilfe der betreffenden Lösungsmethode eine Beziehung zwischen  $v$  und  $\vartheta$  aufgestellt und aus dieser und aus  $cf(v) + g \sin \vartheta = 0$  das  $v$  und  $\vartheta$  des Minimumspunkts berechnet wird.

Beispiel wie bei Satz 6: Die Rechnung ergab, daß für  $\vartheta = \text{etwa } -15^\circ$   $v$  sein Minimum (etwa 251 m/sec) annimmt. Die Koordinaten des betreffenden Punkts sind  $x = \text{etwa } 12570$  m,  $y = \text{etwa } 5880$  m.

8. Krümmung der Flugbahn. Der Punkt  $K$  der größten Krümmung ist durch die Bedingung gegeben  $cf(v) = -\frac{3}{2}g \sin \vartheta$ ; er liegt jedenfalls auf dem absteigenden Ast, und zwar zwischen dem Gipfel  $S$  und dem Punkt  $M$  kleinster Bahngeschwindigkeit (vgl. Abb. 49 b).

Beweis. Die Beschleunigung des Geschosses in der Richtung der Kurvennormalen ist einerseits  $g \cos \vartheta$  und andererseits  $\frac{v^2}{\rho}$  ( $\rho$  der Krümmungsradius); also ist  $|\rho| = \frac{v^2}{g \cos \vartheta}$ ; dieser Ausdruck wird zu einem Minimum oder die Krümmung zu einem Maximum, wenn  $\frac{d\rho}{d\vartheta} = 0$  ist. Nun hat man

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{1}{g} \frac{2v \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{dv}{d\vartheta} + v^2 \cdot \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta};$$
 wird hier der Ausdruck  $\frac{dv}{d\vartheta} = v \cdot \operatorname{tg} \vartheta + \frac{v \cdot cf(v)}{g \cdot \cos \vartheta}$  (vgl. § 17, Gleichung 3a) eingesetzt, so ergibt sich die Bedingung eines Extremums zu:  $0 = 2v \cos \vartheta \left( v \cdot \operatorname{tg} \vartheta + \frac{v \cdot cf(v)}{g \cdot \cos \vartheta} \right) + v^2 \cdot \sin \vartheta$  oder  $3g \sin \vartheta + 2 \cdot cf(v) = 0$ , wie oben; aus dieser Bedingung läßt sich der Punkt  $K$  stärkster Bahnkrümmung ermitteln. Was die Lage dieses Punktes und die Art des Extremums betrifft, so sei die folgende Überlegung angestellt:

Man betrachte den Verlauf der Änderung von  $\rho = \frac{v^2}{g \cdot \cos \vartheta}$  erstens vom Anfangspunkt  $O$  bis zum Gipfel  $S$  und zweitens vom Punkt  $M$  kleinster Bahngeschwindigkeit ab weiterhin. Bis zum Gipfel  $S$  nimmt  $v$  ab, also auch  $v^2$ ;  $\vartheta$  nimmt gleichfalls ab oder  $\cos \vartheta$  zu oder  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  ab; aus beiden Gründen nimmt von  $O$  nach  $S$  hin der Krümmungsradius  $\rho$  ab oder die Bahnkurve krümmt sich vom Abgangspunkt nach dem Gipfel zu immer stärker. Andererseits im Punkt  $M$  kleinster Geschwindigkeit  $v$  ist in dem Ausdruck  $\frac{v^2}{g \cdot \cos \vartheta}$  der Zähler  $v^2$  momentan konstant,  $\vartheta$  ist negativ geworden und  $\cos \vartheta$  nimmt ab,  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  nimmt zu; also richtet sich in der Gegend des Punktes  $M$  die Änderung von  $\rho$  nach der Änderung von  $\frac{1}{\cos \vartheta}$ , d. h. es nimmt  $\rho$  wieder zu. Da die Krümmung stetig verläuft, liegt somit ein Minimum von  $\rho$  zwischen  $S$  und  $M$ .

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß der Ausdruck  $\rho = \frac{v^2}{g \cdot \cos \vartheta}$  von der Annahme eines speziellen Luftwiderstandsgesetzes völlig unabhängig ist, da  $f(v)$  nicht darin vorkommt, daß somit alle Flugbahnen mit gleichem  $v$  und  $\vartheta$  unter sich und mit der Flugbahnparabel des leeren Raumes drei unendlich nahe Punkte gemeinsam haben.

Dies hat zur Folge, daß man häufig mit Vorteil die wirkliche Flugbahn auf eine kurze Strecke hin durch die betreffende Flugbahnparabel des leeren Raumes ersetzen kann, also in der Nähe des Abgangspunktes  $O$  (s. Abb. 48b zu Satz 3) durch die Parabel  $OBO_1$  mit gleichen Werten von  $v_0$  und  $\varphi$  oder in der Nähe des Auffallpunktes  $O_1$  durch die Parabel  $OCO_1$  mit gleichen Werten von  $v_e$  und  $\omega$ .

Dies kommt z. B. in der Ballistik der Handfeuerwaffen in Betracht bei der Messung des Abgangsfehlerwinkels zur Ermittlung der Senkung  $y$  des Geschosses oder bei der Bestimmung des bestrichenen Raums.

Zahlenbeispiel wie bei Satz 6: Die Rechnung ergab für die Koordinaten des Punktes  $K$  stärkster Krümmung  $x = \text{etwa } 12000 \text{ m}$ ,  $y = \text{etwa } 6000 \text{ m}$ , dabei  $\vartheta = -10^\circ$ .

Bei diesem Anlaß sei noch derjenige weitere Punkt erwähnt, in dem die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Bahntangente sich gegen den Horizont neigt, ihr Maximum hat. Die Geschwindigkeit in diesem Punkt sei  $v_\omega$ . Man erhält dafür, indem man mittels Gleichung (4) von § 17  $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$  bildet und gleich Null setzt, leicht die Bedingung:  $cf(v_\omega) + 2g \sin \vartheta = 0$ . Zusammengestellt hat man für den Punkt mit der kleinsten Bahngeschwindigkeit ( $v_m$ ); für den Punkt mit der größten Bahnkrümmung (Geschwindigkeit  $v_{kr}$ ) und für den Punkt mit der größten Winkelgeschwindigkeit der Tangentenneigung (Geschwindigkeit  $v_\omega$ ) die folgenden Bedingungen, die die betreffenden Geschößgeschwindigkeiten mit den zugehörigen Neigungswinkeln  $\vartheta$  der Bahntangente gegen die Horizontale verknüpfen:

$$c \cdot f(v_m) + g \sin \vartheta = 0, \quad (\text{Punkt kleinster Geschwindigkeit}), \quad (a)$$

$$c \cdot f(v_{kr}) + \frac{2}{3} g \sin \vartheta = 0, \quad (\text{Punkt stärkster Bahnkrümmung}), \quad (b)$$

$$c \cdot f(v_\omega) + 2 g \sin \vartheta = 0, \quad (\text{Punkt größter Winkelgeschwindigkeit } \frac{d\vartheta}{dt}). \quad (c)$$

9. Die vertikale Geschwindigkeitskomponente wächst auf dem ganzen absteigenden Ast. Sie ist in zwei Punkten  $A$  und  $A_1$  gleicher Ordinatengröße  $y$  (vgl. Abb. 47 zu Satz 2) auf dem aufsteigenden Ast (in  $A$ ) absolut genommen größer als auf dem absteigenden Ast (in  $A_1$ ).

Beweis. Setzt man in die Systemgleichung (2) von § 17, also in  $d(v \sin \vartheta) = -(g + cf(v) \sin \vartheta) \cdot dt$  für  $dt$  seinen Wert aus  $\frac{dy}{dt} = v \sin \vartheta$  ein, so wird

$$\frac{1}{2} d(v \sin \vartheta)^2 = -(g + cf(v) \sin \vartheta) \cdot dy.$$

Diese Gleichung werde integriert erstens auf dem aufsteigenden Ast von  $A$  bis  $S$ , also links von  $v \sin \vartheta$  bis  $v_s \sin 0$ , rechts von  $y$  bis  $y_s$ ; zweitens auf dem absteigenden Ast vom Scheitel  $S$  bis Punkt  $A_1$ , d. h. links von  $v_s \sin 0$  bis  $v \sin \vartheta$ , rechts von  $y_s$  bis  $y$ , so erhält man

$$0 - \frac{1}{2} (v \sin \vartheta)^2 = - \int_y^{y_s} (g + cf(v) \sin \vartheta) dy, \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} (v \sin \vartheta)^2 - 0 = - \int_{y_s}^y (g + cf(v) \sin \vartheta) dy = + \int_y^{y_s} (g + cf(v) \sin \vartheta) dy. \quad (b)$$

Wenn man in dieser letzteren Gleichung unter  $\vartheta$  gleichfalls, wie in der Gleichung

chung (a), den spitzen Winkel  $\vartheta$  zwischen Bahntangente und Horizontaler versteht, so ist in (b)  $\sin \vartheta$  negativ, also hat man zusammen

$$\frac{1}{2} (v \sin \vartheta)^2 = + \int_y^{y_s} (g + cf(v) \sin \vartheta) dy \quad \text{aufsteigender Ast,} \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} (v \sin \vartheta)^2 = + \int_y^{y_s} (g - cf(v) \sin \vartheta) dy \quad \text{absteigender Ast.} \quad (b)$$

In den Integralen auf der rechten Seite sind die sämtlichen Funktionswerte von (b) kleiner als die entsprechenden von (a), somit ist auch das Integral in (b) kleiner als dasjenige in (a) und daher  $v \sin \vartheta$  in (b) kleiner als  $v \sin \vartheta$  in (a).

10. Die Flugzeit ist auf dem absteigenden Ast bis zum Mündungshorizont größer als auf dem aufsteigenden Ast.

Beweis. Die Flugzeit auf dem aufsteigenden Ast von  $O$  bis  $S$  (vgl. die Abb. 47 zu Satz 2) sei mit  $t_1$ , die Flugzeit auf dem absteigenden Ast von  $S$  bis  $O_1$  mit  $t_2$  bezeichnet.

Gemäß § 17, Systemgleichung (4), ist  $dt = -\frac{v \cdot d\vartheta}{g \cdot \cos \vartheta}$ . Diese Gleichung werde erstens von  $O$  bis  $S$ , also links von  $t=0$  bis  $t=t_1$ , rechts von  $\vartheta=\varphi$  bis  $\vartheta=0$  integriert; zweitens von  $O_1$  bis  $S$ , also links von  $t=0$  bis  $t=t_2$  und rechts, wo wiederum  $\vartheta$  den spitzen Winkel bedeuten möge, von  $\vartheta=\omega$  bis  $\vartheta=0$ . Dies gibt

$$t_1 = - \int_{\vartheta=\varphi}^{\vartheta=0} \frac{v \cdot d\vartheta}{g \cos \vartheta} = + \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\varphi} \frac{v \cdot d\vartheta}{g \cos \vartheta}; \quad (a)$$

$$t_2 = - \int_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=0} \frac{v \cdot d\vartheta}{g \cos \vartheta} = + \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\omega} \frac{v \cdot d\vartheta}{g \cos \vartheta}. \quad (b)$$

Beide Integrale sind endlich, da durchweg  $v$  und  $\cos \vartheta$  endlich sind: also sind auch  $t_1$  und  $t_2$  endlich. Man kann folglich auch die Gleichung

$$dt = \frac{dy}{v \sin \vartheta}$$

benützen und diese, trotz des im Gipfel zu Null werdenden Nenners, integrieren, erstens auf dem aufsteigenden Ast von  $O$  bis  $S$ , also von  $y=0$  bis  $y=y_s$  und zweitens auf dem absteigenden Ast rückwärts von  $O_1$  bis  $S$ , also gleichfalls von  $y=0$  bis  $y=y_s$  (dabei  $\vartheta$  wiederum der spitze Winkel). So wird

$$t_1 = \int_{y=0}^{y=y_s} \frac{dy}{v \sin \vartheta} \quad \text{aufsteigender Ast,} \quad (a)$$

$$t_2 = \int_{y=0}^{y=y_s} \frac{dy}{v \sin \vartheta} \quad \text{absteigender Ast.} \quad (b)$$

Hier ist, wie vorhin mit Satz 9 bewiesen wurde,  $v \sin \vartheta$  in (b) bei gleichem  $y$



kleiner als  $v \sin \vartheta$  in (a), also  $\frac{1}{v \sin \vartheta}$  in (b) größer als in (a), folglich ist auch das Integral in (b) größer als das Integral in (a) oder es ist  $t_2 > t_1$ .

11. Der aufsteigende Ast  $s_1$ , vom Abgangspunkt  $O$  bis zum Gipfel  $S$ , ist länger als der absteigende Ast  $s_2$ , vom Gipfel  $S$  bis zum Auffallpunkt  $O_1$  im Mündungshorizont.

Beweis. Es ist  $ds = \frac{dy}{\sin \vartheta}$ . Diese Gleichung werde erstens von  $O$  bis  $S$  integriert, also links von  $s = 0$  bis  $s = s_1$ , rechts von  $y = 0$  bis  $y = y_s$ ; zweitens vom Auffallpunkt  $O_1$  rückwärts bis  $S$ , wobei  $\vartheta$  wiederum den spitzen Winkel bedeuten soll. Man erhält so:

$$s_1 = \int_0^{y_s} \frac{dy}{\sin \vartheta} \quad \text{aufsteigender Ast,} \quad (a)$$

$$s_2 = \int_0^{y_s} \frac{dy}{\sin \vartheta} \quad \text{absteigender Ast.} \quad (b)$$

Nach Satz 2 ist hier, bei gleichem  $y$ , der Winkel  $\vartheta$  in (b) durchweg größer als in (a), also  $\frac{1}{\sin \vartheta}$  in (b) durchweg kleiner als in (a); somit ist  $s_2 < s_1$ .

Diese Sätze können sich erheblich modifizieren, wenn  $c$  nicht als konstant betrachtet, z. B. wenn die Abnahme des Luftgewichts nach oben berücksichtigt wird.

Über die Frage, zu welchem Abgangswinkel  $\varphi$  bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  die größte Schußweite im luftgefüllten Raum gehört, vergleiche man die Bemerkungen der Lit.-Note.

Danach ist der Abgangswinkel  $\varphi$  größter Schußweite nicht notwendig kleiner als  $45^\circ$ ; er kann vielmehr unter Umständen, insbesondere wenn das Geschöß in große Höhen gelangt, größer als  $45^\circ$ , bis  $\varphi \geq 50^\circ$ , betragen. Zonenweise Berechnungen von Flugbahnen mit Schußweiten über 40 km hat zuerst die Firma Krupp und etwas später M. de Sparre angestellt (C. R. Paris 1915, Bd. 161, S. 767 und 1916, Bd. 162, S. 496). Dieser hat dabei ein Geschöß von 920 kg Gewicht, Kaliber 40,6 cm, Formkoeffizient  $i = 0,75$  und Anfangsgeschwindigkeit 940 m/sec zugrunde gelegt und gefunden, daß, infolge der Verminderung der Luftdichte mit zunehmender Höhe, die Geschwindigkeit  $v$  des Geschosses in seiner Bahn durch ein Minimum, dann durch ein Maximum hindurchgeht und schließlich wieder abnimmt. Er erhielt z. B. in den Höhen  $y$  bzw.  $= 0$ ; 7003; 10990; 12171; 10403; 5799; 0 Meter  $v$  bzw.  $= 940$ ; 592; 443; 386; 394; 437; 433 m/sec. Solche Untersuchungen lassen sich mit dem neueren graphischen Verfahren (§ 34) auch ohne Zoneneinteilung einwandfrei durchführen.

## Über die systematische Einteilung der verschiedenen Lösungsmethoden, über die Auswahl der geeigneten Methode und die Beurteilung der Güte einer Methode.

Vom Standpunkt der reinen Mathematik aus könnte man vielleicht geneigt sein, anzunehmen, daß es an der Zeit wäre, die Ballistik von einer Unzahl von Rechnungsmethoden zur Lösung des speziellen ballistischen Problems zu reinigen, die im Laufe der Entwicklung der Ballistik aufgestellt worden sind, und nur noch die gut konvergente und (da im vorliegenden Falle die Lipschitzsche Bedingung erfüllt ist) auch wirklich anwendbare Methode der sukzessiven Approximationen beizubehalten und zu benützen. Denn, wie in § 18 sich zeigte, gestattet die Hauptgleichung (3) oder auch das gleichwertige Paar der Grundgleichungen (1) und (2) von § 17 eine Integration in geschlossener Form mit den elementaren Integrationsmethoden nur unter zwei Annahmen: Entweder wird für die Luftwiderstandsverzögerung  $c \cdot f(v)$  ein System von Zonengesetzen, insbesondere von Potenzgesetzen  $c \cdot v^n$ , vorausgesetzt; diese Gesetze aber, wird man einwenden, stellen nicht die zur Zeit beste Luftwiderstandsfunktion dar. Oder wird die Hauptgleichung durch eine angenäherte Hauptgleichung ersetzt, und in diesem Fall werden auch weiterhin eine Reihe von Näherungen angewendet, jedenfalls muß aber erst noch der Fehler abgeschätzt werden, der durch die Vertauschung der richtigen Hauptgleichung mit einer unrichtigen entsteht. Dagegen die Methode der sukzessiven Approximation bietet den Vorteil, daß sie anwendbar ist auch auf das neue, nur in Tabellenform vorliegende Luftwiderstandsgesetz von O. v. Eberhard und daß sie einen beliebigen hohen Genauigkeitsgrad gestattet.

Nach der Ansicht des Verfassers ist es jedoch aus zwei Gründen noch für längere Zeit unmöglich, sich auf diesen Standpunkt zu stellen: Erstens wird gerade in den Fällen, wo die Methode der sukzessiven Approximation in erster Linie in Betracht kommen müßte, namentlich wo Steil-Flugbahnen zu berechnen sind, die Grundvoraussetzung für das spezielle außerballistische Problem, daß der Luftwiderstand als in Richtung der Bahntangente wirkend angesehen, das Geschloß wie ein Massenpunkt behandelt werden könne, am wenigsten erfüllt. Während bei den gewöhnlichen Flachbahnen die Wirkungen der Kreiselbewegungen des rotierenden Langgeschosses und diejenigen des Magnus-Effekts im allgemeinen von so geringer Bedeutung für die Gestalt der Flugbahn sind, daß mit jener Voraussetzung eines pfeilartigen Geschloßflugs die zahlreichen Einzelaufgaben der Ballistik in ausreichender Genauigkeit (darüber s. w. u.) gelöst werden können, spielen jene sekundären Einflüsse eine um so größere Rolle, je größer der Abgangswinkel, je steiler die Flugbahn ist. Wenn man also trotzdem das Problem unter Beibehaltung jener Voraussetzung eines geraden Pfeilflugs mittels der Methode der sukzessiven Approximation zu lösen versucht, so wird die erreichte hohe Genauigkeit zu einer bloß scheinbaren, sie wird durch jene Einflüsse illusorisch gemacht. Denn wenn etwa daran gedacht werden würde, eben mit Hilfe jener Methode gleichzeitig alle jene Einflüsse in Rechnung zu ziehen, so müßte gesagt werden, daß die Aerodynamik noch nicht so weit entwickelt ist, daß dies möglich wäre. Dazu müßten erst noch zahlreiche und schwierige aerodynamische Messungen mit hohen Geschwindigkeiten der Translation und Rotation durchgeführt und zu Gesetzmäßigkeiten zusammengefaßt sein. (Zwar wird später in diesem Band eine Steilflugbahn mit Rücksicht auf Kreiselwirkung und Magnus-Effekt berechnet werden, aber nur für einen Fall mit kleiner Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , wo die betreffenden Messungen von L. Prandtl vorliegen.) Zweitens braucht die ballistische Praxis, nicht bloß mitunter, sondern in der überwiegenden Mehrzahl der

Fälle, wegen des Charakters der betreffenden Aufgaben, die zu lösen sind, und mit Rücksicht auf die dem Ballistiker oft nur in beschränktem Maße zur Verfügung stehende Zeit, solche Methoden, die eine Flugbahn bis zum Ziel in einem einzigen Flugbahnbogen (höchstens in zwei Bögen) und möglichst einfach zu berechnen gestatten. Eine der am häufigsten vorkommenden Aufgaben des Ballistikers besteht im folgenden: Zu einer Reihe von verschiedenen Geschützladungen seien die Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  des Geschosses gemessen; und zu jeder Ladung seien zu mehreren verschiedenen Abgangswinkeln  $\varphi$  je die Schußweiten im Mündungshorizont bei gegebenen meteorologischen Tagesverhältnissen erschossen worden. Es sollen alle diese Messungen auf normales Luftgewicht, auf normale Pulvertemperatur und normales Geschößgewicht und damit auf normale Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , sowie auf Windstille reduziert, und zu jeder Schußweite soll der Auffallwinkel  $\omega$ , die Endgeschwindigkeit  $v$ , und die Gesamtflugzeit  $T$  berechnet werden. Oder es tritt bei der Vorbereitung oder auch während der Ausführung von Schießversuchen an den Ballistiker die Aufgabe heran, in kürzester Zeit z. B. mitzuteilen, welche Zünderstellung verwendet werden muß, damit bei gegebenen Werten von  $\varphi$  und  $v_0$  ein Luftsprengpunkt von einem bestimmten Beobachtungsstand des Schießplatzes aus aufgenommen wird und welche Sprenghöhe dabei zu erwarten ist. Oder, welcher Abgangswinkel  $\varphi$  bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  zu wählen ist, damit ein Fesselballon getroffen wird, dessen horizontale Kartenentfernung  $x$  und dessen Höhe  $y$  über dem Mündungshorizont bekannt sind. Oder bei welcher Ladung ein bestimmtes Minenwerfergeschöß, das unter gegebenem Abgangswinkel verschossen wird, eine vorgeschriebene Schußweite auf gegebenem Gelände erreicht und wie groß dabei der Auffallwinkel  $\omega$  wird, oder anderes mehr. Wollte der Ballistiker bei solchen und ähnlichen Aufgaben grundsätzlich nur mit Methoden operieren, die auf einer stückweisen Berechnung oder Konstruktion der Flugbahn, durch Teilung der Bahn in sehr viele kleine Teilbögen, beruhen, oder wollte er gar ausschließlich solche Methoden verwenden, die einen mehrmaligen Wechsel der unabhängigen Veränderlichen notwendig machen (wie von seiten eines Mathematikers verlangt worden ist), so würde der Ballistiker häufig eine unnötige Mühe aufwenden, insbesondere würde er in der ihm zur Verfügung stehenden Zeit bei Aufgaben, für deren Lösung nur eine mäßige Genauigkeit erforderlich ist, oft nicht zu dem gewünschten Ziel gelangen. Auch bei Flachbahnen kommt es nicht immer nur auf die größtmögliche Genauigkeit an, die bei der Berechnung überhaupt erreichbar ist. Und bei der Auswahl der Lösungsmethode und der Beurteilung der Güte einer bestimmten Methode, dürfen dem Gesagten zufolge, nicht ausschließlich Erwägungen rein mathematischer Art entscheidend sein, sondern es müssen meistens auch die Bedürfnisse der Praxis berücksichtigt werden. Allgemeine Regeln für die Auswahl der Methode lassen sich daher kaum aufstellen; die Auswahl muß vielmehr von Fall zu Fall getroffen werden; im allgemeinen wird diejenige Methode vorzuziehen sein, mit der gleichzeitig erstens der entstehende Fehler erheblich kleiner ausfällt als die wahrscheinliche Streuung der betreffenden ballistischen Größe beträgt, und zweitens die sämtlichen Aufgaben, um die es sich handelt, ohne langwieriges Probieren kurz und einfach erledigt werden können.

Die Einteilung der in den folgenden Abschnitten 4 bis 7 zu behandelnden Methoden zur Lösung des speziellen ballistischen Problems ist vom Verfasser hauptsächlich von dem praktischen Gesichtspunkt aus getroffen worden, daß die Übersichtlichkeit und die Auswahl einigermaßen erleichtert werden soll: zunächst werden solche Methoden zur Besprechung gelangen, mit denen eine

Flugbahn in einem Bogen (höchstens in zwei) berechnet wird, also solche Methoden, die gestatten, direkt die Flugbahnelemente eines bestimmten Bahnpunkts  $(xy)$  ohne vielfache Unterteilung der Bahn zu ermitteln, z. B. direkt die Elemente des Auffallpunkts  $(X, o)$  im Mündungshorizont, oder diejenigen  $(x, y_s)$  des Gipfelpunkts oder eines anderen Punkts. Auf diese Methoden bezieht sich die erste Hauptgruppe von Näherungsmethoden (Abschnitt 4, 5, 6). Und zwar werden in der ersten Untergruppe (Abschnitt 4) solche Verfahren beschrieben, bei denen man von der genauen Hauptgleichung ausgeht und die notwendigen weiteren Integrationen durch irgendwelche Näherungen bewerkstelligt. Es handelt sich dabei um ältere Methoden, die jedoch, insbesondere für die Ballistik der Minenwerfer, noch eine Bedeutung besitzen. In der zweiten Untergruppe (Abschnitt 5), die fast ausschließlich auf Flachbahnen sich bezieht, kommen solche Methoden zur Besprechung, bei denen die genaue Hauptgleichung durch eine nur angenäherte Hauptgleichung ersetzt wird, so daß die weiteren Integrationen einfacher zu bewerkstelligen sind. Im Gegensatz zu den Methoden der ersten Untergruppe, bei denen ein bestimmtes Potenzgesetz für den Luftwiderstand vorausgesetzt werden muß, kann bei den Methoden der zweiten Untergruppe ein beliebiges mathematisches Luftwiderstandsgesetz, selbst ein solches in bloßer Tabellenform, angenommen werden. Endlich in der dritten Untergruppe (Abschnitt 6) werden diejenigen Reihenentwicklungen behandelt, die direkt die Flugbahnelemente in einem Bahnpunkt  $(xy)$  liefern. Diese Entwicklungen können zur Fehlerabschätzung dienen. Die betreffenden Gleichungen weisen am deutlichsten die Korrektionsglieder auf, welche die Geschößbewegung im luftgefüllten Raum gegenüber der Geschößbewegung im Vakuum kennzeichnen. Der historische Werdegang der außerballistischen Methoden ist in den drei Abschnitten der ersten Hauptgruppe, soweit es angängig ist, dargestellt.

In der zweiten Hauptgruppe (Abschnitt 7) sind die wichtigsten von denjenigen Verfahren erwähnt, bei denen eine Flugbahn, nach zahlreichen kleinen Zeitintervallen unterteilt, stückweise aufgebaut wird, entweder durch eine graphische bzw. mechanische Konstruktion oder durch eine sukzessive numerische Berechnung.

In Abschnitt 8 ist ein (vom Verfasser 1910 vorgeschlagenes und seitdem von anderen Seiten wiederholt benutztes) Verfahren hinzugefügt, das dazu bestimmt ist, den Genauigkeitsgrad einer Lösungsmethode mit Hilfe von „Normalbahnen“ zu ermitteln.

Des weiteren folgt in Abschnitt 9 die Behandlung der von P. Charbonnier passend so genannten sekundären Probleme der äußeren Ballistik; nämlich derjenigen Probleme, die sich auf die meteorologischen und die innerballistischen Einflüsse, auf die Schiefstellung der Räderachse, die Erdrotation und die Geschöbrotation beziehen. Abschnitt 10 gibt sodann die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitslehre auf die äußere Ballistik, Abschnitt 11 die Wirkungen des Geschosses im Ziel, endlich Abschnitt 12 die Herstellung von Schußtafeln und deren Verwendung.

## Vierter Abschnitt.

Erste Hauptgruppe von Näherungslösungen des  
außerballistischen Hauptproblems:Berechnung der Flugbahn in einem einzigen  
Bogen.

**Lösung mit Benützung der genauen Hauptgleichung  
und unter Voraussetzung eines Potenzgesetzes  $c \cdot v^n$   
für die Verzögerung durch den Luftwiderstand.**

## § 21. Methode von Euler-Otto.

Im Jahre 1753 gab der bekannte Mathematiker L. Euler eine Näherungslösung des ballistischen Problems, die für Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0 < \text{ca. } 240 \text{ m/sec}$  noch jetzt von Wichtigkeit ist, und zugleich die Anregung zu einer rationellen Berechnung von zugehörigen Tabellen. Seine Methode bezieht sich auf die Summation der  $dx$ ,  $dy$ ,  $dt$ ,  $ds$ . Er betrachtet die Flugbahn näherungsweise als ein Polygon von endlich vielen geradlinigen Stücken  $\Delta s$ , stellt hierfür und für die zugehörigen Projektionen  $\Delta x$  und  $\Delta y$ , sowie für die entsprechenden Zeiten  $\Delta t$  die geschlossenen Rechnungsausdrücke auf und summiert die  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  zu  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . Dabei setzt er das quadratische Luftwiderstandsgesetz voraus. Die hierbei in Betracht kommenden Ausdrücke, die die Unterlage für die Rechnung bilden, sind in § 18, von allgemeineren Gesichtspunkten aus, schon abgeleitet worden. Des-

halb möge hier nur angedeutet werden, wie Euler die noch übrigbleibenden Summationen vollzieht.

Man denke sich (vgl. Abb. 50) zwei einander benachbarte Punkte  $M$  und  $M_1$  desselben Astes der Flugbahn; vom Gipfel  $S$  aus gezählt seien die Bögen  $SM = s$  und  $SM_1 = s_1$ . Nach dem Früheren (§ 18, Gl. (20)) haben diese die Größen

$$SM = s = \frac{1}{2c} \lg t \frac{C - \xi(\theta)}{C} \quad \text{und} \quad SM_1 = s_1 = \frac{1}{2c} \lg t \frac{C - \xi(\theta_1)}{C},$$

somit ist das kleine Bogenstück  $MM_1$  oder  $\Delta s = \frac{1}{2c} \lg t \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)}$ .

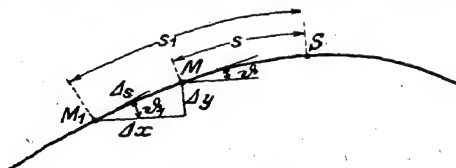


Abb. 50.

Die Horizontalneigung der Flugbahn ist  $\vartheta$  im Punkt  $M$  und  $\vartheta_1$  im Punkt  $M_1$ ; Euler betrachtet nun das Bogenelement näherungsweise als geradlinig von der mittleren Neigung  $\frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}$ , so ist

$$\Delta x = \frac{1}{2c} \lgnt \frac{C - \xi(\vartheta_1)}{C - \xi(\vartheta)} \cdot \cos \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2},$$

$$\Delta y = \frac{1}{2c} \lgnt \frac{C - \xi(\vartheta_1)}{C - \xi(\vartheta)} \cdot \sin \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}.$$

Diese Projektionen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  des Bogens  $\Delta s$  werden sodann summiert,  $\sum \Delta x = x$ ;  $\sum \Delta y = y$ . In einem Beispiel berechnete Euler in dieser Weise die Flugbahn für Differenzen der Neigungswinkel  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  von 5 zu 5 Grad. Die zugehörigen Flugzeiten ergeben sich dabei aus der Beziehung § 18, Gl. (12):

$$2c(v \cos \vartheta)^2 = g \cdot \frac{1}{C - \xi(\vartheta)};$$

also  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v \cos \vartheta} = \frac{1}{2c} \lgnt \frac{C - \xi(\vartheta_1)}{C - \xi(\vartheta)} \cdot \cos \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2c} \sqrt{C - \xi(\vartheta)}}{\sqrt{g}}$ , woraus die Summation der Flugzeit  $t = \sum \Delta t$  folgt.

Da es überaus mühsam wäre, in jedem einzelnen Fall die obigen Berechnungen und die Summationen  $\sum \Delta x$ ,  $\sum \Delta y$ ,  $\sum \Delta t$  besonders auszuführen, so handelt es sich darum, Tabellen anzulegen, die gestatten, für irgendeine Flugbahn, die durch die Werte von  $c$ ,  $\varphi$ ,  $v_0$  gegeben ist, die Flugbahnelemente: Schußweite  $X$ , Auffallwinkel  $\omega$ , Endgeschwindigkeit  $v_e$ , Gipfelabszisse  $x_e$ , Gipfelordinate  $y_e$  usw. zu entnehmen.

Euler schlug vor, bei der Anlegung solcher Tabellen nach dem folgenden Prinzip zu verfahren, das die aufzuwendende Mühe und die Ausdehnung der Tabellen auf ein Mindestmaß reduziert. Obige Formeln für  $\sum \Delta x$ ,  $\sum \Delta y$ ,  $\sum \Delta t$  seien in der Form geschrieben:

$$2cx = 2c \sum \Delta x = \sum \lgnt \frac{C - \xi(\vartheta_1)}{C - \xi(\vartheta)} \cdot \cos \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}$$

$$2cy = 2c \sum \Delta y = \sum \lgnt \frac{C - \xi(\vartheta_1)}{C - \xi(\vartheta)} \cdot \sin \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}$$

$$\sqrt{2c} \cdot t = \sqrt{2c} \sum \Delta t = \sum \lgnt \frac{C - \xi(\vartheta_1)}{C - \xi(\vartheta)} \cdot \cos \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} \cdot \frac{\sqrt{C - \xi(\vartheta)}}{\sqrt{g}}.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten nur  $C$  (oder auch, da  $C = \operatorname{tg} \beta$  ist, den Asymptotenwinkel  $\beta$ ) und  $\vartheta$  an Größen, die entlang einer Flugbahn und von einer Flugbahn zur anderen verschieden sind. Man nehme nun vorläufig an, es sei  $c = 1$  und denke sich für einen ersten bestimmten Wert von  $C$  die  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  der Reihe nach,

von Grad zu Grad, nach obigen Formeln für den aufsteigenden Ast, und dem früheren zufolge mit  $C + \xi$  (statt mit  $C - \xi$ ) für den absteigenden Ast, berechnet und die Summationen vom Gipfel  $\vartheta = 0$  an ausgeführt. Die verschiedenen möglichen Flugbahnen können sich jetzt nur noch durch die verschiedenen Abgangswinkel  $\varphi$  unterscheiden. Es ist aber ersichtlich, daß alle diese Flugbahnen unter sich kongruent sind; denn sie sind nur größere oder geringere Abschnitte derselben Bahn, vom Gipfel aus gerechnet. Also hat man für jenes eine  $C$  die Elemente  $x, y, t$  einer ganzen Reihe von Flugbahnen mit verschiedenem  $\varphi$ . Oder anders ausgedrückt, wenn jetzt  $c$  nicht mehr speziell  $= 1$  ist, so hat man für jenen ersten Wert von  $C$  oder von  $\beta$  die Elemente  $2cx, 2cy, \sqrt{2c} \cdot t$  der verschiedenen Flugbahnen, die sich durch den Abgangswinkel  $\varphi$  unterscheiden. Dasselbe denke man sich für einen zweiten Wert von  $C$  (oder von  $\beta$ ) durchgeführt, so kennt man die Elemente  $2cx, 2cy, \sqrt{2c} \cdot t$  für eine zweite Reihe von Flugbahnen mit verschiedenem  $\varphi$  usw.

Die Tabellen werden gruppenweise für die verschiedenen Werte von  $C$ , die in der Praxis vorkommen können, zu berechnen sein, und sie werden in jeder Gruppe zu den einzelnen  $\varphi$  die Werte von  $cx, cy, \sqrt{c} \cdot t$ , sowie  $\frac{x}{c^3}$ , was  $c$  nicht enthält, aufführen.

Nach diesen Grundsätzen wurden Tabellen berechnet von H. Fr. von Jakobi (die Tabellen gingen verloren), von Fr. P. von Grävenitz 1764, besonders aber von J. C. F. Otto 1842. Später wurden sie von Mola, Scheve, Siacci, Lardillon, Braccialini erweitert, bzw. für bequemen Gebrauch anders angeordnet. Otto hat seine Tabellen 1842 für die verschiedenen Werte von  $\beta$  zwischen  $35^\circ$  und  $87^\circ$ , meist von 2 zu 2 Grad steigend, berechnet und wählte dabei  $\varphi$  zwischen  $30^\circ$  und  $75^\circ$  von Grad zu Grad steigend.

Da der Wert von  $C$  (oder von  $\beta$ ) mit  $cv_0^2$  und  $\varphi$  gegeben ist, so wurden für den praktischen Gebrauch die Tabellen in Gruppen nach verschiedenen  $\varphi$  und in jeder Gruppe nach dem Argument  $cv_0^2$  geordnet. Hierfür sind die Elemente  $cX, \omega, v_s: v_0, T: \sqrt{\frac{g}{X}}$  des Auffallpunkts im Mündungshorizont und außerdem  $y_s: X$  gegeben. Durch den folgenden kurzen Abriß soll die Art der Anordnung erläutert werden:

z. B.  $\varphi = 60^\circ$

$2cX$	$\frac{cv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_s}{v_0}$	$T \cdot \sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_s}{X}$
1,30	1,633	1,256	$72^\circ 19'$	0,584	2,135	0,573
1,35	1,759	1,303	$72^\circ 44'$	0,570	2,146	0,580
1,40	1,894	1,353	$73^\circ 09'$	0,556	2,157	0,586

# Gebrauch der Ottoschen Tabellen zur Lösung der einzelnen Flugbahnaufgaben

(vgl. Anhang Tabelle 7 und Diagramm IVa bis IV f).

Es bedeutet  $X$  die auf den Mündungshorizont bezogene Gesamtschußweite in m,  $\varphi$  den Abgangswinkel,  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit in m/sec,  $\omega$  den spitzen Auffallwinkel,  $v_e$  die Endgeschwindigkeit in m/sec,  $T$  die Gesamtflugzeit in sec,  $y_s$  die Gipfelhöhe in m. Die Verzögerung durch den Luftwiderstand ist  $cv^2$ , dabei  $c = \frac{R^2 \pi \cdot i \cdot \lambda \cdot \delta \cdot g}{P \cdot 1,206}$ ;  $R$  halbes Kaliber in m;  $\delta$  = Tagesluftgewicht = Gewicht von 1 cbm Luft in kg;  $g = 9,81$ ;  $i$  = Spitzenkoeffizient (= 1 für Kruppsche Nomalgeschosse von 2 Kaliber Abrundungsradius der ogivalen Bogenspitze oder von 1,3 Kaliber Spitzenhöhe oder vom halben Ogivalwinkel an der Spitze  $41,5^\circ$ );  $P$  Geschößgewicht in kg;  $\lambda$  ist = 0,014 für Geschwindigkeiten kleiner als 240 m/sec, (wenn es sich um geringere Genauigkeit handelt, können die Tabellen mit  $\lambda = 0,014$  für alle Geschößgeschwindigkeiten kleiner als die normale Schallgeschwindigkeit und mit  $\lambda = 0,039$  für Geschwindigkeiten größer als die Schallgeschwindigkeit bis etwa 1000 m/sec Verwendung finden).

1. Gegeben sei  $c$ ,  $v_0$ ,  $\varphi$ .

Man gehe aus von  $\frac{cv_0^2}{g}$ , was aus den gegebenen Werten  $v_0$ ,  $\delta$ ,  $i$ ,  $R$ ,  $P$  berechnet wird. In der Gruppe des gegebenen Abgangswinkels  $\varphi$  suche man zu dem berechneten  $\frac{cv_0^2}{g}$  den auf gleicher Horizontaler stehenden Wert von  $2cX$ , woraus  $X$  folgt; ebenso den Wert  $\omega$ ; den Wert  $\frac{v_e}{v_0}$ , woraus  $v_e$  folgt, usw. Nötigenfalls wird interpoliert.

2. Gegeben  $c$ ,  $X$ ,  $\varphi$ .

Man geht aus von  $2cX$ , sucht in der  $\varphi$ -Tabelle die auf gleicher Horizontaler mit  $2cX$  stehenden Werte von  $\frac{v_e}{v_0}$ ,  $\frac{cv_0^2}{g}$ ,  $\frac{v_0^2}{2gX}$  usw. auf und erhält damit, gegebenenfalls nach Interpolation, die Flugbahnelemente  $v_e$ ,  $v_0$ ,  $X$  usw.

3. Gegeben  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ .

Man geht aus von  $\omega$ .

4. Gegeben  $v_0$ ,  $X$ ,  $\varphi$ .

Man geht aus von  $\frac{v_0^2}{2gX}$ .

5. Gegeben  $c$ ,  $v_0$ ,  $X$ .

Man geht aus von  $2cX$  und  $\frac{cv_0^2}{g}$  und interpoliert. Will man



noch die Änderung der Luftdichte mit der Höhe berücksichtigen, so berechnet man mit einem ersten Näherungswert von  $\delta$  und damit von  $c$  die Gipfelhöhe  $y_s$  und wiederholt sodann die Rechnung mit dem genaueren Wert von  $c$ .

Beispiel: Gegeben Abgangswinkel  $\varphi = 60^\circ$ , Flugzeit  $T = 40,65$  sec, Schußweite 3520 m. Gesucht  $v_0$ ,  $v_s$ ,  $\omega$ ,  $y_s$ .

Es ist  $T \cdot \sqrt{\frac{g}{X}} = 40,65 \cdot \sqrt{\frac{9,81}{3520}} = 2,146$ , somit nach obigem Abriß der Ottoschen Tabelle  $\frac{v_0^2}{2gX} = \frac{v_0^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 3520} = 1,303$ ; damit  $v_0 = 300$  m/sec.

Ferner  $\frac{y_s}{X} = \frac{y_s}{3520} = 0,580$ ;  $y_s = 2042$  m;  $\frac{v_s}{v_0} = \frac{v_s}{300} = 0,570$ ;  $v_s = 171$  m/sec. Endlich ist  $\omega = 72^\circ 44'$ .

Anmerkungen. a) A. M. Legendre wies 1782 darauf hin, daß bei dem Eulerschen Verfahren dadurch ein Fehler entsteht, daß die  $\Delta x$  und  $\Delta y$  berechnet werden, wie wenn die endlichen Bogenelemente  $\Delta s$  geradlinig wären, wodurch die Projektionen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  zu groß genommen werden; deshalb nimmt er statt geradliniger Stücke  $\Delta s$  Kreisbogenstücke  $\Delta s$ ; er findet alsdann über die Ableitung vgl. Didion 1)

$$\Delta x = \text{Eulersches } \Delta x \cdot \frac{\sin \frac{\theta_1 - \theta}{2}}{\frac{\theta_1 - \theta}{2}}; \quad \Delta y = \text{Eulersches } \Delta y \cdot \frac{\sin \frac{\theta_1 - \theta}{2}}{\frac{\theta_1 - \theta}{2}}.$$

J. Didion zeigte später (1848), daß für die Abszissen das Legendresche Verhältnis dem Didionschen immer näher steht als das Eulersche, und daß für die Ordinaten das Eulersche dem Didionschen immer näher kommt als das Legendresche. Th. Vahlen hat 1922 gezeigt, daß die Didionschen Verhältnisse den wahren Werten für kleine  $\frac{c}{g}f(v)$  beliebig nahe kommen, — eine Eigenschaft, die den Eulerschen und Legendreschen fehlt.

b) Eine entsprechende Methode, wie Euler für das quadratische Luftwiderstandsgesetz  $cv^2$  führte 1878 F. Bashforth unter Zugrundelegung des kubischen Gesetzes  $cv^3$  durch. Hiervon wird nachher eingehender die Rede sein, da das betreffende Lösungsverfahren für die Ballistik in England wesentliche Bedeutung gewonnen hat.

c) A. Bassani führte die Integrationen bei Annahme des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes dadurch herbei, daß er die in der Eulerschen Lösung vorkommende Funktion  $\frac{p}{2} \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2} \lg \tan(p + \sqrt{1+p^2})$  näherungsweise durch  $\frac{p(1+0,2523 p^2)}{1+0,091 \cdot p^2}$  ersetzte.

## § 22. Methode von F. Bashforth.

Wie schon oben kurz erwähnt wurde, legte F. Bashforth das kubische Luftwiderstandsgesetz (Verzögerung  $cf(v) = cv^3$  mit einem für mehrere Zonen der Geschwindigkeiten  $v$  varierten Konstantenwert  $c$ ) einem Lösungsverfahren und zugehörigen Tabellensystem

zugrunde, das auf dem gleichen, von L. Euler angegebenen Prinzip beruht, wie es Otto mit dem quadratischen Gesetz  $cv^2$  vollständig durchgeführt hatte und wie es später Sabudski auf das biquadratische Gesetz anwandte.

Die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit  $v$  des Geschosses in seiner Bahn und dem zugehörigen Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente gegen den Horizont wurde in § 18 in der Form gefunden:

$$\frac{1}{(v \cos \vartheta)^2} = -\frac{3c}{g} \left( \operatorname{tg} \vartheta + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \vartheta \right) + \text{Int.-Konst. } A.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$v \cos \vartheta = v_x, \quad \sqrt[3]{\frac{g}{c}} = x, \quad 3 \operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg}^3 \vartheta = B(\vartheta)$$

und ermittelt die Integrationskonstante  $A$  aus der Bedingung für den Gipfel ( $\vartheta = 0$ ,  $v = v_x$ ), so läßt sich dieselbe Gleichung schreiben

$$\sqrt[3]{1 - \frac{v_x^2}{x^2} B(\vartheta)}$$

Die allgemeinen Ausdrücke für  $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$ , nämlich:

$$dt = -\frac{v_x \cdot d\vartheta}{g \cdot \cos^2 \vartheta}, \quad dx = -\frac{v_x^2 \cdot d\vartheta}{g \cdot \cos^2 \vartheta}, \quad dy = -\frac{v_x^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta}{g \cdot \cos^2 \vartheta},$$

geben damit

$$\begin{aligned} t &= -\frac{v_x}{g} \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{v_x^2}{x^2} B(\vartheta)}}, \\ x &= -\frac{v_x^2}{g} \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{v_x^2}{x^2} B(\vartheta)\right)^2}}, \\ y &= -\frac{v_x^2}{g} \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta}{\cos^2 \vartheta \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{v_x^2}{x^2} B(\vartheta)\right)^2}}, \end{aligned}$$

Man erkennt, daß diese Integrale nur von  $\vartheta$  und von dem Wert von  $\frac{v_x}{x}$  abhängen, da die Funktion  $B(\vartheta)$  allein  $\vartheta$  enthält. Diese Integrale seien der Kürze halber mit  $T, X, Y$  bezeichnet; hierfür hat F. Bashforth Tabellen mit doppeltem Eingang, nämlich mit den Argumen-

ten  $\frac{v_x}{\kappa}$  und  $\vartheta$  berechnet. Und zwar sind, wie man sieht, die Integralwerte zwischen den Grenzen  $\varphi$  und  $\vartheta$  notwendig: z. B.

$$T_\varphi^\varphi = T_\varphi^0 + T_0^\varphi = T_0^\varphi - T_0^\vartheta.$$

Es genügt also, die vom Gipfel ( $\vartheta = 0$ ) ab genommenen Integralwerte zu kennen.

Zusammenstellung:

$$x = + \frac{v_x^2}{g} \cdot X_\varphi^\varphi = + \frac{v_x^2}{g} (X_0^\varphi - X_0^\vartheta), \quad (1)$$

$$y = + \frac{v_x^2}{g} \cdot Y_\varphi^\varphi = + \frac{v_x^2}{g} (Y_0^\varphi - Y_0^\vartheta), \quad (2)$$

$$t = + \frac{v_x}{g} \cdot T_\varphi^\varphi = + \frac{v_x}{g} (T_0^\varphi - T_0^\vartheta), \quad (3)$$

$$v \cdot \cos \vartheta = \frac{v_x}{\sqrt[3]{1 - \frac{v_x^2}{\kappa^2} B(\vartheta)}}; \quad (4)$$

$$v_x = \frac{v_0 \cdot \cos \varphi}{\sqrt[3]{1 + \frac{v_0^2}{\kappa^2} \cdot B(\varphi) \cdot \cos^2 \varphi}}; \quad (5)$$

$$B(\vartheta) = 3 \operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg}^3 \vartheta; \quad (6)$$

$$\kappa = \sqrt[3]{\frac{g}{c}}. \quad (7)$$

Die Berechnung erfolgt also mit Tabellen von den zwei Argumenten  $\left(\frac{v_x}{\kappa}\right)^2$  und  $\vartheta$  für  $X$ ,  $Y$ ,  $T$  und einer Tabelle des Arguments  $\vartheta$  für  $B(\vartheta)$ .

Ist z. B. Kaliber 2 R, Geschoßgewicht  $P$ , Luftgewicht  $\delta$ , Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und Abgangswinkel  $\varphi$  gegeben, so berechnet man nach (7) den Wert von  $\kappa$ , entnimmt aus der Tabelle  $B(\vartheta)$  den Wert von  $B(\varphi)$  und berechnet nach (5) die Gipfelgeschwindigkeit  $v_x$ . Dann erhält man zu einem beliebigen Wert von  $\vartheta$  und dem nunmehr bekannten Wert des Bruchs  $\frac{v_x^2}{\kappa^2}$  die Tabellenwerte  $X$ ,  $Y$ ,  $T$  und hat nach (1), (2), (3) die Flugbahnelemente  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , die je dem gewählten Neigungswinkel  $\vartheta$  der Flugbahntangente zugehören. Speziell mit  $\vartheta = 0$  erhält man die Gipfelkoordinaten  $x_s$ ,  $y_s$ , sowie die Zeit  $t_s$ , bis zum Erreichen des Gipfels.

Zahlenbeispiel. 2 R = 0,2286 m,  $P = 110,9$  kg,  $v_0 = 315,5$  m/sec,

$\varphi = 43,5^\circ$ ,  $\delta = 1,206$  kg/cbm;  $i = 1$ ,

gesucht die Gipfelhöhe  $y_s$ .

$$\kappa^3 = \frac{g}{c} = \frac{110,9}{0,000\,060 \cdot 0,1143^2 \cdot 3,1416} = 45033000,$$

$$B(\varphi) = 3 \cdot \operatorname{tg} 43,5^\circ + \operatorname{tg}^3 43,5^\circ = 3,7015,$$

$$v_s = \frac{315,5 \cdot \cos 43,5}{\sqrt[3]{1 + \frac{315,5^3 \cdot \cos^3 43,5 \cdot 3,7015}{45\,033\,000}}} = 182,1;$$

$$\frac{v_s^3}{\kappa^3} = \frac{182,1^3}{45\,033\,000} = 0,1341.$$

Die Tabelle  $Y$  gibt für  $\left(\frac{v_s}{\kappa}\right)^3 = 0,1341$  und für  $\vartheta = 0$  den Wert  $Y_0^{43,5} = 0,58195$ , also Gipfelordinate

$$y_s = \frac{v_s^3}{g} \cdot Y_0^\varphi = \frac{182,1^3}{9,81} \cdot 0,58195 = 1966 \text{ m.}$$

### Fünfter Abschnitt.

## Integrationen auf Grund einer angenäherten Hauptgleichung.

### § 23. Allgemeines. Gegenüberstellung der verschiedenen Methoden.

Im vorhergehenden wurden solche Verfahren besprochen, bei denen die ursprüngliche, oben als Hauptgleichung bezeichnete Differentialgleichung  $g \cdot d(v \cos \vartheta) = c \cdot f(v) \cdot v \cdot d\vartheta$  oder  $\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{(v \cos \vartheta) \cdot c \cdot f(v) \cdot \cos \vartheta}$ , ( $c f(v)$  Verzögerung durch den Luftwiderstand), in der genauen Form belassen wird, dagegen die weiteren Integrationen durch irgendwelche Annäherungen herbeigeführt werden. Ein anderer Gedanke ist der, die obige genaue Hauptgleichung derart zu vereinfachen, durch eine angenäherte Hauptgleichung zu ersetzen, daß die Integrationen keine weitere Schwierigkeit machen.

Dieses Prinzip scheint zuerst von Borda 1769 angewendet worden zu sein und wurde später insbesondere von St. Robert, N. Mayevski und F. Siacci weiter ausgebildet. Borda ersetzt das Luftgewicht  $\delta$ , das einen Faktor von  $c$  bildet, näherungsweise durch  $\delta \cdot \frac{\cos \vartheta}{\cos \varphi}$  (was für zwei Punkte der Bahn richtig ist)

oder  $c$  durch  $c \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta}$ , wobei er das quadratische Gesetz annimmt,  $c f(v) = c v^2$ . Damit wird (mit der Abkürzung  $v \cos \vartheta = u$ ):

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g \cdot du}{u \cdot c v^2 \cdot \cos \vartheta} = \sim \frac{g \cdot du}{u \cdot c \cdot \frac{\cos \vartheta}{\cos \varphi} \cdot v^2 \cdot \cos \vartheta} = \frac{g \cdot \cos \varphi}{c} \cdot \frac{du}{u^2}; \text{ in dieser Gleichung}$$

chung  $\frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{g \cdot \cos \varphi}{c} \cdot \frac{du}{u^2}$  sind die Variablen  $\vartheta$  und  $u$  getrennt, so daß die Integrationen ohne weiteres möglich sind. Z. B.

$$dx = -\frac{v^2}{g} \cdot d\vartheta = -\frac{u^2}{g} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = -\frac{v^2}{g} \cdot \frac{g \cos \varphi}{c} \cdot \frac{du}{u^2} = -\frac{\cos \varphi}{c} \cdot \frac{du}{u};$$

$$\lg u = -\frac{c}{\cos \varphi} \cdot x + \lg v (v_0 \cos \varphi); \quad v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi \cdot e^{-\frac{c}{\cos \varphi} x} \text{ usw.}$$

Die Lösung ist, wie sich weiter unten zeigen wird, im Prinzip ähnlich wie diejenige von Didion (vgl. § 24). Ähnlich verfuhr Besout.

Legendre machte mehrere Vorschläge zur Integration der Hauptgleichung; insbesondere ersetzte er, unter Annahme des quadratischen Gesetzes  $cf(v) = cv^2$ , das Luftgewicht  $\delta$  durch

$$\delta \frac{1 + ap^2}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \text{oder } c \text{ durch } c \cdot \cos \vartheta \cdot (1 + ap^2),$$

dabei bedeutet  $p = \operatorname{tg} \vartheta$ ; den Faktor  $a$  nimmt er  $= \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$ . (Dieses  $c$  stimmt mit dem wahren  $c$  in den drei Flugbahnpunkten überein, für die bzw.  $\vartheta = +\varphi$ ,  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = -\varphi$  ist.) Damit wird die Gleichung zu der folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = dp &= \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{v \cos \vartheta \cdot c v^2 \cdot \cos \vartheta} = \sim \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{v \cos \vartheta \cdot c (1 + ap^2) \cos \vartheta \cdot v^2 \cdot \cos \vartheta} \\ &= \frac{g \cdot du}{u \cdot c (1 + ap^2) u^2}, \quad \text{oder} \quad dp (1 + ap^2) = \frac{g}{c} \cdot \frac{du}{u^2}. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung zwischen  $p$  und  $u$  oder zwischen  $\operatorname{tg} \vartheta$  und  $v \cos \vartheta$  sind wiederum die Variablen getrennt. Wird integriert und der Wert von  $\vartheta^2$  in Funktion von  $\vartheta$  in die allgemeine Gleichung für  $dx$ , also in  $g dx = -v^2 \cdot d\vartheta$  eingesetzt, so läßt sich diese Gleichung in endlicher Form lösen; mit Hilfe einer Gleichung 3. Grades wird  $x$  in  $p$  ausgedrückt, ebenso  $y$ .

Gegen dieses Verfahren erhob Français den Einwand, daß für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , also mit  $\operatorname{tg} \vartheta = \infty$ , das Luftgewicht unendlich groß genommen werde. Er selbst ersetzte deshalb  $\delta$  durch  $\delta \cdot \cos \vartheta \frac{1 + a \operatorname{tg}^2 \vartheta}{\sqrt{1 + b \operatorname{tg}^2 \vartheta}}$ , wo  $a$  und  $b$  entsprechend bestimmt werden.

Ein allgemeineres Verfahren, das sich auf irgendwelche Funktion  $cf(v)$  anwenden läßt, mag diese analytisch oder auch nur in Tabellenform gegeben sein, ist das folgende:

Die Verzögerung durch den Luftwiderstand sei wieder mit  $cf(v)$  bezeichnet. Genau richtig ist die Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g d(v \cos \vartheta)}{v \cos \vartheta \cdot c \cdot f(v) \cdot \cos \vartheta} = \frac{g \cdot d\left(\frac{v \cos \vartheta}{\sigma}\right)}{\frac{v \cos \vartheta}{\sigma} \cdot c f\left(\frac{v \cos \vartheta}{\sigma}\right) \cdot ((\cos \vartheta))}, \quad (1)$$

dabei  $\sigma$  eine Konstante, über die nachher verfügt werden wird.

Dazu kommen die Gleichungen

$$dx = -\frac{v^2}{g} d\vartheta; \quad (2)$$

$$dt = -\frac{v \cdot d\vartheta}{g \cos \vartheta}; \quad (3)$$

$$dy = -\frac{v^2 \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta}{g}. \quad (4)$$

Es werde nun zum Zweck der Integration die Gleichung (1) dadurch vereinfacht, daß von den beiden im Nenner stehenden  $\cos \vartheta$  der unter dem Funktionszeichen  $f$  stehende und mit einer einfachen runden Klammer bezeichnete  $\cos \vartheta$  durch einen entlang der Flugbahn oder wenigstens entlang eines größeren Teils derselben konstanten Mittelwert  $\sigma$ , der rechts davon stehende und durch eine doppelte runde Klammer markierte  $\cos \vartheta$  durch eine andere Konstante  $\gamma$  ersetzt wird.

Dann ist näherungsweise richtig

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \approx \frac{g \cdot d\left(\frac{v \cos \vartheta}{\sigma}\right)}{\frac{v \cos \vartheta}{\sigma} \cdot c f\left(\frac{v \cos \vartheta}{\sigma}\right) \cdot \gamma} = \frac{g du}{c \gamma \cdot u \cdot f(u)}, \quad (5)$$

wenn  $u = \frac{v \cos \vartheta}{\sigma}$  ist. Damit sind die Variablen  $\vartheta$  und  $u$  getrennt, und es wird

$$(\operatorname{tg} \vartheta)_{\vartheta}^{\vartheta} = \frac{g}{c \gamma} \int_{u_0}^u \frac{du}{u \cdot f(u)}, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2 c \gamma} (J(u) - J(u_0)),$$

wenn  $J(u) = -2g \int \frac{du}{u \cdot f(u)}$  ist.

Damit wird

$$dx = -\frac{v^2 \cdot d\vartheta}{g} = -\frac{\sigma^2}{g} \cdot \frac{u^2 \cdot d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = -\frac{\sigma^2 \cdot u^2}{g} \cdot \frac{g du}{c \gamma u \cdot f(u)} = -\frac{\sigma^2}{\gamma c} \cdot \frac{u du}{f(u)},$$

also  $(x)_{\vartheta}^{\vartheta} = -\frac{\sigma^2}{\gamma c} \int_{u_0}^u \frac{u \cdot du}{f(u)}; \quad x = +\frac{\sigma^2}{\gamma c} (D(u) - D(u_0)),$

wenn  $D(u) = -\int \frac{u \cdot du}{f(u)}$  ist. Ferner

$$dt = -\frac{v \cdot d\vartheta}{g \cos \vartheta} = -\frac{u \cdot \sigma}{g} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = -\frac{\sigma u}{g} \cdot \frac{g du}{c \gamma u f(u)} = -\frac{\sigma}{c \gamma} \cdot \frac{du}{f(u)}, \text{ also}$$

$$t = -\frac{\sigma}{c \gamma} \int_{u_0}^u \frac{du}{f(u)} = +\frac{\sigma}{c \gamma} (T(u) - T(u_0)), \text{ wobei } T(u) = -\int \frac{du}{f(u)}.$$

Endlich  $dy = \operatorname{tg} \vartheta \cdot dx = \operatorname{tg} \varphi \cdot dx - \frac{1}{2c\gamma} (J(u) - J(u_0)) dx$  oder mit Einsetzung des obigen Wertes von  $dx$

$$dy = \operatorname{tg} \varphi \cdot dx - \frac{1}{2c\gamma} \left\{ -J(u) \cdot \frac{\sigma^2}{\gamma c} \cdot \frac{u \cdot du}{f(u)} - J(u_0) dx \right\},$$

integriert von  $y = 0$  bis  $y$  oder von  $u_0$  bis  $u$  oder von  $x = 0$  bis  $x$ ,

$$y = \operatorname{tg} \varphi \cdot x - \frac{1}{2c\gamma} \left\{ -\frac{\sigma^2}{\gamma c} \int_{u_0}^u \frac{J(u) \cdot u \cdot du}{f(u)} - J(u_0) \cdot x \right\}$$

$$= \operatorname{tg} \varphi \cdot x - \frac{1}{2c\gamma} \left\{ -\frac{\sigma^2}{\gamma c} \int_{u_0}^u \frac{J(u) \cdot u \cdot du}{f(u)} - J(u_0) (D(u) - D(u_0)) \frac{\sigma^2}{\gamma c} \right\}$$

und wenn  $-\int \frac{J(u) \cdot u \cdot du}{f(u)}$  mit  $A(u)$  bezeichnet wird,

$$y = \operatorname{tg} \varphi \cdot x - \frac{\sigma^2}{2c^2\gamma^2} \cdot \{A(u) - A(u_0) - J(u_0) (D(u) - D(u_0))\}.$$

Die Integralwerte  $D(u)$ ,  $T(u)$ ,  $J(u)$ ,  $A(u)$ , die als die primären Siacischen Funktionen bezeichnet seien, lassen sich für die Annahme  $f(v) = v^n$ , also  $f(u) = u^n$  ohne weiteres genau in  $u$  ausdrücken und damit Tabellen anlegen; z. B. für das kubische Luftwiderstandsgesetz  $cf(v) = cv^3$ , also für  $f(u) = u^3$ , wird

$$J(u) = -2g \int \frac{du}{u \cdot u^3} = +\frac{2g}{3} \cdot u^{-3}$$

$$A(u) = -\int \frac{J(u) \cdot u \cdot du}{f(u)} = -\frac{2g}{3} \int \frac{u^{-3} \cdot u \cdot du}{u^3} = +\frac{g}{6} \cdot u^{-4} \text{ usw.}$$

Für verwickeltere Funktionen  $f(u)$  wird man die Integrale mit einer Simpsonschen Regel oder einem Integrappen auswerten.

So ist es, wenn für den in  $c$  enthaltenen Formkoeffizienten  $i$  ein konstanter Mittelwert zugrunde gelegt wird. Falls man dagegen, nach dem Vorbild von O. von Eberhard (vgl. den § 10, Absatz 11)  $i$  als Funktion von  $v$  zu berücksichtigen bestrebt ist, z. B.

$$\frac{1}{i} = 1,3206 - \frac{58,2}{v} - 0,0001024 v,$$

allgemeiner

$$\frac{1}{i} = p - \frac{q}{v} - r \cdot v,$$

so kann dies auf doppelte Weise geschehen. Entweder berechnet man demgemäß den Ausgleichsfaktor  $\beta$ , wie dies später in § 28 gezeigt werden soll.

Oder man verfährt genauer in der Weise, wie dies zuerst von O. von Eberhard vorgeschlagen worden ist: Z. B. die obige Funktion  $J(u)$  wird jetzt

$$J(u) = -2g \left( p - \frac{q}{u} - \frac{1}{u \cdot f(u)} \right) = -2gp \int \frac{du}{u \cdot f(u)} + 2gq \int \frac{du}{u^2 f(u)} + 2gr \int \frac{du}{f(u)}.$$

Von diesen drei Integralen ist das erste und das dritte unter den schon bekannten Siaccischen Funktionen enthalten. Neu hinzu kommt aber die Funktion  $\int \frac{du}{u^2 \cdot f(u)}$ . Verfolgt man so die gesamte Lösung, so erkennt man, daß im ganzen sieben neue Funktionen auftreten, die im Gegensatz zu den Siaccischen die Eberhardschen Funktionen heißen mögen.

Man wird vorläufig abwarten müssen, bis für diese sämtlichen Funktionen der neuen Luftwiderstandstabelle die Zahlenwerte berechnet sind und in Tabellenform veröffentlicht vorliegen.

#### Zusammenstellung.

Dabei bedeutet

$$(I) \quad x = \frac{\sigma^2}{\gamma c} (D(u) - D(u_0))$$

$$D(u) = - \int \frac{u \cdot du}{f(u)}$$

$$(II) \quad t = \frac{\sigma}{c\gamma} (T(u) - T(u_0))$$

$$T(u) = - \int \frac{du}{f(u)}$$

$$(III) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c\gamma} (J(u) - J(u_0))$$

$$J(u) = -2g \int \frac{du}{u \cdot f(u)}$$

$$(IV) \quad y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{\sigma^2}{2c^2 \gamma^2} \cdot \{A(u) - A(u_0) - J(u_0)(D(u) - D(u_0))\}$$

$$A(u) = - \int \frac{J(u) \cdot u \cdot du}{f(u)}$$

oder

$$(IVa) \quad y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2c\gamma} \left\{ \frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) \right\}$$

Verzögerung durch den Luftwiderstand  
 $= cf(v).$

$$u = v \cos \vartheta$$

$\sigma$  und  $\gamma$  gewisse näher zu bestimmende  
 Konstanten.

$$u_0 = \frac{v_0 \cos \varphi}{\sigma}$$

Wird mittels (I)  $u$  in  $x$  ausgedrückt und in (II), (III), (IV) eingesetzt, so erhält man  $t$ ,  $\vartheta$ ,  $y$  in Funktionen von  $x$ .

#### Über die Wahl der Konstanten $\sigma$ und $\gamma$ .

Diese Konstanten waren bis jetzt willkürlich gelassen. Nunmehr soll darüber verfügt werden.

Man kann von zahlreichen außerballistischen Lösungsmethoden, die im Laufe der letzten 150 Jahre aufgetaucht sind, nachweisen, daß sie ihrem Prinzip nach in dem obigen Gleichungssystem (I) bis



(IV) enthalten sind und sich der Hauptsache nach durch die verschiedene Wahl von  $\sigma$  und  $\gamma$  unterscheiden.

Zwar wurden die betreffenden Methoden nicht durch Spezialisierung aus den Gleichungen (I) bis (IV) abgeleitet, vielmehr wurden sie von ihren Verfassern meistens in wesentlich anderer Form entwickelt, die die Zugehörigkeit der Methoden zu dem System (I) bis (IV) nicht immer ohne weiteres erkennen läßt. Aber es ist für den theoretischen Ballistiker von Interesse, die einschlägigen Methoden von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus zu betrachten und ihrem inneren Zusammenhange nachzugehen.

a) Borda 1769 nimmt (siehe oben):

$$\sigma = 1, \quad \gamma = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \text{bei der Annahme } cf(v) = cv^2.$$

b) J. Didion 1848:

$$\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha},$$

wobei  $\alpha$  ein gewisser Mittelwert von  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  zwischen dem Anfang und dem Ende des betreffenden Flugbahn Bogens ist. Er wählt als Luftwiderstandsfunktion  $cf(v) = cv^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right)$ ,  $c$  und  $r$  Konstanten.

Damit wird

$$\begin{array}{l|l} x = \frac{1}{\alpha c} (D(u) - D(u_0)) & u = \alpha v \cos \vartheta \\ t = \frac{1}{c} (T(u) - T(u_0)) & u_0 = \alpha v_0 \cos \varphi \\ \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\alpha}{2c} (J(u) - J(u_0)) & \\ y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c^2} \{ A(u) - A(u_0) & \\ \quad - J(u_0)(D(u) - D(u_0)) \} & \end{array}$$

Didion wählte übrigens nicht  $u$  als unabhängige Variable des Lösungssystems, sondern  $x$ , stellte also für  $t$ ,  $\vartheta$ ,  $y$ ,  $v \cos \vartheta$  Formel-  
ausdrücke auf, die  $x$  enthalten. Der von ihm benützte Mittelwert

$$\text{für } \alpha \text{ ist } \alpha = \frac{\int_{\varphi}^{\vartheta} \sec^2 \vartheta \cdot d\vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi}.$$

c) St. Robert schlug u. a. vor, statt dessen das arithmetische Mittel zwischen dem Wert von  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  im Anfangspunkt  $\vartheta = \varphi$  (oder auch im Punkt  $\vartheta = -\varphi$  des absteigenden Astes) und dem Wert im Gipfel  $\vartheta = 0$ , also das arithmetische Mittel zwischen  $\frac{1}{\cos \varphi}$  und  $\frac{1}{\cos 0}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi}\right)$  zu nehmen.

d) H  lie nimmt in einem seiner Lösungssysteme das geometrische Mittel zwischen  $\frac{1}{\cos \varphi}$  und  $\frac{1}{\cos 0}$ , also  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}}$ .

e) F. Siacci in seinem Verfahren von 1880 (künftig kurz bezeichnet mit „Siacci I“): ebenso  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ ; dabei werden Zonengesetze für den Luftwiderstand angenommen.

f) N. v. Wuich 1886: desgleichen  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ . Quadratisches Luftwiderstandsgesetz  $c f(v) = c v^2$ ; unter Umständen mit einem Wechsel des  $c$ -Wertes entlang der Flugbahn; unabhängige Variable ist  $x$ .

g) F. Krupp (früheres Verfahren):  $\sigma = \gamma = 1$ ; dabei die Kruppsche Luftwiderstandstabelle benützt.

h) F. Siacci in seinem Verfahren von 1888 (künftig kurz mit „Siacci II“ bezeichnet):  $\sigma = \cos \varphi$ ,  $\gamma = \beta \cdot \cos^2 \varphi$ ;  $\beta$  ist aus einer Tabelle mit doppeltem Eingang zu entnehmen, welche  $X$  und  $\varphi$  als Argumente enthält; also muß unter Umständen eine erste Näherungsberechnung vorhergehen. Für die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von  $v$  werden Zonengesetze angenommen. Das Gleichungssystem ist danach:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sigma \beta} (D(u) - D(u_0)) \\ t &= \frac{1}{c \beta \cdot \cos \varphi} (T(u) - T(u_0)) \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2 \cdot c \beta \cdot \cos^2 \varphi} (J(u) - J(u_0)) \\ y &= x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2 \cdot (c \beta)^2 \cdot \cos^2 \varphi} \{A(u) - A(u_0) \\ &\quad - J(u_0)(D(u) - D(u_0))\} \end{aligned} \right| \begin{aligned} u &= \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \\ u_0 &= v_0. \end{aligned}$$

So auch bei J. M. Ingalls (Nordamerika) 1900 und bei N. Sabudski (Rußland) für Flachbahnen.

i) E. Vallier 1894: desgleichen  $\sigma = \cos \varphi$ ,  $\gamma = \frac{1}{m} \cdot \cos^2 \varphi$ ;  $m$  wird, unter Umständen nach vorausgegangener Berechnung mit erster Näherung, mittels einer geschlossenen Formel ermittelt. Zonengesetze.

k) F. Siacci, Verfahren von 1896 („Siacci III“): ebenfalls  $\sigma = \cos \varphi$ ;  $\gamma = \beta \cdot \cos^2 \varphi$ . Einheitliches Luftwiderstandsgesetz. Dazu gehören die Tabellen von Fasella.

l) P. Charbonnier: In erster Annäherung wird  $\sigma = \gamma = 1$  genommen (wie bei dem früheren Verfahren von F. Krupp), also

$$x = \frac{1}{c} (D(u) - D(u_0)) \qquad u = v \cos \vartheta.$$

$$t = \frac{1}{c} (T(u) - T(u_0)) \qquad u_0 = v_0 \cos \varphi.$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{g \cdot c} (J(u) - J(u_0))$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c^2} \{A(u) - A(u_0) - J(u_0)(D(u) - D(u_0))\}$$

Sodann wird in zweiter Annäherung

auf dem aufsteigenden Ast statt des Luftgewichts  $\delta$ ,  $\delta \left(1 + \frac{\kappa_0}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right)$

„ „ absteigenden „ „ „ „ „  $\delta$ ,  $\delta \left(1 + \frac{\kappa \omega}{2} \operatorname{tg}^2 \omega\right)$

verwendet; dabei bedeutet  $\omega$  den spitzen Auffallwinkel und  $\kappa$  allgemein die Funktion  $\kappa = \frac{1}{2} \left(v \cos \vartheta \cdot \frac{f'(v \cos \vartheta)}{f(v \cos \vartheta)} - 1\right)$ . Dieses Verfahren für Flachbahnen; die Luftwiderstandsfunktion wie bei Krupp in Tabellenform.

Von den hier im allgemeinen gekennzeichneten Lösungsmethoden sollen im folgenden diejenigen etwas eingehender besprochen werden, die im Lauf der Entwicklung der Ballistik besondere Bedeutung erlangt haben.

## § 24. Lösung von J. Didion (1848).

Verzögerung durch den Luftwiderstand  $c f(v) = c v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right)$ , wo  $c$  und  $r$  die in § 10 angeführten Konstanten sind (vgl. auch w. u. die Zusammenstellung). Nach § 17 ist allgemein  $dx = -\frac{v^2}{g} \cdot d\vartheta$  oder, da  $d\vartheta = \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{v \cdot c f(v)}$ ,

$$dx = -\frac{v \cos \vartheta \cdot d(v \cos \vartheta)}{c f(v) \cdot \cos \vartheta}. \qquad (1)$$

Das rechnerische Näherungsverfahren Didions wurde schon oben kurz dadurch gekennzeichnet, daß in dem Nenner des auf der rechten Seite von (1) stehenden Bruchs  $f(v)$  durch  $f(\alpha v \cos \vartheta)$  und ein  $\cos \vartheta$  durch  $\frac{1}{\alpha}$  ersetzt wird; dabei ist  $\alpha$  ein nachher zu besprechender konstanter Mittelwert von  $\frac{1}{\cos \vartheta}$ . Damit und mit der Bezeichnung  $\alpha v \cos \vartheta = u$  nimmt die Differentialgleichung (1) eine Form an, in der die Variablen  $x$  und  $u$  getrennt sind, so daß die Integration ohne weiteres mög-

lich ist; es wird nämlich  $dx = -\frac{1}{\alpha c} \cdot \frac{u \cdot du}{f(u)}$  oder, da im vorliegenden Fall  $f(u) = u^2 \left(1 + \frac{u}{r}\right)$ ,

$$dx = -\frac{1}{\alpha c} \cdot \frac{du}{u \left(1 + \frac{u}{r}\right)}. \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich durch Integration  $v \cos \vartheta$  und weiterhin  $\vartheta$ ,  $t$  und  $y$  je in Funktion von  $x$  berechnen.

Zuvor möge die Gleichung (2) noch einmal unabhängig vom Vorhergehenden abgeleitet werden (nämlich in der Weise, wie dies durch Didion selbst erfolgte; denn die Einführung von  $u$  als unabhängiger Variabler in das Lösungssystem wurde erst 1872 durch St. Robert bewirkt).

Die Bewegungsgleichung des Geschosses in horizontaler Richtung lautet

$$\frac{dv_x}{dt} = -c f(v) \cdot \cos \vartheta = -c v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right) \cdot \frac{dx}{ds} = -c v \left(1 + \frac{v}{r}\right) \cdot v_x$$

oder

$$\frac{dv_x}{dx} = -c v \left(1 + \frac{v}{r}\right).$$

Didion ersetzt nun  $ds$  näherungsweise durch  $\alpha dx$  oder, was dasselbe ist,  $v$  durch  $\alpha \cdot v_x$ . Mit der Abkürzung  $u = \alpha \cdot v_x = \alpha v \cos \vartheta$ ;  $du = \alpha \cdot d(v_x)$  wird die Gleichung  $\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{du}{dx} = -c u \left(1 + \frac{u}{r}\right)$ , wie oben Gleichung (2).

Die weiteren Berechnungen vollziehen sich wie folgt:

$$\alpha c dx = \left( \frac{1}{1 + \frac{u}{r}} - \frac{1}{\frac{u}{r}} \right) \cdot d\left(\frac{u}{r}\right);$$

integriert von 0 bis  $x$  bzw. von  $u_0$  bis  $u$ ,

$$\alpha c x = \lg nt \frac{1 + \frac{u}{r}}{\frac{u}{r}} - \lg nt \frac{1 + \frac{u_0}{r}}{\frac{u_0}{r}}$$

Hier ist  $u = \alpha v \cos \vartheta$ ,  $u_0 = \alpha v_0 \cos \varphi$ ; durch Auflösung nach  $v \cos \vartheta$  erhält man

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{(1 + \kappa_0) e^{c \alpha x} - \kappa_0}, \quad (3)$$

wo zur Abkürzung  $\frac{\alpha v_0 \cos \varphi}{r} = \kappa_0$  gesetzt ist. Mit (3) kennt man die horizontale Geschwindigkeit  $v \cos \vartheta$  für irgendeine wagrechte Entfernung  $x$  des Geschosses. Die zugehörige Zeit  $t$  ergibt sich durch Integration, mittels der Identität  $dt = \frac{dx}{v \cos \vartheta}$  nach Einsetzen des Wertes

von  $v \cos \vartheta$  aus Gleichung (3),  $dt = \frac{1}{v_0 \cos \varphi} \{ (1 + \kappa_0) e^{c \alpha x} - \kappa_0 \} dx$ , zu

$$t = \frac{1}{v_0 \cos \varphi} \cdot \left[ (1 + \kappa_0) \frac{e^{c \alpha x} - 1}{c \alpha} - \kappa_0 x \right]. \quad (4)$$

Verwendet man die Beziehung (3) in gleicher Weise in der allgemein gültigen Gleichung für  $\vartheta$ , nämlich  $d\vartheta = -\frac{g \cdot dx}{v^3}$  oder

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = -\frac{g \cdot dx}{(v \cos \vartheta)^3}, \text{ so wird}$$

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \text{ oder } d(\operatorname{tg} \vartheta) = -\frac{g}{v_0^3 \cos^2 \vartheta} \cdot [(1 + \kappa_0) e^{c\alpha x} - \kappa_0]^2 dx;$$

integriert von  $\varphi$  bis  $\vartheta$  und von 0 bis  $x$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi = & -\frac{g}{v_0^3 \cos^2 \varphi} \cdot \left[ (1 + \kappa_0)^2 \cdot \frac{e^{2c\alpha x} - 1}{2c\alpha} \right. \\ & \left. - 2\kappa_0(1 + \kappa_0) \cdot \frac{e^{c\alpha x} - 1}{c\alpha} + \kappa_0^2 x \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Da endlich  $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}$ , läßt sich Gleichung (5) noch einmal nach  $x$  integrieren, wodurch  $y$  in Funktion von  $x$  erhalten wird. Die sämtlichen Ausdrücke für  $v \cos \vartheta$ ,  $t$ ,  $\vartheta$ ,  $y$  in Funktion von  $x$ , sind weiter unten zusammengestellt.

Den Mittelwert  $\alpha$  des tatsächlich variablen Verhältnisses  $\frac{ds}{dx}$  oder  $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}$  oder  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  berechnet Didion näherungsweise als das Verhältnis  $\frac{s}{x}$  des endlichen Bogens  $OM = s$  der tatsächlichen Flugbahn, um den es sich handelt, zu seiner Horizontalprojektion  $OM_1 = x$ . Dieses Verhältnis  $OM : OM_1$  wiederum nimmt er näherungsweise gleich dem Verhältnis  $s_1 : x_1$  des Flugbahnbogens  $OP$ , der im luftleeren Raum bei gleichen Anfangs- und Endneigungen  $\varphi$  und  $\vartheta$  und bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  erhalten würde, zu der Horizontalprojektion  $OP_1$  dieses Bogens; also

$$\alpha = \frac{OP}{OP_1} = \frac{\text{Bogen im leeren Raum bei gleichem } \varphi, \vartheta \text{ u. } v_0}{\text{Horizontalprojektion dieses Bogens}} = \frac{s_1}{x_1}.$$

Man hat also, für die gegebenen Werte  $\varphi$ ,  $\vartheta$  und  $v_0$ ,  $OP$  und  $OP_1$  zu berechnen unter der Annahme, daß der Luftwiderstand nicht wirkt (vgl. § 1).

a) Zähler  $OP = s_1$  des Bruches:

Nach bekannten Regeln der Rektifikation ist

$$s_1 = \int_{\varphi}^{\vartheta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2} dx_1.$$

Im luftleeren Raum war nun  $y_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot x_1 - \frac{g x_1^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi}$  und  $\operatorname{tg} \vartheta_1 = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x_1}{v_0^2 \cos^2 \varphi}$ . Setzt man zur Abkürzung  $\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = p$ , so

ist  $dp = -\frac{g \cdot dx_1}{v_0^2 \cos^3 \varphi}$ , also

$$s_1 = -\frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} \int_{\varphi}^{\vartheta} \sqrt{1+p^2} \cdot dp.$$

Schon früher wurde die Beziehung benützt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta} \sqrt{1+p^2} dp &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} + \lg \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) \right\} \\ &= \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \xi(\vartheta), \quad (\text{Tabelle 8b im Anhang}). \end{aligned}$$

Somit ist  $s_1 = +\frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} (\xi(\varphi) - \xi(\vartheta))$ ,

b) Nenner  $OP_1 = x_1$  des Bruches:

Nach dem Obigen ist  $x_1 = \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta)$ . Somit durch Division

$$\alpha = \frac{s_1}{x_1} = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\vartheta)}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta}. \quad (6)$$

Wenn der Flugbahnbogen, der berechnet werden soll, vom Anfangspunkt ( $\vartheta = \varphi$ ) bis zum Gipfel ( $\vartheta = 0$ ) reicht, so ist einfach

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad (7)$$

da damit  $\vartheta = 0$  auch  $\xi(\vartheta) = 0$  wird.

Soll die Flugbahn möglichst genau berechnet werden, so teilt man sie in mehrere Bögen ein, wobei die Teile in der Nähe des Gipfels größer genommen werden können; ist z. B. der Abgangswinkel  $\varphi = 45^\circ$ , so teile man etwa in 4 Bögen:

a) von  $\vartheta = \varphi = 45^\circ$  bis  $\vartheta = 30^\circ$ ; hier ist

$$\alpha = \frac{\xi(45) - \xi(30)}{\operatorname{tg} 45 - \operatorname{tg} 30} = 1,2772,$$

b) von  $\vartheta = 30^\circ$  bis  $\vartheta = 0$  (Gipfel); hier ist

$$\alpha = \frac{\xi(30) - \xi(0)}{\operatorname{tg} 30 - \operatorname{tg} 0} = \frac{\xi(30)}{\operatorname{tg} 30} = 1,0531,$$

c) von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = -30^\circ$ ; hier ist

$$\alpha = \frac{\xi(0) - \xi(-30)}{\operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}(-30)} = \frac{\xi(30)}{\operatorname{tg} 30} = 1,0531 \quad (\text{wie bei b}),$$

d) von  $\vartheta = -30^\circ$  bis  $\vartheta = -45^\circ$ ; hier ist

$$\alpha = \frac{\xi(-30) - \xi(-45)}{\operatorname{tg}(-30) - \operatorname{tg}(-45)} = \frac{\xi(45) - \xi(30)}{\operatorname{tg} 45 - \operatorname{tg} 30} = 1,2772 \quad (\text{wie bei a}).$$

## Zusammenstellung der Formeln und Bezeichnungen für die Lösung von Didion.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= x \operatorname{tg} \varphi & \text{dabei } B &= (1 + \kappa_0)^2 \cdot \frac{e^{2c\alpha x} - 2c\alpha x - 1}{\frac{1}{2}(2c\alpha x)^2} \\
 & - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot B, & & - 2\kappa_0(1 + \kappa) \cdot \frac{e^{c\alpha x} - c\alpha x - 1}{\frac{1}{2}(c\alpha x)^2} + \kappa_0^2, \\
 (2) \quad \operatorname{tg} \vartheta &= \operatorname{tg} \varphi & J &= (1 + \kappa_0)^2 \frac{e^{2c\alpha x} - 1}{2c\alpha x} \\
 & - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot J, & & - 2\kappa_0(1 + \kappa) \cdot \frac{e^{c\alpha x} - 1}{c\alpha x} + \kappa_0^2, \\
 (3) \quad v \cos \vartheta &= v_0 \cos \varphi \cdot \frac{1}{V_1}, & V_1 &= (1 + \kappa_0) e^{c\alpha x} - \kappa_0, \\
 (4) \quad t &= \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \cdot D, & D &= (1 + \kappa_0) \frac{e^{c\alpha x} - 1}{c\alpha x} - \kappa_0.
 \end{aligned}$$

$$c = \frac{A \cdot R^2 \pi \cdot g \cdot i \cdot \delta}{P \cdot 1,208}, \quad (5)$$

$$\kappa_0 = \frac{\alpha}{r} v_0 \cos \varphi, \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\vartheta)}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta}, \quad (7)$$

oder auch näherungsweise:

$$\alpha = \frac{\xi\left(\frac{\varphi + \vartheta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi + \vartheta}{2}\right)}, \quad (8)$$

oder endlich kurz.

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (9)$$

Hier bedeutet für den Endpunkt  $(xy)$  des zu berechnenden Flugbahnbogens:  $v$  die Bahngeschwindigkeit des Geschosses in m/sec;  $\vartheta$  die Horizontalneigung der Bahntangente;  $t$  die Flugzeit bis zu diesem Punkt in sec. Ferner sei  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses in m/sec;  $\varphi$  der Abgangswinkel;  $2R$  das Kaliber des Geschosses in m;  $\delta$  das Luftgewicht am Versuchstage in kg/cbm;  $P$  das Geschossgewicht in kg;  $g$  die Fallbeschleunigung in m/sec<sup>2</sup>;  $A = 0,0270$ ;  $r = 435$  [gültig für den ganzen Bereich der Geschwindigkeiten von  $v = \text{ca. } 550$  m/sec abwärts; nach Didion, *Traité de balistique*, Paris 1860, S. 67];  $i = 1$  für Kugeln. Die Funktionen  $B, J, V_1, D$  werden = 1 für den luftleeren Raum.

## Verfahren bei Berechnung einiger Flugbahnaufgaben.

a) Gegeben  $v_0, \varphi, c$ . Man berechnet  $\alpha$  nach (9) und  $\kappa_0$  nach (6) und damit für irgendein vorgeschriebenes  $x$  das  $y$  nach (1),  $\vartheta$  nach (2),  $v$  nach (3),  $t$  nach (4). Soll die Schußweite  $x = X$  für  $y = 0$  berechnet werden, so be-

stimmt man aus der Beziehung (1) für  $y = 0$ , also aus

$$\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} = X \cdot B (2c \alpha X, x_0)$$

den Wert  $X$  durch Probieren (allmähliches Eingabeln) unter Zuhilfenahme der Tabelle für  $B$ .

Soll die Aufgabe genauer gelöst werden, so teilt man die Flugbahn in mehrere Teilbögen; der erste Bogen reiche z. B. von  $\vartheta = \varphi = 45^\circ$  bis  $\vartheta = 40^\circ$ ; dann ist  $\alpha = \frac{\xi(45) - \xi(40)}{\text{tg } 45 - \text{tg } 40}$ ; aus Gleichung (2) folgt

$$J \cdot x = (\text{tg } \varphi - \text{tg } \vartheta) \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi}{g};$$

da  $\vartheta$  willkürlich gewählt wurde (z. B.  $\vartheta = 40^\circ$ ), kennt man daraus, durch Eingabeln gefunden, die Abszisse  $x$  des Endpunkts für den ersten Teilbogen, und mittels (1), (3) und (4) die zugehörigen Werte von  $y$ ,  $v$  und  $t$ . Nun denkt man sich den Koordinatenanfang oder Abgangspunkt in diesen Endpunkt des ersten Teilbogens verlegt und rechnet von diesem aus einen zweiten Bogen usw.

b) Gegeben  $c$ ,  $\varphi$  und das Ziel  $(xy)$ ; gesucht  $v_0$ . Ein erster Näherungswert wird mittels der betreffenden Formel für den leeren Raum

$$v_0^2 = \frac{g x^2}{2 \cos^2 \varphi \cdot (x \cdot \text{tg } \varphi - y)}$$

berechnet oder besser mit Hilfe einer verwandten Schußtafel geschätzt; damit kennt man erste Näherungswerte von  $x_0$  und, da  $x$  gegeben ist, auch von  $B$ . Nunmehr ergibt sich aus Gleichung (1), worin  $y$  gegeben ist, ein genauere Wert von  $v_0$ . Mit diesem  $v_0$  wird die Rechnung wiederholt; man gelangt auf diese Weise zu immer genaueren Werten von  $v_0$ ; doch wäre es verfehlt, die Berechnung sehr oft wiederholen zu wollen, da die gesamte Rechnung nur ein Näherungsverfahren darstellt.

c) Gegeben  $c$ ,  $v_0$  und das Ziel  $(xy)$ , gesucht  $\varphi$  (2 Werte  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ : für Flachschoß und Bogenschuß). Ein erster Näherungswert  $\varphi$  ergibt sich aus der Gleichung des leeren Raums; damit kennt man  $\cos \varphi$  und  $\alpha$  und somit auch  $x_0 = \frac{\alpha v_0 \cos \varphi}{r}$ , ebenso  $B$ . Jetzt läßt sich aus Gleichung (1), worin  $\cos^2 \varphi = 1 : (1 + \text{tg}^2 \varphi)$  gesetzt wird, der doppelte Wert von  $\text{tg } \varphi$  berechnen. Wenn nötig, wird die Berechnung wiederholt, indem man von dem so erhaltenen Wert von  $\varphi$  als 2. Näherungswert ebenso ausgeht wie vorhin von dem ersten.

d) Gegeben Ziel  $(xy)$ ,  $c$  und Einfallswinkel  $\vartheta$ , gesucht  $\varphi$  und  $v_0$ .

Zunächst werden erste Näherungslösungen für  $\varphi$  und  $v_0$  mittels der Gleichungen des leeren Raums  $y = x \text{tg } \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi}$  und  $\text{tg } \vartheta = \text{tg } \varphi - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \varphi}$  gesucht (2 Gleichungen mit den beiden Unbekannten  $v_0$  und  $\varphi$ ), damit ergeben sich erste Näherungswerte von  $x_0$ ,  $B$  und  $J$ ; jetzt wird entsprechend aus den Gleichungen (1) und (2), worin  $x$ ,  $y$ ,  $\vartheta$ ,  $B$ ,  $J$  bekannt sind, das Paar von Unbekannten  $v_0$  und  $\varphi$  berechnet. Dieselbe Rechnung wird weiter von den so berechneten Werten  $v_0$  und  $\varphi$  aus noch einmal durchgeführt, wodurch die Lösung verschärft wird.



**Zahlenbeispiel.** Gegeben  $2R = 0,1895$  m;  $\varphi = 45^\circ$ ;  $P = 29,37$  kg;  $\delta = 1,208$ ;  $i = 1$ ;  $X = 225$  m (für  $y = 0$ ), gesucht  $v_0$ , ferner  $\vartheta_e$ ,  $v_e$ ,  $T$ .

Es wird

$$c = 0,000254; \quad \alpha = \xi(45^\circ); \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1,1478;$$

$$c \propto X = 0,000254 \cdot 1,1478 \cdot 225 = 0,065.$$

Im leeren Raum ist

$$v_0 = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 225}{1}} = 46,98 \text{ m};$$

damit wird

$$x_0 = \frac{\alpha v_0 \cos \varphi}{r} = \frac{1,1478 \cdot 46,98 \cdot \cos 45^\circ}{435} = 0,0875;$$

die Tabellen von Didion liefern hierzu  $B = 1,024$ ,  $J = 1,0375$ ,  $D = 1,0355$ ,  $V_1 = 1,0555$ . Damit ergibt sich ein genauerer Wert von  $v_0$  mittels Gleichung (1), worin  $x = X = 225$  und  $y = 0$  ist; es wird nämlich  $2v_0^2 \cos^2 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 225 : 9,81 \cdot 1,024$ ; also  $v_0 = 47,5$ . Ferner für  $x = X$  wird

$$\operatorname{tg} \vartheta_e = \operatorname{tg} 45^\circ - \frac{9,81 \cdot 225 \cdot 1,0375}{47,5^2 \cdot \cos^2 45^\circ}; \quad \vartheta_e = -45^\circ 50'.$$

Weiter wird

$$v_e = \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta_e \cdot V_1} = \frac{47,5 \cdot \cos 45^\circ}{\cos \vartheta_e \cdot 1,0555} = 45,6;$$

$$T = \frac{X \cdot D}{v_0 \cos \varphi} = \frac{225 \cdot 1,0355}{47,5 \cdot \cos 45^\circ} = 6,94.$$

Zusammen:

$$v_0 = 47,5 \text{ m/sec}; \quad \vartheta_e = -45^\circ 50'; \quad v_e = 45,6 \text{ m/sec}; \quad T = 6,94 \text{ sec}.$$

## § 25. Die Didion-Bernoullische Näherungslösung für die eingliedrigen Potenzgesetze $cf(v) = cv^n$ .

Für die Luftwiderstandsverzögerung  $cf(v) = cv^n$  (quadratisches Gesetz für  $n = 2$ , kubisches für  $n = 3$ , biquadratisches für  $n = 4$  usw.) läßt sich die Lösung in entsprechender Weise durchführen, wie dies von Didion (vgl. § 24) bezüglich seines Gesetzes  $f(v) = v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right)$  geschehen ist. Der Gang der Berechnung war allgemein der, daß aus der Näherungsgleichung  $dx = -\frac{1}{\alpha c} \cdot \frac{u \cdot du}{f(u)}$ , wo  $u = \alpha v \cos \vartheta$ , eine Beziehung zwischen  $v \cos \vartheta$  und  $x$  hergestellt und diese alsdann in  $dt = \frac{dx}{v \cos \vartheta}$  und  $\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = -\frac{g \cdot dx}{(v \cos \vartheta)^2}$  verwendet wird.

Die Ableitung der betreffenden Formeln, die sich ohne jede Schwierigkeit vollzieht, sei an dem Beispiel des biquadratischen Gesetzes  $cf(v) = cv^4$  gezeigt.

$$dx = -\frac{u \cdot du}{\alpha \cdot c u^4} = -\frac{du}{\alpha c u^3}; \quad 2 \alpha c x = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_0^2};$$

oder da  $u = \alpha v \cos \vartheta$ ,  $u_0 = \alpha v_0 \cos \varphi$  ist,

$$v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi \cdot (1 + 2 c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit wird

$$dt = \frac{dx}{v \cos \vartheta} = \frac{1}{v_0 \cos \varphi} \cdot \sqrt{1 + 2 c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot x} \cdot dx,$$

$$t = \frac{1}{3 c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot \left\{ (1 + 2 c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot x)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}.$$

Ferner

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot (1 + 2 c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot x) dx,$$

$$tg \vartheta - tg \varphi = - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} (x + c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot x^2);$$

und da  $tg \vartheta = \frac{dy}{dx}$ ,

$$y = x tg \varphi - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot x^3 \right).$$

Dies ist die in der nachfolgenden Zusammenstellung angeführte Formel (1) für das biquadratische Gesetz. Sie ist identisch mit der Flugbahngleichung von Piton-Bressant und Hélié, die in Frankreich meist in der Form verwendet wird:

$$y = x tg \varphi - \frac{g x^2}{2 \cos^2 \varphi} \left( \frac{1}{v_0^2} + H x \right);$$

es ist hier somit  $H = \frac{2}{3} c \alpha^3 \cos^2 \varphi$ ;  $H$  für dasselbe Geschloß abhängig von  $\varphi$ . In diesem Band I, § 19 (Umkehrungsproblem, 2. Beispiel) ist  $\frac{2}{3} c \alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi$  oder  $H v_0^2 = m$  gesetzt und in § 32 (Anwendungen, 1. Methode) ist  $H v_0^2$  mit  $K$  bezeichnet.  $K$  hängt also für dasselbe Geschloß von  $v_0$  und von  $\varphi$  ab. Von dieser Abhängigkeit ist in § 32 des näheren die Rede.

#### Zusammenstellung.

$$y = x tg \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot B, \quad (1)$$

$$tg \vartheta = tg \varphi - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot J, \quad (2)$$

$$v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi \cdot \frac{1}{V}, \quad (3)$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \cdot D; \quad (4)$$

dabei haben die Funktionen  $B, J, V, D$  folgende Werte (s. Tabellen 5a, b, c im Anhang):

Verzögerung durch den Luftwiderstand	$B =$	$J =$	$V =$	$D =$	mit der Abkürzung
$cf(v) = cv^2$	$\frac{c^2 - z - 1}{\frac{1}{2} z^2}$	$\frac{c^2 - 1}{z}$	$\frac{z}{c^2}$	$\frac{\frac{z}{c^2} - 1}{\frac{z}{2}}$	$z = 2 c \alpha x$
$cf(v) = cv^3$	$1 + \frac{2}{3} z + \frac{1}{6} z^2$	$1 + z + \frac{1}{3} z^2$	$1 + z$	$1 + \frac{z}{2}$	$z = c \alpha^2 v_0 \cos \varphi \cdot x$
$cf(v) = cv^4$	$1 + \frac{1}{3} z$	$1 + \frac{1}{2} z$	$(1 + z)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{(1 + z)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2} z}$	$z = 2 c \alpha^2 v_0^3 \cos^2 \varphi \cdot x$
allgemein $cf(v) = cv^n$	$\frac{\frac{2}{3} \frac{n-2}{n-3} - \frac{2}{n-2} z - 1}{\frac{n(n-1)}{(n-2)^2} z^2}$	$\frac{\frac{n}{(1+z)^{n-2}} - 1}{\frac{n}{n-2} z}$	$(1 + z)^{\frac{1}{n-2}}$	$\frac{\frac{n-1}{(1+z)^{n-2}} - 1}{\frac{n-1}{n-2} z}$	$z = c \cdot \alpha^{n-1} \cdot (n-2) \cdot (v_0 \cos \varphi)^{n-2} \cdot x$

**Verschiedene Umformungen der Didion-Bernoullischen Näherungslösung, speziell für das quadratische und das kubische Luftwiderstandsgesetz,**

A. Im Fall des quadratischen Gesetzes (Verzögerung  $c f(v) = cv^2$ ) ist

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} B(z); \quad \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \varphi} J(z);$$

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{V(z)}; \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} D(z);$$

wo  $z = 2 c \alpha x$ . Speziell für den Auffallpunkt ( $x = X$ ,  $y = 0$ ) sei  $2 c \alpha X = Z$ ; für diesen Punkt wird aus der ersten Gleichung  $\frac{v_0^2 \sin 2 \varphi}{g}$  (oder kurz bezeichnet  $\mathfrak{B}$ )  $= X B(Z)$ .

Ferner sei statt  $J(z)$  die Funktion  $E(z)$  eingeführt, definiert durch  $2 J = B(1 + E)$ ;  $E(z)$  ist somit die Funktion

$$\frac{2 J - B}{B} = \frac{e^2(z-1) + 1}{e^2 - z - 1}.$$

Damit nimmt die zweite Gleichung die Form an:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x B(1+E)}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \left\{ 1 - \frac{x B(z)(1+E(z))}{\mathfrak{B}} \right\}.$$

Im Auffallpunkt mit  $z = Z$ ,  $\vartheta = \vartheta_e = -\omega$  ( $\omega$  spitzer Auffallwinkel) ist demnach  $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \cdot E(Z)$ .

Weiter möge neben der Funktion  $D(z)$  eine andere  $\Theta(z)$  durch die Gleichung  $D = \sqrt{B \Theta}$ , also  $\Theta = \frac{D^2}{B} = \frac{2 \left( \frac{z}{e^2} - 1 \right)^2}{e^2 - z - 1}$  definiert sein, so ist für einen beliebigen Flugbahnpunkt

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \cdot \sqrt{B(z) \cdot \Theta(z)}$$

und speziell für den Auffallpunkt

$$T = \frac{X}{v_0 \cos \varphi} \cdot D(Z) = \frac{X}{v_0 \cos \varphi} \cdot \sqrt{B(Z) \cdot \Theta(Z)}$$

$$= \frac{X}{v_0 \cos \varphi} \sqrt{\frac{v_0^2 \sin 2 \varphi}{g X} \cdot \Theta(Z)} = \sqrt{\frac{2 X \operatorname{tg} \varphi}{g} \cdot \Theta(Z)}.$$

Endlich im Gipfel der Flugbahn (mit  $\vartheta = 0$ ,  $\operatorname{tg} \vartheta = 0$ ;  $x = x_e$ ,  $y = y_e$ ,  $z = z_e = 2 c \alpha x_e$ ) wird die zweite der obigen Gleichungen zu der folgenden:

$$0 = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g \cdot x_e}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot J(z_e) \quad \text{oder} \quad X \cdot B(Z) = 2 x_e \cdot J(z_e).$$

Eine andere Beziehung für die Gipfelabszisse ergibt sich daraus, daß die Gleichung für  $\operatorname{tg} \vartheta$  in der Form

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{e^2 - 1}{2 c \alpha}$$

sich schreiben läßt. Hier ist  $e^x - 1 = V^2 - 1$ , da  $V = e^{\frac{x}{2}}$  ist. Für  $\vartheta = 0$  wird somit  $\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} \cdot 2c\alpha = e^{x_s} - 1 = V^2(z_s) - 1$ , was wegen  $\mathfrak{B} = X \cdot B(Z)$  und  $Z = 2c\alpha X$  auch die Form  $V^2(z_s) = 1 + \frac{1}{2} \mathfrak{B} \cdot 2c\alpha = 1 + \frac{1}{2} Z \cdot B(Z)$  annimmt.

## Zusammenstellung.

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} B(z) = x \operatorname{tg} \varphi \cdot \left[ 1 - \frac{x \cdot B(z)}{X \cdot B(Z)} \right], \quad (1)$$

für Flugbahnordinate  $y$ .

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot J(z) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \left[ 1 - \frac{x \cdot B(z)}{X \cdot B(Z)} (1 + E(z)) \right], \quad (2)$$

für Neigung  $\vartheta$  der Bahntangente.

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{V(z)}, \quad (3)$$

für horizontale Geschwindigkeit  $v \cos \vartheta$ .

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \cdot D(z) = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \cdot \sqrt{B(z) \cdot \Theta(z)}, \quad (4)$$

für Flugzeit  $t$ .

$$\text{Dabei } z = 2c\alpha \cdot x. \quad (5)$$

$$2c\alpha \mathfrak{B} = 2c\alpha \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} = Z \cdot B(Z), \text{ oder } \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g X} = B(Z), \quad (6)$$

für  $Z = 2c\alpha X$ .

$$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} \vartheta_s = \operatorname{tg} \varphi \cdot E(Z), \text{ oder } \operatorname{tg} \omega = \frac{g X}{v_0^2 \cos^2 \varphi} J(Z) - \operatorname{tg} \varphi, \quad (7)$$

für spitzen Auffallwinkel  $\omega$ .

$$v_s = \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \omega \cdot V(Z)}, \text{ für Endgeschwindigkeit } v_s. \quad (8)$$

$$T = \frac{X}{v_0 \cos \varphi} \cdot D(Z) = \sqrt{\frac{2 X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{g} \cdot \Theta(Z)}, \quad (9)$$

für Gesamtflugzeit  $T$ .

$$\left. \begin{aligned} X \cdot B(Z) &= 2 \cdot x_s \cdot J(z_s) \quad \text{oder} \quad 2c\alpha \mathfrak{B} = 2 \cdot z_s \cdot J(z_s) \\ V^2(z_s) &= 1 + c\alpha \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2} Z \cdot B(Z) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

für  $z_s = 2c\alpha x_s$  und damit für Gipfelabszisse  $x_s$ .

$$y_s = \operatorname{tg} \varphi \cdot x_s - \frac{g \cdot x_s^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} B(z_s), \quad (11)$$

für Gipfelordinate  $y_s$ .

Beliebiger Flugbahnpunkt  $(x, y)$ 

Auffallpunkt

Gipfelpunkt

$$v_s = \frac{v_0 \cos \varphi}{V(z_s)}, \text{ für Gipfelgeschwindigkeit } v_s. \quad \left. \vphantom{\frac{v_0 \cos \varphi}{V(z_s)}} \right\} \text{ Gipfelpunkt} \quad (13)$$

$$t_s = \frac{x_s}{v_0 \cos \varphi} \cdot D(z_s), \text{ für Flugzeit } t_s \text{ bis zum Gipfel.} \quad \left. \vphantom{\frac{x_s}{v_0 \cos \varphi} \cdot D(z_s)} \right\} \quad (14)$$

Hier bedeutet:

$v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit in m/sec;  $\varphi$  = Abgangswinkel;  
 $X$  = Schußweite (m) für  $y = 0$ ;  $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}$  (vgl. Anhang, Tabelle 8b

für  $\xi$ ), genauer  $\alpha = \frac{\xi\left(\frac{\vartheta + \varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta + \varphi}{2}\right)}$ , noch genauer soll sein

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\vartheta)}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta}; \quad c = \frac{R^2 \pi \cdot g \cdot i \cdot \delta}{P \cdot 1,206} \cdot 0,014,$$

wobei  $2R$  = Geschosßkaliber in m,  $P$  = Geschosßgewicht in kg,  $\delta$  = Luftgewicht am Versuchstag in kg/cbm,  $i = 1$  für Langgeschosse mit ogivaler Spitze von 2 Kal. Abrundungsradius (vgl. auch § 13); mit diesem Zahlenfaktor 0,014 gültig für Geschwindigkeiten kleiner als die normale Schallgeschwindigkeit; mit dem Faktor 0,039 statt 0,014 gültig für  $v$  zwischen ca. 550 und 420 m/sec; mitunter wird mit einem mittleren Zahlenfaktor gerechnet; sicherer ist es, die Flugbahn in mehreren Teilen zu berechnen und dabei den Zahlenfaktor zu wechseln (vgl. dazu § 10).  $B, J, V, D, E, \Theta$  sind die Funktionen:

$$B(z) = \frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2} z^2} \text{ (Anhang, Tabelle 5b), } J(z) = \frac{e^z - 1}{z} \text{ (Anhang, Ta-$$

$$\text{belle 5c), } V(z) = e^{\frac{z}{2}}, \text{ (dafür Anhang, Tabelle 5a), } D(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}} - 1}{\frac{z}{2}}$$

$$\text{(dafür gleichfalls Anhang, Tabelle 5c); } E(z) = \frac{e^z(z-1)+1}{e^z - z - 1};$$

$$\Theta(z) = \frac{2\left(e^{\frac{z}{2}} - 1\right)^2}{e^z - z - 1}. \text{ Bezüglich Tabellen für } E(z) \text{ und } \Theta(z), \text{ sowie für } z \cdot B(z) \text{ vgl. Heydenreich, Lehre vom Schuß, Berlin 1908, II, S. 130 und 131. Die ausführlichsten Tabellen für die hier vorkommenden Funktionen und für } \alpha \text{ findet man in dem Buch von J. Kozák, Einführung in die äußere Ballistik und deren Anwendung zur Berechnung von Schießtafeln, Wien und Leipzig 1911.}$$

Verfahren bei der Lösung einzelner Aufgaben:

Gegeben  $v_0, \varphi, X, R, P, \delta$ ; gesucht  $i, v_s, T, \omega, x_s, y_s, v$ , und  $y$  zu beliebigem  $x$ . Berechne  $\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{gX}$  und  $\alpha$ , dazu  $Z$  aus (6) und damit  $c = \frac{Z}{2\alpha X}$  und folglich  $i$ . Ferner folgt aus (11)  $z_s$  und damit  $x_s$ , hierzu  $y$ ,

mittels (12),  $v_e$  aus (13),  $t_e$  aus (14). Weiter  $\omega$  mit (7), dann  $v_e$  mit (8),  $T$  aus (9). Da  $i$  berechnet ist, ergibt sich zu beliebigem Abscissenwert  $x$  der Wert von  $z$  und folglich nach (1)  $y$ , nach (2)  $\vartheta$ , nach (3)  $v$ , nach (4)  $t$ .

Gegeben  $c, \varphi, v_0$ ; die übrigen Größen gesucht.

Zunächst wird mit dem ersten Näherungswert  $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}$  (zu jedem beliebigen  $x$ ) der Wert von  $z$  nach (5) und sodann  $y, \vartheta, v, t$  nach (1), (2), (3), (4) ermittelt. Ferner ergibt sich nach (6) aus der Tabelle für  $Z \cdot B(Z)$  der Wert von  $Z$  und damit  $X$ , sowie  $\omega$  nach (7). Mit diesem Wert von  $\omega$  wird unter Umständen  $\alpha$  genauer ermittelt und damit werden die übrigen Berechnungen wiederholt. Jetzt folgt  $v_e$  aus (8),  $T$  aus (9),  $z$ , und damit  $x$ , aus (11) usw.

Gegeben  $c, v_0, X$ , gesucht  $\varphi$  (z. B. zum Zweck der Berechnung des Abgangsfehlers) und die übrigen Größen.

Es wird  $\varphi$  mittels der betreffenden Formel des luftleeren Raumes oder besser mit einer verwandten Schußtafel geschätzt und dazu der 1. Näherungswert von  $\alpha$  berechnet. Damit bekommt man  $Z = 2c\alpha X$  und folglich nach (6) einen 2. Näherungswert von  $\varphi$  und nach (7) von  $\omega$ . Damit wird  $\alpha$  genauer ermittelt und die Rechnung wiederholt, unter Umständen zweimal. Dann ergibt sich  $v_e$  aus (8),  $T$  aus (9) usw.

Gegeben  $c, \varphi, x$  und  $v \cos \vartheta$ , gesucht  $v_0$  (z. B. zum Zweck der Reduktion einer Geschwindigkeitsmessung in der Entfernung  $x$  m auf die Mündung).

Berechne  $\alpha$  und damit  $z$  und  $V(z)$ ; dann folgt  $v_0$  aus (3).

Gegeben  $R, P, \delta$ , sowie  $X, \varphi, T$ ; gesucht  $i, v_0, v_e, \omega$  usw.

Aus (9) folgt, da  $T, X, \varphi$  gegeben ist,  $\Theta(Z)$  und damit  $Z$ , also  $c = \frac{Z}{2\alpha X}$

und daraus  $i$ . Sodann ergibt sich  $v_0$  z. B. aus  $v_0 = \frac{X \cdot D}{T \cos \varphi}$ ,  $\omega$  aus (7),  $v_e$  aus (8) usw.

Die obige Lösung eignet sich insbesondere für solche Fälle, in denen die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses kleiner als etwa 300 m/sec ist; über den Grad der Genauigkeit vgl. § 41. Neben den ursprünglichen Funktionen  $B, J, V, D$  lassen sich außer den erwähnten Funktionen  $E$  und  $\Theta$  und  $z \cdot B(z)$  selbstverständlich noch beliebige andere in das Gleichungssystem einführen.

Besonders N. v. Wuich hat die Lösungsart durch Anlegung ausgedehnter Tabellen dem praktischen Gebrauch angepaßt; in Österreich wurde dieses Verfahren zu Schußtafelberechnungen benützt. Die in Heydenreichs „Lehre vom Schuß“, Berlin 1908, II, S. 122 ff. aufgeführte Methode ist identisch mit der obigen.

B. Mit der vorgenannten Lösungsmethode samt zugehörigen Tabellen fällt außerdem dem Inhalt nach völlig zusammen die Methode der sogenannten Schußfaktoren von Siacci (Anhang, Tabelle Nr. 9). Diese Tabelle enthält für die verschiedenen Werte von  $Z$  diejenigen von  $\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{gX}$ ,  $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}$ ,  $\frac{T}{\sqrt{X \operatorname{tg} \varphi}}$ ,  $\frac{v_0 \cos \varphi}{v_e \cos \omega}$ ,  $\frac{x}{X}$ ,  $\frac{y}{X \operatorname{tg} \varphi}$ ,  $\frac{\delta \pm \alpha X (2R)^2 1000}{P \cdot 1,206}$  und von  $\frac{\delta \pm \alpha 1000 (2R)^2 \cdot v_0^2 \sin 2\varphi}{P \cdot 1,206 \cdot g}$ ; diese Ausdrücke sind der Reihe nach mit  $ff_1, f_2, \dots, f_7$  bezeichnet und heißen die Schußfaktoren.

Gebrauch der Tabelle:

Gegeben  $P, R, \delta, i$ , sowie  $X$  und  $\varphi$ .

Man gehe aus von dem gegebenen Wert von  $f_6$ ; dazu suche man die auf derselben Horizontalreihe stehenden, also zu dem gleichen Werte von  $Z$  gehörigen Zahlenwerte von  $f f_1 f_2 f_3 f_4 f_5$  auf. Dann erhält man  $v_0$  aus  $f$ ,  $\omega$  aus  $f_1$ ,  $T$  aus  $f_2$ ,  $v_e$  aus  $f_3$ ,  $x_e$  aus  $f_4$ ,  $y_e$  aus  $f_5$ .

Gegeben  $v_0, X, \varphi$ .

Man gehe aus von  $f$  und suche dazu die zugehörigen Werte von  $f_1 f_2 \dots$ . Dann gibt  $f_1$  den Wert von  $\omega$ ,  $f_2$  denjenigen von  $T$  usw.

Ableitung: Berechnung der Tabelle:

Nach dem Obigen ist  $\frac{v_0^3 \sin 2\varphi}{g X} = B(Z)$ , dies sei bezeichnet mit  $f$ ;

ferner war  $\frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \varphi} = E(Z) = \frac{2 J(Z)}{B(Z)} - 1$ , " " " "  $f_1$ ;

"  $\frac{T}{\sqrt{X \cdot \text{tg } \varphi}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{D(Z)}{\sqrt{B(Z)}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \Theta(Z)$ , " " " "  $f_2$ ;

"  $\frac{v_e \cos \omega}{v_0 \cos \varphi} = 1 : V(Z)$ , " " " "  $\frac{1}{f_3}$ ;

"  $V^2(z_e) = 1 + \frac{1}{2} Z \cdot B(Z)$ ; also gehört zu jedem gegebenen  $Z$  ein bestimmtes  $z_e$ , somit nach Division mit  $Z$  auch ein bestimmtes  $\frac{z_e}{Z}$  oder, was dasselbe ist, ein bestimmtes  $\frac{x_e}{X}$ ; dies sei  $f_4$ . Weiter war

$$y = x \text{tg } \varphi \cdot \left[ 1 - \frac{x \cdot B(z)}{X \cdot B(Z)} \right],$$

speziell für den Gipfel ist  $y = y_e$  und  $x = x_e$ , also ist, nach Division mit  $\text{tg } \varphi$  und  $X$ ,  $\frac{y_e}{X \cdot \text{tg } \varphi} = \frac{x_e}{X} \cdot \left[ 1 - \frac{x_e}{X} \cdot \frac{B(z_e)}{B(Z)} \right]$ . Hierin ist nach dem Vorigen  $z_e$  eine bestimmte Funktion von  $Z$ , also ist auch  $B(z_e)$  mit  $Z$  gegeben; ebenso ist  $\frac{x_e}{X} = f_4$  eine gegebene Funktion von  $Z$ , somit ist mit  $Z$  auch  $\frac{y_e}{X \cdot \text{tg } \varphi}$  vorgeschrieben.

$Z$  selbst war  $= 2 \alpha c X$ ; somit ist  $f_6$  mit  $Z$  gegeben und wegen  $f$  auch  $f_1$ .

Zusammenstellung über die Berechnung der Schußfaktoren  $f f_1 f_2 \dots$  als Funktionen von  $Z$ :

$$f = \frac{v_0^3 \sin 2\varphi}{g X} = B(Z)$$

$$f_1 = \frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \varphi} = E(Z) = \frac{2 J(Z)}{B(Z)} - 1$$

$$f_2 = \frac{T}{\sqrt{X \text{tg } \varphi}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{D(Z)}{\sqrt{B(Z)}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \Theta(Z)$$

$$f_3 = \frac{v_0 \cos \varphi}{v_e \cos \omega} = V(Z)$$

also je eine gegebene  
Funktion von  
 $Z = 2 \alpha c X$ .



$$f_4 = \frac{x_2}{X} = \frac{z_2}{Z}$$

$$f_5 = \frac{y_2}{X \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{x_2}{X} \left[ 1 - \frac{x_2}{X} \frac{B(z_2)}{B(Z)} \right]$$

$$f_6 = \frac{\delta i \alpha 1000 (2R)^3}{P \cdot 1,206} \cdot X$$

$$f_7 = \frac{\delta i \alpha 1000 (2R)^3 \cdot v_0^3 \sin 2\varphi}{P \cdot 1,206 \cdot g}$$

also je eine gegebene  
Funktion von  
 $Z = 2c \alpha X$ .

Auf diese Weise läßt sich zu jedem Wert von  $Z$  der zugehörige von  $f f_1 f_2 \dots$  berechnen; diese Berechnung ist in Tabelle 9 niedergelegt. Man sieht, daß  $f$  einfach die frühere Funktion  $B(z)$  (Tabelle 5b) ist,  $f_2$  die Funktion  $V(z)$  (Tabelle 5a), und daß mit  $f_1$  und  $f_2$  die Funktionen  $E(z)$  und  $\Theta(z)$  tabellarisch dargestellt sind.

C. Für das kubische Luftwiderstandsgesetz hat F. Chapel eine entsprechende Tabelle von Schußfaktoren aufgestellt. Diese Tabelle ist ihrerseits dem Inhalt nach gleichwertig mit dem Formelsystem, das völlig unabhängig von Chapel Fr. v. Zedlitz 1896 auf Grund des kubischen Gesetzes erhielt:

Unter Voraussetzung des letzteren hat man, wenn die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $cv^3$  ist,

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^3 \cos^3 \varphi} \left( 1 + \frac{2}{3} z + \frac{1}{6} z^2 \right), \text{ wobei } z = c \alpha^2 v_0 \cos \varphi \cdot x,$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{v_0^3 \cos^3 \varphi} \left( 1 + z + \frac{1}{3} z^2 \right),$$

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{1 + z},$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \left( 1 + \frac{z}{2} \right).$$

Mit der Substitution  $1 + \frac{z}{2} = q$  oder  $z = 2(q - 1)$  wird

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^3 \cos^3 \varphi} \cdot \frac{1 + 2q^2}{3}; \quad \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{v_0^3 \cos^3 \varphi} \cdot \frac{1 - 2q + 4q^2}{3};$$

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{2q - 1}, \text{ wobei } q = \frac{t v_0 \cos \varphi}{x}.$$

Hier ist  $q$  ein Parameter, der entlang der Flugbahn sich ändert; für den Endpunkt ( $y = 0$ ,  $x = X$ ), wo  $v = v_*$ ,  $\vartheta = -\omega$ ,  $t = T$ , möge der Wert von  $q$  mit  $q_*$  bezeichnet sein. Dann ist

$$\sin 2\varphi = \frac{g X}{v_0^3} \cdot \frac{1 + 2q_*^2}{3}, \quad (I)$$

und dann, mit Benutzung von (I),

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{g X}{2 v_0^3 \cos^3 \varphi} \cdot \frac{1 - 4q_* + 6q_*^2}{3}, \quad (II)$$

$$v_* = \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{2q_* - 1}, \quad (III)$$

$$T = \frac{X}{v_0 \cos \varphi} \cdot q_*. \quad (IV)$$

Danach würde die Konstruktion einer Schußtafel folgendermaßen vor sich gehen: Für mehrere Schußweiten  $X$  sind die Abgangswinkel  $\varphi$  aus der Beobachtung bekannt, außerdem ist die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gegeben; die notwendigen Reduktionen auf Windstille, Normalluftgewicht usw. seien schon erfolgt, so ergibt sich zu jedem Tripel von Werten  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $X$  mit Hilfe von (I) ein bestimmter Wert von  $q_e$ ; die sämtlichen Werte von  $q_e$  werden in Funktion von  $X$  graphisch aufgetragen, und unter Umständen wird die Kurve ausgeglichen. Aus dieser Kurve werden sodann zu gleichweit abstehenden Werten von  $X$ , also z. B. zu  $X = 100, 200, 300$  usw. Metern, je die zugehörigen Werte von  $q_e$  entnommen. Zu jedem dieser  $q_e$ -Werte berechnet sich dann nach (I) der Abgangswinkel  $\varphi$ , nach (II) der spitze Auffallwinkel  $\omega$ , nach (III) die Endgeschwindigkeit  $v_e$  und nach (IV) die Flugzeit  $T$ .

Zu diesem Lösungssystem von Freih. von Zedlitz mögen die folgenden Bemerkungen hinzugefügt werden, durch die bewiesen werden soll, daß und weshalb dieses System, trotz der verschiedenen äußeren Form, identisch ist mit der Chapelschen Schußfaktorentabelle; die letztere ist darum unter die Tabellen des Anhangs nicht aufgenommen.

Das System der obigen Gleichungen (I) bis (IV) zeigt, daß die Schußfaktoren  $\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{X}$ ,  $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}$ ,  $\frac{v_e \cos \omega}{v_0 \cos \varphi}$  und  $\frac{T \cdot v_0 \cos \varphi}{X}$  bestimmte gegebene Funktionen von  $q_e$  oder von  $1 + \frac{Z}{2}$  und damit von  $Z \equiv c\alpha^2 v_0 \cos \varphi X$  sind und danach in Funktion von  $Z$  berechnet und tabellarisch dargestellt werden können. Denkt man sich  $\frac{T v_0 \cos \varphi}{X}$  durch  $\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{X}$  dividiert, so erkennt man weiter, daß auch  $\frac{T}{v_0 \sin \varphi}$  eine gegebene Funktion von  $Z$  ist. Endlich ist eine solche auch der Ausdruck  $\frac{y_1}{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}$ , wo  $y_1$  die Flugbahnordinate für die Abszisse  $x = \frac{1}{2} X$  bedeuten soll. Es ist nämlich allgemein  $y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{1 + 2 q^2}{3}$ , also speziell  $y_1 = \frac{1}{2} X \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{g X^2}{8 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{1 + 2 q_1^2}{3}$ , wobei

$$q_1 = 1 + \frac{z_1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot c\alpha^2 v_0 \cos \varphi \cdot \frac{X}{2}.$$

Aber  $q_e$  war  $= 1 + \frac{1}{2} c\alpha^2 v_0 \cos \varphi X$ , also ist  $q_1 = 1 + \frac{1}{2} (q_e - 1)$ ; es ist somit  $q_1$  gleichfalls eine gegebene Funktion von  $q_e$ . Nun ist  $y_1 = \frac{1}{2} X \operatorname{tg} \varphi \cdot \left[ 1 - \frac{g X}{2 \sin 2\varphi \cdot v_0^2} \cdot \frac{1 + 2 q_1^2}{3} \right]$ ; da hier  $q_1$  und  $\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{X}$  gegebene Funktionen von  $q_e$ , also von  $Z$  sind, so ist die ganze eckige Klammer eine solche und damit auch  $\frac{y_1}{X \operatorname{tg} \varphi}$ .

Diese Schußfaktoren  $\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{X}$ ,  $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}$ ,  $\frac{v_0 \cos \omega}{v_0 \cos \varphi}$ ,  $\frac{T}{v_0 \sin \varphi}$ ,  $\frac{y_1}{X \operatorname{tg} \varphi}$  sind es, die in der Tabelle von Chapel aufgeführt sind; und man sieht den inneren Zusammenhang mit dem angeführten Gleichungssystem von Fr. v. Zedlitz, auf das etwas vorher schon Ronca auf ganz anderen Wegen geführt worden war.

## § 26. Näherungslösung von F. Siacci 1880 („Siacci I“).

Gegenüber dem Didionschen Verfahren ließ Siacci 1880 nur die folgenden Modifikationen eintreten, die mehr äußerlicher Natur sind, weniger auf die mathematische Integrationsmethode sich beziehen:

Erstens wählte er, wie schon vorher 1872 N. Mayevski, nach dem Vorschlag von St. Robert (1872), statt der Flugbahnabszisse  $x$  die mit dem Didionschen Korrektionsfaktor  $\alpha$  multiplizierte Horizontalgeschwindigkeit, also  $\alpha v \cos \vartheta = u$ , zur unabhängigen Veränderlichen des Lösungssystems; oder, anders ausgedrückt, in dem allgemeinen Lösungssystem § 23 ist  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$  gewählt.

Zweitens sind statt des einheitlichen Luftwiderstandsgesetzes  $cv^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right)$  von Didion die Mayevskischen Zonengesetze verwendet. Die Verzögerung durch den Luftwiderstand, also der Luftwiderstand dividiert durch die Geschossmasse, sei  $cf(v)$ , so ist konstant  $c = \frac{(2R)^2 \cdot \delta \cdot i \cdot 1000}{P \cdot 1,206}$ , ( $2R$  das Kaliber in m;  $\delta$  das Luftgewicht in kg/cbm;  $P$  das Geschossgewicht in kg;  $i$  der Formkoeffizient, dabei  $i=1$  für ovigale Geschosse vom Abrundungsradius 2 Kaliber, oder  $n=1000 \cdot i$  der sog. Formwert); dann ist für

$$700 > v > 419 \text{ m/sec } f(v) = \frac{0,039 \cdot \pi \cdot g \cdot v^2}{4 \cdot 1000},$$

$$419 > v > 375 \quad " \quad " = \frac{0,000\,094 \cdot \pi \cdot g \cdot v^3}{4000},$$

$$375 > v > 295 \quad " \quad " = \frac{0,0671 \cdot \pi \cdot g \cdot v^5}{4000},$$

$$295 > v > 240 \quad " \quad " = \frac{0,0588 \cdot \pi \cdot g \cdot v^3}{4000},$$

$$v \leq 240 \quad " \quad " = \frac{0,014 \cdot \pi \cdot g \cdot v^2}{4000},$$

Damit erhält man folgendes System von Gleichungen

$$x = \frac{1}{\alpha c} (D_u - D_{u_0}), \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\alpha}{2c} (J_u - J_{u_0}), \quad (2)$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x \cdot \alpha}{2c} \left( \frac{A_u - A_{u_0}}{D_u - D_{u_0}} - J_{u_0} \right) \\ = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c^2} (A_u - A_{u_0} - J_{u_0} (D_u - D_{u_0})), \quad (3)$$

$$t = \frac{1}{c} (T_u - T_{u_0}); \quad (4)$$

$$u = \alpha v \cos \vartheta; \quad u_0 = \alpha v_0 \cos \varphi. \quad (5)$$

( $\varphi$  Abgangswinkel,  $v_0$  Anfangsgeschwindigkeit;  $(xy)$  die Koordinaten des Endpunkts des zu berechnenden Flugbahnstücks,  $\vartheta$  die Neigung der Tangente,  $v$  die Geschwindigkeit des Geschosses in diesem Punkt,  $t$  die Flugzeit bis zum Erreichen dieses Punktes;  $D_u = - \int \frac{u \cdot du}{f(u)}$ ;  $J_u = - 2g \cdot \int \frac{du}{u \cdot f(u)}$ ;  $T_u = - \int \frac{du}{f(u)}$ ;  $A_u = - \int \frac{J_u \cdot u \cdot du}{f(u)}$ ; für  $D$ ,  $J$ ,  $T$ ,  $A$  Tabellen bei Siacci, Braccialini, Klußmann usw.)

Was die Berechnung der Integrale  $D$ ,  $J$ ,  $T$ ,  $A$  anlangt, so ist zunächst ersichtlich, daß in den Ausdrücken für  $x$ ,  $\vartheta$ ,  $t$  jene Funktionen nur in ihren Differenzen gegenüber dem Anfangszustand, also nur in den Kombinationen  $D_u - D_{u_0}$ ,  $J_u - J_{u_0}$  usw. auftreten, so daß beliebige konstante Zahlenwerte hinzugefügt werden können. Gleiches ist bezüglich  $A$  der Fall, da  $y$  aus  $\operatorname{tg} \vartheta$  durch Integration nach  $u$  hervorging; man hat nur dafür zu sorgen, daß an den Zonen-Übergängen die Tabellen stetig fortlaufen. Im einzelnen vollzieht sich sonach die Anlegung der Tabellen für  $D$ ,  $J$ ,  $T$ ,  $A$  folgendermaßen:

a) Erste Zone,  $v$  zwischen 700 und 419 m/sec;  $f(v) = q \cdot v^2$ , wo zur Abkürzung  $q = \frac{0,0394 \cdot \pi \cdot g}{4000}$ .

$$D(u) = - \int \frac{u \cdot du}{f(u)} = - \frac{1}{q} \int \frac{u \cdot du}{u^2} \\ = - \frac{1}{q} \lg u + \text{willkürliche Integrationskonstante } Q,$$

$$J(u) = - 2g \int \frac{du}{u \cdot f(u)} = - \frac{2g}{q} \int \frac{du}{u^2} \\ = + \frac{g}{q} \cdot \frac{1}{u^2} + \text{willkürliche Integrationskonstante } Q_1,$$

$$T(u) = - \int \frac{du}{f(u)} = - \frac{1}{q} \int \frac{du}{u^2} \\ = + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{u} + \text{willkürliche Integrationskonstante } Q_2,$$

$$A(u) = - \int \frac{J(u) \cdot u \cdot du}{f(u)} = - \int \frac{\left( \frac{g}{q} \cdot \frac{1}{u^2} + Q_1 \right) \cdot u \cdot du}{q \cdot u^2} \\ = - \frac{g}{q^2} \cdot \int \frac{du}{u^2} - \frac{Q_1}{q} \int \frac{du}{u} = + \frac{g}{2q^2} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{Q_1}{q} \lg u \\ + \text{willkürliche Integrationskonstante } Q_3.$$

Die Konstanten  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  sind willkürlich. Siacci wählt  $Q_1 = 0$  und  $Q$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  derart, daß die Tabellen  $D(u)$ ,  $T(u)$ ,  $A(u)$  für  $u = 700$  mit Null beginnen.

b) Zweite Zone,  $v$  zwischen 419 und 375 m/sec;  $f(v) = pv^3$ , wo  $p = \frac{0,00009404 \cdot \pi \cdot g}{4000}$ .

$$\begin{aligned} D(u) &= - \int \frac{u \cdot du}{f(u)} = - \frac{1}{p} \int \frac{u \cdot du}{u^3} \\ &= + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{u} + \text{willkürliche Integrationskonstante } C, \\ J(u) &= - 2g \int \frac{du}{u \cdot f(u)} = - \frac{2g}{p} \int \frac{du}{u^4} \\ &= + \frac{2g}{3p} \cdot \frac{1}{u^3} + \text{willkürliche Integrationskonstante } C_1 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Konstanten  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  sind so zu bestimmen, daß die Funktionswerte am Anfang der zweiten Zone gleich den entsprechenden am Ende der ersten Zone werden, also z. B.  $C$  aus der Bedingung, daß für  $u = 419$ ,  $-\frac{1}{q} \lg u + Q = \frac{1}{pu} + C$  usw.

Das Verfahren bei der Lösung der einzelnen Flugbahnaufgaben mittels des Gleichungssystems (1) bis (5) leuchtet nach dem früher Gesagten ohne weiteres ein:

Ist z. B.  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $c$  gegeben und sollen für ein bestimmtes  $x$  die Größen  $y$ ,  $v$ ,  $t$ ,  $\vartheta$  ermittelt werden, so wird aus (1), worin  $x$ ,  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $c$ , also auch  $u_0$  und  $u$  bekannt sind,  $D(u)$  und hieraus  $u$  berechnet; die übrigen Tabellen liefern die zugehörigen Werte von  $J(u)$ ,  $A(u)$ ,  $T(u)$ ; also erhält man  $\vartheta$  aus (2); damit wird gegebenenfalls der Wert von  $\alpha$  verschärft und die Berechnung von  $\vartheta$  wiederholt; dann hat man  $y$  aus (3),  $t$  aus (4) und  $v$  aus (5).

Dagegen macht die Berechnung der Elemente  $X$ ,  $v_e$ ,  $\omega$ ,  $T$  des Auffallpunkts aus denselben Daten  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $c$  ein umständliches Verfahren sukzessiven Eingabelns notwendig: Aus (3) folgt insbesondere für den Auffallpunkt ( $y = 0$ ,  $x = X$ ) die Beziehung  $0 = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\alpha}{2c} \left( \frac{A_{u_e} - A_{u_0}}{D_{u_e} - D_{u_0}} - J_{u_0} \right)$ ; hieraus wird durch sukzessives Probieren  $u_e = \alpha v_e \cos \omega$  ermittelt; daraus folgt nach (1)  $X = \frac{1}{\alpha c} (D_{u_e} - D_{u_0})$ ; und dann mit (2)  $\operatorname{tg} \omega$ . Hierauf wird  $\alpha$  genauer ermittelt, und die ganze Rechnung ist damit zu wiederholen.

Die bei Schußtafelberechnungen besonders wichtige Aufgabe, aus gegebenem  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $X$ ,  $P$ ,  $R$  und  $\delta$ , aber bei unbekanntem  $i$ , also unbekanntem  $c$  die sämtlichen Elemente  $v_e$ ,  $\omega$ ,  $T$  des Auffallpunktes zu berechnen, gestaltet sich gleichfalls wenig einfach, da die sukzessive Annäherung durch Probieren erfordert.

Aus diesen Gründen schlug Siacci vor, neben den primären Funktionen  $D$ ,  $J$ ,  $T$ ,  $A$  und zugehörigen Tabellen andere Funktionen und Tabellen zu benutzen, die jene Aufgaben mit geringerer Mühe zu lösen gestatten.

Sekundäre Funktionen  $E$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $O$ ,  $S$ ,  $S'$  und zugehörige Tabellen: Denkt man sich die Gleichung (1)

$$D(u) = \alpha cx + D(u_0)$$

nach  $u$  aufgelöst, so sieht man, daß  $u$  eine Funktion  $\alpha cx$  und  $u_0$  ist. Daher sind auch  $J_u - J_{u_0}$ ,  $A_u - A_{u_0}$ ,  $T_u - T_{u_0}$  und  $\frac{A_u - A_{u_0}}{D_u - D_{u_0}} - J_{u_0}$  gegebene Funktionen von  $\alpha cx$  und  $u_0$ . Für diese Funktionen seien die folgenden abkürzenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{cases} T_u - T_{u_0} = S \\ J_u - J_{u_0} = Q \\ \frac{A_u - A_{u_0}}{D_u - D_{u_0}} - J_{u_0} = E. \end{cases}$$

Eine von  $\alpha cx$  und  $u_0$  in gegebener Weise abhängige Funktion ist ferner  $\frac{E}{\alpha cx} = N$ ; ebenso  $Q - E = O$  und endlich  $\frac{S}{\alpha cx} = S'$ .

Diese Funktionen  $E$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $S'$ ,  $O$  heißen sekundäre Funktionen; die zugehörigen Tabellen, die mit Hilfe der ursprünglichen Werte  $D$ ,  $J$ ,  $A$  und  $T$  leicht hergestellt werden können, als Tafeln mit doppeltem Eingang, nämlich mit den beiden Argumenten  $\alpha cx$  und  $u_0$ , heißen sekundäre Tabellen; offenbar kann ihre Zahl je nach dem besonderen Bedürfnis noch willkürlich vermehrt werden.

Mit Benützung der sekundären Funktionen werden die obigen Gleichungen folgende:

$$D(u) = \alpha cx + D(u_0);$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\alpha}{2c} \cdot Q(\alpha cx, u_0);$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{\alpha x}{2c} \cdot E(\alpha cx, u_0);$$

$$t = \frac{1}{c} \cdot S(\alpha cx, u_0);$$

$$u = \alpha v \cos \vartheta; \quad u_0 = \alpha v_0 \cos \varphi.$$

Speziell im Gipfel ist  $u = u_s = \alpha v_s$ ,  $x = x_s$ ,  $y = y_s$ ,  $\vartheta = 0$ , also

$$D(u_s) = \alpha cx_s + D(u_0); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha}{2c} \cdot Q(\alpha cx_s, u_0);$$

$$y_s = x_s \operatorname{tg} \varphi - \frac{\alpha x_s}{2c} \cdot E(\alpha cx_s, u_0); \quad t_s = \frac{1}{c} \cdot S(\alpha cx_s, u_0).$$

Im Auffallpunkt ist  $y = 0$ ,  $x = X$ ,  $u = u_e = \alpha v_e \cos \omega$ ,  $\vartheta = -\omega$ , also

$$D(u_e) = \alpha c X + D(u_0); \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\alpha}{2c} \cdot Q(c\alpha X, u_0) - \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha}{2c} \cdot E(c\alpha X, u_0); \quad T = \frac{1}{c} \cdot S(c\alpha X, u_0);$$

somit auch  $\operatorname{tg} \omega = \frac{\alpha}{2c} \cdot O(c\alpha X, u_0); \quad \operatorname{tg} \varphi = X \cdot \frac{\alpha^2}{2} \cdot N(c\alpha X, u_0);$

$$T = \alpha X \cdot S'(c\alpha X, u_0).$$

Ist z. B. Schußweite  $X$ , Abgangswinkel  $\varphi$  und Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gegeben und wird  $c$  oder bei gegebenem  $R$ ,  $P$ ,  $\delta$  der Formkoeffizient gesucht, so wird zweckmäßig die vorletzte Gleichung  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha^2}{2} \cdot X \cdot N$  benutzt. Hier kennt man  $X$ ,  $\varphi$  und  $v_0$ , somit auch  $\alpha$  und  $u_0$ , also läßt sich  $N$  berechnen und aus der  $N$ -Tabelle in der Spalte des gegebenen  $u_0$  der Wert  $c\alpha X$  ermitteln, somit kennt man  $c$ . Dann findet sich  $\omega$  aus  $\operatorname{tg} \omega = \frac{\alpha}{2c} \cdot O$ . Mit diesem  $\omega$  kann ein genauere Wert von  $\alpha$  ermittelt und die Rechnung durch Wiederholung verschärft werden. Man erkennt an diesem Beispiel die Vorteile, die durch Einführung der sekundären Tabellen erzielt werden. Weiteres über die sekundären ballistischen Funktionen findet man weiter unten in § 30.

Anmerkung. Nahe verwandt mit dem Verfahren Siacci I ist das von F. Krupp (W. Groß) entwickelte und früher benutzte Rechnungsverfahren.

Bei diesem Verfahren wurde der von Didion und Siacci (I) benutzte Korrekturfaktor  $\alpha$  konstant = 1 gesetzt, also  $u = \alpha v \cos \vartheta = v \cos \vartheta$ ;  $u_0 = v_0 \cos \varphi$ ; es stellt also hier  $u$  einfach die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit vor. Mit andern Worten, das Näherungsverfahren bei der Integration der Hauptgleichung besteht darin, daß  $cf(v) \cdot \cos \vartheta$  durch  $c \cdot f(v \cos \varphi) = cf(u)$  ersetzt wird; es wurde also angenommen, daß die Horizontalkomponente  $m \cdot cf(v) \cdot \cos \vartheta$  des Luftwiderstandes  $mcf(v)$  für irgendeine Geschwindigkeit  $v$  gleich dem Luftwiderstand  $m \cdot cf(v \cos \vartheta)$  für die Horizontalkomponente der betreffenden Geschwindigkeit sei.

Ferner wurde nicht eine analytische Funktion für die Verzögerung  $cf(v)$  durch den Luftwiderstand zugrunde gelegt, sondern unmittelbar die ältere empirische Kruppsche Tabelle, die aus zahlreichen Schießversuchen der Firma Krupp entstanden ist und deren Zuverlässigkeit W. Groß im einzelnen erörtert.

Die Integrale  $D$ ,  $J$ ,  $T$ ,  $A$  wurden von W. Groß in der Weise berechnet, daß er  $-\sum \frac{u \cdot \Delta u}{f(u)}$ ,  $-\sum \frac{\Delta u}{u \cdot f(u)}$ ,  $-\sum \frac{\Delta u}{f(u)}$ ,  $-\sum \frac{J(u) \cdot u \cdot \Delta u}{f(u)}$  von  $u = 1000$  m/sec ab sukzessive summierte und dabei  $\Delta u = -1$  m/sec nahm. W. Olsson hat sodann zu dem Großschen Formel- und Tabellensystem bequemere Tabellen mit doppeltem Eingang herausgegeben, in denen zu den verschiedenen  $\varphi$  und  $v_0 \cos \varphi$  die Werte von  $v_e \cdot \cos \omega$ ,  $\omega$ ,  $T$ ,  $X$  für die Einheit des ballistischen Koeffizienten  $c$  unmittelbar gegeben sind. Die ältere Kruppsche Tabelle und weitere Einzelheiten betreffs des früheren Kruppschen Rechnungsverfahrens findet man in den

früheren Ausgaben dieses Lehrbuchs (Verlag von B. G. Teubner), die Entwicklung des Formelsystems in Band I, die Kruppsche frühere Tabelle in Band IV. In der vorliegenden Neuauflage des Lehrbuchs (Verlag von J. Springer) ist jene ältere Kruppsche Tabelle nicht mehr aufgeführt, und daher sind auch weitere Angaben über das ältere Rechenverfahren F. Krupps unterdrückt worden.

## § 27. Die Lösungsmethoden von Siacci 1888 (Siacci II) und 1896 (Siacci III).

Diese Methoden sind hinsichtlich des Integrationsverfahrens dadurch gekennzeichnet, daß (vgl. § 23)  $\sigma = \cos \varphi$ ,  $\gamma = \beta \cdot \cos^2 \varphi$  gewählt ist, wobei  $\varphi$  den Abgangswinkel und  $\beta$  einen gewissen, nachher zu besprechenden Korrektionsfaktor vorstellt, der in ähnlicher Weise, wie der Faktor  $\alpha$  bei Didion, dazu bestimmt ist, den bei der Integration begangenen Fehler auszugleichen. Das Lösungssystem ist also folgendes:

$$x = \frac{1}{c\beta} (D_u - D_{u_0});$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c\beta \cos^2 \varphi} (J_u - J_{u_0});$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2(c\beta)^2 \cos^2 \varphi} [(A_u - A_{u_0}) - J_{u_0} (D_u - D_{u_0})];$$

$$t = \frac{1}{c\beta \cos \varphi} (T_u - T_{u_0});$$

wobei  $u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}$ ;  $u_0 = v_0$ ; Verzögerung =  $cf(v)$ ;  $\beta$  ein Tabellenwert.

Zur Darstellung der Abhängigkeit des Luftwiderstands von der Geschwindigkeit wählte Siacci 1888 Zonengesetze:

Verzögerung durch d. Luftwiderstand =  $c_1 v^3$  für  $v = 700$  bis  $420$  m/sec

" " " " =  $c_2 v^3$  "  $v = 420$  "  $343$  "

" " " " =  $c_3 v^6$  "  $v = 343$  "  $282$  "

" " " " =  $c_4 v^3$  "  $v = 282$  "  $240$  "

" " " " =  $c_5 v^3$  "  $v = 240$  m/sec

und darunter.

Die entsprechenden Tabellen wurden berechnet von Berardinelli bis  $u = 700$ , später wurden sie von Mola bis  $u = 983$  fortgesetzt; sekundäre Tabellen berechnete Braccialini. Solche primäre und sekundäre Tabellen, nur mit einer etwas anderen Zoneneinteilung, nämlich mit den Zonengesetzen von Mayevski-Sabudski, findet man in dem Werk von Heydenreich: „Die Lehre vom Schuß“, Berlin 1908, Teil II, worauf hier verwiesen sei.

Das Verfahren Siaccis vom Jahre 1896 (Siacci III) unterscheidet sich von demjenigen Siacci II nur dadurch, daß das neuere, einheitliche Luftwiderstandsgesetz Siaccis (vgl. § 10) dabei zugrunde gelegt ist; auch hierzu hat Siacci die primären Tabellen  $D$ ,  $J$ ,  $T$ ,  $A$  sowie eine Tabelle der  $\beta$ -Werte berechnet.



Der Korrektionsfaktor  $\beta$  bei Siacci II und III.

Der Schwerpunkt der Lösung soll offenbar in dem Ausgleichfaktor  $\beta$  liegen. Die genaue Hauptgleichung war

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \frac{d(v \cos \vartheta)}{v \cdot f(v) \cdot \cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c_y} \cdot \frac{d \left( \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \right)}{\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \cdot f \left( \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \right) \cdot (\cos \vartheta)},$$

wobei  $c$  unter anderem das Luftgewicht enthält, das tatsächlich mit der Höhe  $y$  des Geschosses über dem Boden veränderlich ist, was durch den Index  $y$ , also durch  $c_y$ , angedeutet sein möge. Die angenäherte Hauptgleichung ist

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \sim \frac{g}{c_0} \cdot \frac{d \left( \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \right)}{\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \cdot f \left( \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \right) \cdot \beta \cdot \cos^2 \varphi};$$

hier ist  $c$  mit dem Index 0 versehen, um anzudeuten, daß für das in Wirklichkeit veränderliche  $c$  näherungsweise der Wert von  $c$  in der Höhe der Geschützöffnung genommen ist. Führt man  $u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}$  ein, so besteht das Näherungsverfahren darin, daß  $c_y \cdot f(v) \cdot \cos \vartheta = \sim c_0 \cdot f(u) \cdot \beta \cdot \cos^2 \varphi$  gesetzt ist. Dieser Faktor  $\beta$ , also

$$\beta = \frac{c_y}{c_0} \cdot \frac{f(v) \cdot \cos \vartheta}{f \left( \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos^2 \varphi} \quad (1)$$

hat z. B. für das quadratische Gesetz  $f(v) = v^2$ , also für

$$f \left( \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \right) = \left( \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \right)^2$$

im Anfangspunkt  $O$  ( $\vartheta = \varphi$ ), im Gipfelpunkt  $S$  ( $\vartheta = 0$ ) und in dem Punkt  $O_1$  des absteigenden Astes mit  $\vartheta = -\varphi$ , abgesehen von dem Faktor  $c_y : c_0$ , bzw. die folgenden Beträge:

$$\text{in } O \text{ ist } \beta = \frac{v_0^2 \cos \varphi}{\left( \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 \cdot \cos^2 \varphi} = \sec \varphi; \quad \text{in } S \text{ ist } \beta = \frac{v_s^2 \cdot 1}{\left( \frac{v_s \cdot 1}{\cos \varphi} \right)^2 \cdot \cos^2 \varphi} = 1,$$

$$\text{in } O_1 \text{ ist } \beta = \frac{v_1^2 \cdot \cos(-\varphi)}{\left( \frac{v_1 \cos(-\varphi)}{\cos \varphi} \right)^2 \cdot \cos^2 \varphi} = \sec \varphi.$$

Also ist in diesem Falle  $\beta$  stets  $\geq 1$ , und zwar ist der Unterschied gegenüber 1 um so geringer, je kleiner  $\varphi$  ist.

Für das kubische Gesetz sind die betreffenden drei Werte der Reihe nach:  $\sec \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sec \varphi$ , also bzw.  $> 1$ ,  $< 1$ ,  $> 1$ . Für das biquadratische Gesetz bzw.  $\sec \varphi$ ,  $\cos^3 \varphi$ ,  $\sec \varphi$  usw.

Daraus folgt zunächst, daß bei sehr flachen Flugbahnen sich der  $\beta$ -Wert von der Einheit nicht erheblich unterscheiden kann.

Speziell für das quadratische Gesetz  $cf(v) = cv^2$  ist  $\beta$  identisch mit dem Didionschen Ausgleichsfaktor  $\alpha$ . Denn bei dem Verfahren von Didion ist  $f(v) = \sim \frac{f(\alpha v \cos \vartheta)}{\alpha \cos \vartheta} = \frac{(\alpha v \cos \vartheta)^2}{\alpha \cos \vartheta} = \alpha v^2 \cos \vartheta$  gesetzt.

Andererseits ist bei Siacci II und III  $f(v) = \sim f\left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right) \cdot \frac{\beta \cdot \cos^2 \varphi}{\cos \vartheta} = \left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)^2 \cdot \frac{\beta \cdot \cos^2 \varphi}{\cos \vartheta} = \beta v^2 \cos \vartheta$ , somit dasselbe.

Um nunmehr zu der Siaccischen Berechnung von  $\beta$  überzugehen, so multipliziere man die Gleichung (1) beiderseits mit dem Faktor

$$\frac{c_0}{c_y} \cdot \Phi \cdot (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \vartheta)^2 \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}, \quad \text{wo} \quad \Phi = \frac{f\left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)}{f(v)} \cdot \frac{f\left(\frac{V_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta}\right)}{f(V_0)}.$$

Hier bedeutet  $V_0$  diejenige Anfangsgeschwindigkeit, mit der im luftleeren Raum bei gleichem Wert von  $\varphi$  dieselbe tatsächliche Schußweite erzielt würde, die man im lufteerfüllten Raum hat, d. h. es ist  $V_0$  definiert durch  $\frac{V_0^2 \sin 2\varphi}{g} = X$ . Dies gibt

$$\begin{aligned} & \beta \cdot \frac{c_0}{c_y} \cdot \Phi \cdot (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \vartheta)^2 \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{f\left(\frac{V_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta}\right)}{f(V_0)} \cdot (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \vartheta)^2 \cdot \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Gleichung werde integriert über  $\vartheta$  von  $+\varphi$  bis  $-\varphi$ , also vom Anfangspunkt  $O$  der Flugbahn bis zu dem Punkt  $O_1$ , der nahe dem Auffallpunkt auf dem absteigenden Ast liegt. Dabei sei auf der linken Seite ein konstanter Mittelwert von  $\beta$  und ebenso von  $\Phi$  und von  $\frac{c_0}{c_y}$  vor das Integralzeichen gesetzt; diese Mittelwerte seien als solche durch den Index  $m$  gekennzeichnet. Dann ist

$$\begin{aligned} & \beta_m \cdot \left(\frac{c_0}{c_y}\right)_m \cdot \Phi_m \cdot \int_{+\varphi}^{-\varphi} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \vartheta)^2 \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \\ &= \frac{1}{f(V_0) \cdot \cos^2 \varphi} \int_{+\varphi}^{-\varphi} f\left(\frac{V_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta}\right) (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \vartheta)^2 \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Das Integral auf der linken Seite ist, wie durch die Substitution  $\operatorname{tg} \vartheta = x$  sofort zu sehen ist, gleich  $-\frac{8}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi$ ; ferner ist einleuchtend, daß für  $cf(v) = cv^n$  der Bruch  $\Phi_m = 1$  ist (und darin liegt der Grund für die Einführung von  $\Phi$ ); Siacci nimmt ihn gleich der Einheit. Auf der rechten Seite werden die Grenzen des Integrals und damit die Vorzeichen vertauscht, und so wird die Schlußformel,

wie man durch Ausführung von  $(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \vartheta)^2$  leicht sieht:

$$\beta_m = \left(\frac{c_y}{c_0}\right)_m \cdot \frac{3}{2 \sin 2\varphi \cdot f(V_0)} \cdot \int_0^{\vartheta} f\left(\frac{V_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta}\right) \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta}{\operatorname{tg}^2 \varphi}\right) \cdot \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}. \quad (4)$$

Abgesehen von dem Bruch  $\left(\frac{c_y}{c_0}\right)_m$  enthält dieser Ausdruck nur  $V_0$  und  $\varphi$ ; das Integral wird von Siacci durch näherungsweise Summation für die verschiedenen Werte von  $\varphi$  und  $V_0 \cos \varphi$  berechnet, also läßt sich, abgesehen von  $\left(\frac{c_y}{c_0}\right)_m$ , für  $\beta$  eine Tabelle anlegen, die diesen Wert für alle möglichen in der Schießpraxis vorkommenden Werte  $\varphi$  und  $V_0 \cos \varphi$  oder, da  $V_0 = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}}$ , für alle möglichen Werte  $\varphi$  und  $X$  liefert. In der Tat ist die  $\beta$ -Tabelle Siaccis eine solche mit doppeltem Eingang  $\varphi$  und  $X$ .

Inwieweit durch diesen Faktor  $\beta$  der Integrationsfehler ausgeglichen ist, muß besonders untersucht werden (vgl. darüber § 41). Denn bei der Berechnung von  $\beta$  sind, wie zu sehen war, einige Vernachlässigungen benützt, deren Tragweite für die Genauigkeit der ganzen Flugbahnberechnung nicht ohne weiteres zu bemessen ist; z. B. ist  $\Phi_m$  nur für die Zonengesetze  $cv^n$ , nicht aber für das dem System Siacci III zugrunde gelegte einheitliche Luftwiderstandsgesetz gleich eins, und auch für die Zonengesetze  $cv^n$  ist  $\Phi_m$  nur dann gleich 1, wenn die Funktionswerte  $f\left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)$ ,  $f(v)$ ,  $f\left(\frac{V_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta}\right)$ ,  $f(V_0)$  innerhalb derselben Geschwindigkeitszone liegen, also wenn dabei  $n$  konstant ist, usw. Siacci suchte sein Rechenverfahren weiterhin dadurch zu verschärfen, daß er für  $x = 0$ ,  $\frac{1}{4}X$ ,  $\frac{2}{4}X$ ,  $\frac{3}{4}X$  mit verschiedenen  $\beta$ -Werten rechnet, und zwar mit verschiedenen für  $x, y, t, \vartheta$ . Parodi hat diese Methode praktisch ausgebildet (vgl. Lit.-Note Nr. 27. Eine Fehleruntersuchung hat Th. Vahlen begonnen (l. o.).

## § 28. Die Näherungslösung von E. Vallier 1894.

Die Wahl von  $\sigma$  und  $\gamma$  und damit das System von Gleichungen, durch die eine Flugbahn berechnet wird, ist gegenüber von Siacci II und III ungeändert. Nur die Berechnung von  $\beta$  ist eine etwas andere (davon nachher). Ferner ist ein anderes Luftwiderstandsgesetz zugrunde gelegt; nämlich es sind zur Darstellung des Luftwiderstands in seiner Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $v$  für  $v > 330$  m/sec das Chapel-Valliersche Gesetz, für  $v < 330$  die beiden Zonengesetze von Hoyer verwendet (vgl. § 10): Wird die Verzögerung durch den Luftwiderstand wie bisher mit  $cf(v)$  bezeichnet

und ist  $c = \frac{\delta_y \cdot R^2 \cdot i}{1,206 \cdot P}$  ( $\delta_y$  das Luftgewicht in der Höhe  $y$  m, gemessen in kg/cbm;  $R$  halbes Kaliber des Geschosses in cm,  $P$  Geschosßgewicht in kg,  $i = \frac{1}{1000} \cdot n$  der Formkoeffizient), so ist (vgl. § 10, 8)

$$\begin{aligned} \text{für } v &\geq 330 \text{ m/sec} & f(v) &= 0,125 (v - 263), \\ & & & \quad \quad \quad (11) \\ & & n &= 0,021692 \cdot v^5, \\ & & & \quad \quad \quad (6) \\ & \text{" } 330 > v \geq 300 \text{ m/sec} & & \\ & \text{" } v < 300 \text{ m/sec} & n &= 0,033814 \cdot v^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $i$  konstant = 1 für rotierende Langgeschosse mit ogivaler Spitze vom halben Öffnungswinkel an der Spitze des Ogivals =  $41,5^\circ$  ( $\gamma = 41,5^\circ$ ); sonst ist nach Vallier  $i$  mit  $v$  etwas veränderlich, nämlich  $i = \frac{\gamma(v - (180 + 2\gamma))}{41,5 \cdot (v - 263)}$  für  $v \geq 330$  m/sec; für  $v < 330$  m/sec soll sein:

$$\begin{array}{cccc} i = & 0,67 & 0,72 & 0,78 & 1,10 \\ \text{bei } \gamma = & 31^\circ & 33,6^\circ & 36,9^\circ & 48,2^\circ. \end{array}$$

Der Korrektionsfaktor  $\beta$  wird von Vallier in sehr systematischer Weise durch Zuhilfenahme der Taylor-Maclaurinschen Reihenentwicklung mit ihrem in Integralform benützten Restglied berechnet. Es wird damit eine geschlossene Formel für  $\beta$  erzielt. Diese Formel ist zwar weniger einfach zu handhaben als eine  $\beta$ -Tabelle nach Siacci, wie sie z. B. in dem Werk von Siacci: *Balistique extérieure*, Paris 1892, oder in der „Lehre vom Schuß“ von Heydenreich, Berlin 1909, II, S. 30 der Tabellen gegeben ist; sie gewährt ihrerseits kaum die Möglichkeit zur Anlegung einer zugehörigen Tabelle. Dagegen hat sie den Vorzug größerer Allgemeinheit für sich, (z. B. die  $\beta$ -Tabelle bei Siacci und Heydenreich versagt nicht selten bei großen Geschützkalibern). Diese Formel für  $\beta$  wird im folgenden abgeleitet.

Vallier geht aus von der in § 32 zu besprechenden Maclaurinschen Reihenentwicklung mit dem Restglied in Integralform, speziell von der Gleichung (30) in § 32, also von

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} - g \cdot \int_{t=0}^{t=s} (x - t)^2 \cdot \left( \frac{c f(v)}{v^4 \cos^3 \varphi} \right) dt. \quad (1)$$

Das bei der Integration der Hauptgleichung benutzte Näherungsverfahren besteht bei ihm, ähnlich wie bei Siacci II und III darin, daß

$$\frac{R^2 \cdot i(v) \cdot \delta_y \cdot f(v) \cdot \cos \varphi}{P \cdot 1,206} \text{ näherungsweise } = \frac{R^2 \cdot i(v_0) \cdot \delta_0 \cdot f\left(\frac{v \cos \varphi}{\cos \varphi}\right) \cdot \beta \cdot \cos^3 \varphi}{P \cdot 1,206}$$

gesetzt wird, wobei  $\delta_y$  und  $i(v)$  die Werte des Luftgewichts  $\delta$  bzw.

des Formkoeffizienten  $i$  für die tatsächliche Flughöhe  $y$  des Geschosses über dem Mündungshorizont, dagegen  $\delta_0$  und  $i(v_0)$  die entsprechenden Werte im Anfangspunkt der Flugbahn bedeuten. Es wird also  $cf(v)\cos\vartheta$  näherungsweise durch diese andere Funktion  $c_1 f(u)$  ersetzt. Dabei ist zur Abkürzung

$$u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}; \quad (2)$$

ferner ist  $\delta_y = \delta_0 (1 - 0,00011 \cdot y)$ .

Also hat man folgende Gegenüberstellung:

richtig ist:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} - g \cdot \int_{t=0}^{t=x} (x-t)^2 \cdot \left( \frac{cf(v) \cos \vartheta}{v^4 \cos^4 \vartheta} \right)_t \cdot dt; \quad (3)$$

$$c = \frac{R^2 \cdot i(v) \cdot \delta_0 \cdot (1 - 0,00011 \cdot y)}{P \cdot 1,206};$$

unrichtig ist:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} - g \cdot \int_{t=0}^{t=x} (x-t)^2 \cdot \left( \frac{c_1 f(u)}{v^4 \cos^4 \vartheta} \right)_t \cdot dt; \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{R^2 \cdot i(v_0) \cdot \delta_0 \beta \cdot \cos^2 \varphi}{P \cdot 1,206}.$$

Der beim Näherungsverfahren begangene Fehler  $\varepsilon$  in Beziehung auf die Flugbahnordinate  $y$ , die zu der Abszisse  $x$  gehört, ist somit seiner absoluten Größe nach die Differenz der beiden Ausdrücke (3) und (4),

$$\varepsilon = g \int_{t=0}^{t=x} (x-t)^2 \cdot \left( \frac{cf(v) \cos \vartheta - c_1 f(u)}{v^4 \cdot \cos^4 \vartheta} \right)_t \cdot dt.$$

Speziell möge es sich um die gesamte Flugbahn handeln, soweit sie über dem Mündungshorizont liegt. Dann ist  $x = X$  zu setzen; in (3) wird  $y = 0$  (vorausgesetzt, daß in der Annahme der Funktion  $cf(v)$  kein Fehler liegt), dagegen wird  $y$  aus (4) dann von Null verschieden sein. Der Fehler in Beziehung auf die Flughöhe  $y$  am Ende der Bahn sei jetzt  $E$ . Da es in dem bestimmten Integral auf die Bezeichnung und Bedeutung der Integrationsvariablen (bisher  $t$ ) nicht ankommt, so sei diese jetzt mit  $x$  bezeichnet, und darunter sei wie bisher die variable Flugbahnabszisse verstanden, zu der die Bahngeschwindigkeit  $v$  und der Tangentenwinkel  $\vartheta$  gehört; dann ist der Fehler

$$E = g \int_{x=0}^{x=X} (X-x)^2 \cdot \frac{cf(v) \cos \vartheta - c_1 f(u)}{v^4 \cos^4 \vartheta} \cdot dx. \quad (5)$$

In  $c_1$  kommt der fragliche Faktor  $\beta$  vor. Es gilt, dieses  $\beta$  so zu bestimmen, daß der Fehler E Null wird. Könnte dies genau erfolgen, so wäre die Lösung des Flugbahnproblems mit dem aus  $E = 0$  bestimmten  $\beta$  genau richtig — jedoch nur dann, wenn für alle Flugbahnpunkte  $\varepsilon = \varepsilon(x) = 0$  wäre, nicht bloß  $E = \varepsilon(X) = 0$  gemacht ist. Also ist schon jetzt vorauszusehen, daß bei der weiteren Behandlung des Ausdrucks (5) gewisse Vernachlässigungen oder Näherungsannahmen eintreten müssen.

Es werde nunmehr als Integrationsvariable  $z = \frac{x}{X}$  eingeführt, so daß  $dx = X \cdot dz$ ,  $(X - x)^3 = X^3(1 - z^2)$ . Vallier setzt ferner voraus, es sei möglich, den Bruch  $\frac{cf(v)\cos\vartheta - c_1 f(u)}{v^4 \cos^4 \vartheta}$ , der eine Funktion von  $x$  und damit von  $z$  ist und der kurz mit  $\varphi(z)$  bezeichnet sei, durch eine nach steigenden Potenzen von  $z$  fortschreitende konvergente Reihe darzustellen, von der nur die beiden ersten Glieder verwendet werden; also er setzt voraus, daß die Kurve  $\varphi(z)$  durch eine gerade Linie ersetzt werden könne,  $\varphi(z) = a_0 + a_1 z$  (1. Annahme). Dann ist

$$E = gX^3 \cdot \int_{z=0}^{z=1} (1-z)^2 (a_0 + a_1 z) \cdot dz = gX^3 \left( \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{12} \right).$$

Setzt man  $E = 0$ , so wird, da  $g$  und  $X$  von Null verschieden sind,

$$4a_0 + a_1 = 0; \quad (6)$$

dies ist diejenige Beziehung, aus der weiterhin  $\beta$  zu berechnen ist. Die Berechnung von  $a_0$  und  $a_1$  erfolge aus den Verhältnissen der Flugbahn im Abgangspunkt und im Gipfel: den ersten Punkt ist  $x = 0$  und damit  $z = 0$ , also ist hier  $\varphi(z) = a_0 + a_1 z = a_0$  und sei mit  $\varphi(0)$  bezeichnet; ferner nimmt Vallier an, daß  $z_s = \frac{x_s}{X}$  ( $x_s$  die Gipfelabszisse) für alle Flugbahnen genügend angenähert konstant  $= 0,55$  sei (2. Annahme); der zugehörige Wert von  $\varphi(z)$  sei der Kürze halber mit  $\varphi(s)$  bezeichnet, so ist  $\varphi(s) = a_0 + a_1 \cdot 0,55$ . Damit hat man zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $a_0$  und  $a_1$ . Setzt man diese Werte in (6) ein, so wird diese Bedingung zu der folgenden:

$$6 \cdot \varphi(0) + 5 \cdot \varphi(s) = 0. \quad (7)$$

Nun war allgemein

$$\varphi(z) = \frac{R^2 \cdot \delta_0}{P \cdot 1,206} \cdot \frac{i(v) \cdot (1 - 0,00011y) \cdot f(v) \cos \vartheta - i(v_0) \cdot f(u) \cdot \beta \cos^2 \varphi}{(v \cos \vartheta)^4},$$

somit bedeutet

$$\varphi(0) = \frac{R^2 \cdot \delta_0}{P \cdot 1,206} \cdot \frac{i(v_0) \cdot 1 \cdot f(v_0) \cdot \cos \varphi - i(v_0) \cdot f(v_0) \cdot \beta \cdot \cos^2 \varphi}{(v_0 \cos \varphi)^4}$$

(da  $u_0 = v_0$ ); und

$$\varphi(s) = \frac{R^2 \cdot \delta_0}{P \cdot 1,206} \cdot \frac{i(v_s) \cdot (1 - 0,00011 \cdot y_s) \cdot f(v_s) - i(v_0) \cdot f(u_s) \cdot \beta \cos^2 \varphi}{(v_s \cdot 1)^4 \text{ oder } u_s^4 \cdot \cos^4 \varphi}.$$

Setzt man diese Werte  $\varphi(0)$  und  $\varphi(s)$  in (7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & \beta \cdot \left[ 6 \cdot \frac{f(v_0)}{v_0^4} + 5 \cdot \frac{f(u_s)}{u_s^4} \right] \cdot \sec^2 \varphi \cdot i(v_0) \\ &= 6 \cdot i(v_0) \cdot \frac{f(v_0)}{v_0^4} \cdot \sec^2 \varphi + 5 i(v_s) \cdot (1 - 0,00011 y_s) \cdot \frac{f(v_s)}{v_s^4}. \quad (8) \end{aligned}$$

Dies ist die Formel zur Bestimmung von  $\beta$ , die abzuleiten war. Es ist einleuchtend, daß dieser Wert erst dann verwendet werden kann, nachdem man mit einem ersten Näherungswert für  $\beta$  (nämlich  $\beta = 1$  oder nach Valliers Vorschlag besser mit  $\beta = \cos^2 \frac{2}{3} \varphi$ ), eine vorläufige Berechnung der Flugbahn in Beziehung auf ihre Verhältnisse im Gipfel durchgeführt, also vorläufige Werte von  $v_s$ ,  $u_s$ ,  $y_s$  errechnet hat. Eine wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führte den Verfasser nicht immer zu einer Verschärfung der Rechnung. Vallier bezeichnet  $i(v_0) \cdot \beta$  mit  $\frac{1}{m}$ .

Ohne Beweis sei eine etwas genauere Formel für  $\beta$  mitgeteilt, die Vallier ableitet. Man denke sich durch eine erste vorläufige Flugbahnberechnung die ballistischen Elemente  $x_1 y_1 v_1 u_1 \vartheta_1$  desjenigen Punktes ( $x_1 y_1$ ) der Flugbahn ermittelt, dessen Abszisse  $x_1 = 0,225 \cdot x_s$  ist ( $x_s$  Gipfelabszisse), dann ist

$$\begin{aligned} & \beta \cdot \left[ 9 \cdot \frac{f(u_1)}{u_1^4} + 4 \cdot \frac{f(u_s)}{u_s^4} \right] i(v_0) \sec^2 \varphi \\ &= 9 \cdot i(v_1) \cdot \frac{f(v_1)}{v_1^4} \cdot (1 - 0,00011 \cdot y_1) \sec^2 \vartheta_1 + 4 i(v_s) \cdot \frac{f(v_s)}{v_s^4} \cdot (1 - 0,00011 y_s). \quad (9) \end{aligned}$$

Eine weitere Verschärfung der Vallierschen Formeln für  $\beta$  hat 1910 der Verfasser vorgeschlagen: In der obigen Entwicklung war näherungsweise  $\frac{x_s}{X}$  konstant = 0,55 angenommen. Man kann nun bei der vorläufigen Flugbahnberechnung, die jedenfalls bei der Anwendung des Vallierschen  $\beta$  notwendig ist, außer  $v_s$ ,  $u_s$  und  $y_s$  auch noch  $x_s$  und  $X$  berechnen. Dann ist das Verhältnis  $x_s : X$  genauer bekannt. Verfolgt man damit den obigen Gedankengang nochmals, so wird z. B. die oben abgeleitete erste Valliersche Formel (8) für  $\beta$  zu der folgenden:

$$\begin{aligned} & \beta \cdot \left[ \left( 4 \cdot \frac{x_s}{X} - 1 \right) \cdot \frac{f(v_0)}{v_0^4} + \frac{f(u_s)}{u_s^4} \right] \cdot \sec^2 \varphi \cdot i(v_0) \\ &= \left( 4 \cdot \frac{x_s}{X} - 1 \right) \cdot \frac{f(v_0)}{v_0^4} \cdot \sec^2 \varphi \cdot i(v_0) + i(v_s) (1 - 0,00011 y_s) \cdot \frac{f(v_s)}{v_s^4}, \quad (10) \end{aligned}$$

wobei speziell für konstantes  $i$  die Faktoren  $i(v_0)$  und  $i(v_s)$  wegfallen, da alsdann  $i(v_s) = i(v_0)$ . Auf die  $i$ -Werte von v. Eberhard (vgl. § 10) lassen sich obige  $\beta$ -Formeln selbstverständlich ebenfalls anwenden.

Weiter ließe sich daran denken, je für eine bestimmte Gruppe der Werte  $c$ ,  $v_0$ ,  $\varphi$  (Gewehre, Feldgeschütze, Haubitzen usw.) eine geeignete Wahl

der Funktionen  $\varphi(z)$  an Stelle der linearen  $a_0 + a_1 z$  zu treffen. Endlich sei daran erinnert, daß die Wahl des Mittelwerts  $\sigma = \cos \varphi$  in  $u = \frac{v \cos \vartheta}{\sigma}$   $= \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}$  eine willkürliche war. Es kann allgemeiner  $\sigma = \cos^p \psi$  gesetzt und  $p$  aus berechneten Normalbahnen (vgl. § 41) oder aus Beobachtungen gewonnen werden;  $\psi$  bedeutet dabei ein Mittel aus den Werten von  $\vartheta$  an den Enden des betreffenden Flugbahn Bogens.

## § 29. Näherungslösungen von P. Charbonnier.

Gleichfalls mit Hilfe von Reihenentwicklungen, jedoch in wesentlich anderer Weise als Siacci und Vallier, sucht Charbonnier die Flugbahnberechnung systematisch zu verschärfen. Hier möge speziell seine Methode für Flachbahnen skizziert werden:

Eine erste Näherungslösung sei nach Art von Krupp (oder, was dasselbe ist, nach Siacci I mit  $\alpha = 1$ ) durchgeführt auf Grund des Systems:

$$x = \frac{1}{c} (D_u - D_{u_0}); \quad \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c} (J_u - J_{u_0});$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2c} \left( \frac{A_u - A_{u_0}}{D_u - D_{u_0}} - J_{u_0} \right); \quad t = \frac{1}{c} (T_u - T_{u_0});$$

wobei  $u = v \cos \vartheta$ ,  $u_0 = v_0 \cos \varphi$ , und  $cf(v)$  die Verzögerung durch den Luftwiderstand bedeute.

Die folgenden Entwicklungen gestatten alsdann eine Erhöhung der Genauigkeit. Die richtige Hauptgleichung ist

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \frac{1}{vf(v)} \cdot \frac{d(v \cos \vartheta)}{\cos^2 \vartheta},$$

oder, wenn  $v \cos \vartheta = u$  und

$$\frac{1}{vf(v)} = \varphi(v) = \varphi\left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \vartheta}\right) = \varphi\left(\frac{u}{\cos \vartheta}\right)$$

gesetzt wird, läßt sie sich schreiben:

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \varphi\left(\frac{u}{\cos \vartheta}\right) \cdot \frac{du}{\cos^2 \vartheta}. \quad (1)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung benütze man die Reihenentwicklungen

$$\frac{1}{\cos \vartheta} = 1 + \frac{\vartheta^2}{2!} + 5 \cdot \frac{\vartheta^4}{4!} + \dots \quad \text{und} \quad \frac{1}{\cos^2 \vartheta} = 1 + \frac{\vartheta^2}{1} + \frac{2 \cdot \vartheta^4}{1 \cdot 3} + \dots,$$

so wird

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \varphi\left(u + \frac{u \vartheta^2}{2!} + \frac{u \cdot 5 \vartheta^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{\vartheta^2}{1} + \frac{2 \cdot \vartheta^4}{1 \cdot 3} + \dots\right) \cdot du;$$

hier wird die Funktion  $\varphi\left(u + \frac{u \vartheta^2}{2!} + \dots\right)$  nach dem Taylorschen



Satz entwickelt und

$$= \varphi(u) + \frac{u \vartheta^2}{2} \cdot \varphi'(u) + \vartheta^4 \left( \frac{5}{4!} \cdot u \cdot \varphi'(u) + u^2 \cdot \frac{\varphi''(u)}{8} \right) + \text{usw.}$$

geschrieben. Werden noch die beiden Reihen ausmultipliziert, so erhält man, als gleichwertig mit (1) die Hauptgleichung in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} &= \frac{g}{c} \cdot \left[ \varphi(u) + \vartheta^2 \left( \frac{u \cdot \varphi'(u)}{2} + \varphi(u) \right) \right. \\ &\quad \left. + \vartheta^4 \left( \frac{2}{3} \varphi(u) + \frac{17}{24} u \cdot \varphi'(u) + \frac{u^2}{8} \varphi''(u) \right) + \dots \right] \cdot du. \end{aligned} \quad (2)$$

Wenn  $\vartheta$  so klein ist, daß es genügt, das erste Glied in der eckigen Klammer zu benutzen, so ist

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \varphi(u) \cdot du = \frac{g}{c} \cdot \frac{d(v \cos \vartheta)}{v \cos \vartheta \cdot f(v \cos \vartheta)}; \quad (3)$$

dies ist diejenige Näherungsgleichung, die für die frühere Kruppsche Lösung oder auch diejenige von Siacci I mit  $\alpha = 1$  die Grundlage bildet; man erhält damit die erwähnte erste Näherungslösung des Problems. Eine zweite Annäherung wird erzielt, wenn die zwei ersten Glieder von (2) verwendet werden. In diesem Falle lautet die vereinfachte Hauptgleichung

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \left[ \varphi(u) + \vartheta^2 \left( \frac{u \cdot \varphi'(u)}{2} + \varphi(u) \right) \right] \cdot du$$

$$\text{oder, da } \varphi(u) = \frac{1}{u f(u)}, \quad \varphi'(u) = \frac{-f(u) - u \cdot f'(u)}{u^2 f^2(u)}$$

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \frac{du}{u \cdot f(u)} + \frac{g}{c} \cdot \vartheta^2 \cdot \psi(u) \cdot du, \quad (4)$$

$$\text{wobei } \psi(u) = \frac{1}{2 u f(u)} - \frac{f'(u)}{2 f^2(u)}.$$

Die genaue Lösung auch dieser Differentialgleichung zwischen  $\vartheta$  und  $u$  würde Schwierigkeit bereiten, da rechts noch  $\vartheta^2$  vorkommt; deshalb ersetzt Charbonnier den Faktor  $\vartheta^2$  auf der rechten Seite der Gleichung näherungsweise durch  $\text{tg}^2 \vartheta$  und nimmt für  $\text{tg} \vartheta$  in weiterer Annäherung den Ausdruck  $\text{tg} \vartheta = \text{tg} \varphi - \frac{1}{2c} (J_u - J_{u_0})$ , der aus der früheren Gleichung (3) hervorgegangen war (Lösung nach Siacci I mit  $\alpha = 1$ ). Führt man also in (4) statt  $\vartheta^2$  den Ausdruck  $\left( q - \frac{1}{2c} J(u) \right)^2$  ein, wobei zur Abkürzung die Konstante  $\text{tg} \varphi + \frac{1}{2c} J(u_0)$  mit  $q$  bezeichnet ist, so erhält man eine Gleichung, die links nur  $\vartheta$ , rechts nur  $u$  enthält, somit ohne weiteres die Integration zuläßt; nämlich

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \frac{du}{u f(u)} + \frac{g}{c} \left( q - \frac{1}{2c} J(u) \right)^2 \cdot \psi(u) \cdot du; \quad (5)$$

diese gibt, mit  $J(u) = - \int \frac{2g du}{u f(u)}$ ,  $\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi = - \frac{1}{2c} J(u) + \frac{1}{2c} J(u_0)$   
 $+ \frac{g}{c} \int_{u_0}^u \left\{ q^3 \cdot \psi(u) + \frac{1}{4c^3} J^3(u) \cdot \psi(u) - \frac{g}{c} J(u) \cdot \psi(u) \right\} du.$

Denkt man sich weitere drei primäre Tabellen aufgestellt, nämlich für  $\int \psi(u) \cdot du$ ,  $\int J(u) \cdot \psi(u) \cdot du$  und für  $\int J^3(u) \cdot \psi(u) \cdot du$  und sind diese Werte bzw. mit  $J'$ ,  $J''$  und  $J'''$  bezeichnet, so ist  
 $\operatorname{tg} \vartheta = q - \frac{1}{2c} J(u) + \frac{g}{c} \left[ q^3 (J'_u - J'_{u_0}) + \frac{1}{4c^3} (J'''' - J''''_0) - \frac{g}{c} (J''_u - J''_{u_0}) \right]. \quad (6)$

Entsprechend läßt sich  $t$  genauer berechnen: es ist  $dt = - \frac{v \cos \vartheta}{g} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta}$ , somit  $dt = - \frac{u}{g} \left\{ \frac{g}{c} \frac{du}{u f(u)} + \frac{g}{c} \vartheta^3 \cdot \psi(u) \cdot du \right\}$  oder mit demselben Verfahren  $dt = - \frac{1}{c} \cdot \frac{du}{f(u)} - \frac{1}{c} \left( q - \frac{1}{2c} J(u) \right)^2 \cdot u \cdot \psi(u) \cdot du.$

Man erkennt, daß zur Berechnung von  $t$  die weiteren Integrale notwendig sind:  $\int u \cdot \psi(u) \cdot du$ ,  $\int J(u) \cdot u \cdot \psi(u) \cdot du$ ,  $\int J^3(u) \cdot u \cdot \psi(u) \cdot du$ ; für diese müßten also gleichfalls primäre Tabellen  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$  berechnet werden.

Endlich würde sich  $y$  aus  $dy = - \frac{(v \cos \vartheta)^2}{g} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta}$  ergeben.

Da die Anlegung der zahlreichen weiteren Tabellen eine große Mühe notwendig machen würde und da selbst dann, wenn diese Tabellen vorlägen, die Flugbahnberechnungen wenig einfach sich gestalteten, so schlägt Charbonnier folgende Vereinfachung vor. Die Gleichung (4) läßt sich in der Form schreiben:

$$\frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \frac{du}{u f(u)} \cdot (1 - \kappa(u) \cdot \vartheta^2),$$

wobei zur Abkürzung  $\kappa(u) = \frac{u \cdot f'(u)}{2 \cdot f(u)} - \frac{1}{2}$ ; oder näherungsweise auch in der Form:

$$\frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{g}{c(1 + \kappa \vartheta^2)} \cdot \frac{du}{u \cdot f(u)}. \quad (7)$$

Diese Gleichung ist gegenüber der Gleichung (3)  $\frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \frac{du}{u f(u)}$  die genauere. Charbonnier operiert nun mit einem Mittelwert des Faktors  $1 + \kappa \vartheta^2$ , und zwar getrennt für den aufsteigenden und für den absteigenden Ast der Flugbahn. Auf dem ersteren ist der Wert jenes Faktors im Abgangspunkt  $1 + \kappa(u_0) \varphi^2$ , im Gipfel ( $\vartheta = 0$ ) ist der Wert 1, das Mittel ist  $1 + \frac{\kappa(u_0)}{2} \varphi^2$ . Auf dem absteigenden Ast ist das Mittel  $1 + \frac{\kappa(u_0)}{2} \omega^2$ , wobei  $\omega$  der spitze Auffallwinkel ist und  $u_0 = v_0 \cos \omega$ . Also ist das Verfahren das folgende:

Nachdem auf Grund der Gleichung  $\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g}{c} \cdot \frac{du}{u f(u)}$ , also mit einem Lösungssystem ähnlich demjenigen von Siacci I (jedoch mit  $\alpha = 1$ ) oder dem früheren von Krupp eine erste vorläufige Berechnung der Flugbahn durchgeführt, insbesondere Gipfel und Auffallpunkt bestimmt ist, wird die Berechnung wiederholt, getrennt für beide Äste; dabei wird für den aufsteigenden Ast  $c$  ersetzt durch  $c \left(1 + \frac{\kappa_0}{2} \varphi^2\right)$ , wobei  $\kappa_0 = \frac{u_0 \cdot f'(u_0)}{2 \cdot f(u_0)} - \frac{1}{2}$ ,  $u_0 = v_0 \cos \varphi$ ; für den absteigenden Ast wird  $c$  ersetzt durch  $c \left(1 + \frac{\kappa_e}{2} \omega^2\right)$ , wobei  $\kappa_e = \frac{u_e \cdot f'(u_e)}{2 f(u_e)} - \frac{1}{2}$ , ( $u_e = v_e \cos \omega$ ); und für  $\varphi^2$  bzw.  $\omega^2$  wird sodann gesetzt  $\operatorname{tg}^2 \varphi$  bzw.  $\operatorname{tg}^2 \omega$ . Th. Vahlen hat dieses Verfahren in einfacherer Weise entwickelt (l. c.).

Es ist jedenfalls zuzugeben, daß in der Charbonnierschen Entwicklung ein rationelles Prinzip zur Erhöhung der Genauigkeit einer Flugbahnberechnung liegt; jedoch ist die Berechnung immerhin ziemlich umständlich, trotz Verwendung der Tabellen, die Charbonnier neuerdings berechnet hat (vgl. Lit.-Note). Das zuletzt genannte Näherungsverfahren, das eine gesonderte Berechnung für beide Äste erforderlich macht, ist gemäß § 41 wenigstens teilweise geprüft worden.

### § 30. Über die sekundären ballistischen Funktionen.

Zur Erläuterung dieser Funktionen sei an die Didion-Bernoullische Lösung § 25 erinnert. Dort traten in den Gleichungen (1) bis (4), die zur Berechnung von  $y$ ,  $\vartheta$ ,  $v$  und  $t$  dienten, die Funktionen  $B$ ,  $J$ ,  $V$ ,  $D$  auf. Aus diesen wurden nachträglich die Funktionen  $E$  und  $\Theta$  abgeleitet, die insbesondere für die Berechnung oder Verwertung der Elemente des Auffallpunkts gute Dienste leisten. Ebenso wurden in § 26 zu dem Verfahren von Siacci (I) nachträglich die Funktionen  $E$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $O$ ,  $S$ ,  $S'$  eingeführt.

Entsprechendes gilt für das Lösungssystem von Siacci II und III (§ 27) und von Vallier (§ 28). Schreibt man an Stelle von  $\frac{1}{c\beta}$  kurz  $c'$ , so lautete dieses Gleichungssystem folgendermaßen:

$$\frac{z}{c'} = D(u) - D(v_0) \quad (1)$$

$$t = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot (T(u) - T(v_0)) \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot (J(u) - J(v_0)) \quad (3)$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'^2}{2 \cos^2 \varphi} \cdot [(A(u) - A(v_0) - J(v_0))(D(u) - D(v_0))] \\ = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{c' \cdot x}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \left[ \frac{A(u) - A(v_0)}{D(u) - D(v_0)} - J(v_0) \right] \quad (4)$$

$$v = \frac{u \cdot \cos \varphi}{\cos \vartheta}; \quad v_0 = u_0. \quad (5)$$

Damit sind die Elemente  $x, t, \vartheta, y$  eines beliebigen Flugbahnpunkts in dem Parameter  $u$  ausgedrückt. Die hier auftretenden Funktionen  $D, T, J, A$  heißen die primären ballistischen Funktionen.

In Gleichung (1) sei zur Abkürzung  $\frac{x}{c'}$  mit  $\xi$  bezeichnet, speziell für den Endpunkt der Bahn, wo  $x = X$ , werde  $\frac{X}{c'} = \xi_e$  geschrieben. Diese Gleichung (1) läßt erkennen, daß  $u$  eine Funktion von  $\xi$  und von  $v_0$  ist. So sei bzw. in (2), (3) und (4) gesetzt:

$$T(u) - T(v_0) = H(v_0, \xi), \\ J(u) - J(v_0) = L(v_0, \xi), \\ \frac{A(u) - A(v_0)}{D(u) - D(v_0)} - J(v_0) = E(v_0, \xi).$$

Es ist leicht zu sehen, wie mit Hilfe der primären Tabellen die sekundären Tabellen für  $H, L$  und  $E$  hergestellt werden können, die natürlich doppelten Eingang haben müssen: man wählt einen bestimmten Zahlenwert von  $v_0$  und von  $\xi$ , gewinnt dazu aus Gleichung (1) den Wert von  $u$  und damit z. B. von  $J(u)$  und hat folglich denjenigen von  $L$  usw.

Ebenso lassen sich Tabellen errechnen für

$$\frac{E}{\xi} = N$$

und

$$L - E = M.$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem in folgender Form:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für den} \\ \text{beliebigen} \\ \text{Bahnpunkt} \\ (x, y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xi = D(u) - D(v_0) \quad (6) \\ t = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot H(v_0, \xi) \quad (7) \\ \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot L(v_0, \xi) \quad (8) \\ = \operatorname{tg} \varphi \cdot \left( 1 - \frac{c'}{\sin^2 \varphi} \cdot L(v_0, \xi) \right) \quad (9) \\ y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{c' \cdot x}{2 \cos^2 \varphi} \cdot E(v_0, \xi) \quad (10) \\ = \frac{x \cdot c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \left( \frac{\sin 2 \varphi}{c'} - E(v_0, \xi) \right). \quad (11) \end{array}$$

Was speziell den Auffallpunkt im Mündungshorizont betrifft, so ist hier  $y = 0$ ,  $x = X$ ,  $\vartheta = -\omega$ ,  $v = v_e$ ,  $u = u_e$ ,  $\xi = \xi_e$ . Aus (11) ergibt sich also

$$\sin 2 \varphi = c' \cdot E(v_0, \xi_e),$$

und da  $c' = \frac{X}{\xi_e}$  und  $\frac{E(v_0, \xi_e)}{\xi_e} = N(v_0, \xi_e)$  ist, so folgt weiter die für Schußtafelberechnung wichtige Beziehung

$$\frac{\sin 2 \varphi}{X} = N(v_0, \xi_e).$$

Die Gleichung (10) gibt, mit  $y = 0$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot E(v_0, \xi_e)$ . Also wird aus (8):

$$-\operatorname{tg} \omega = \frac{c}{2 \cos^2 \varphi} \cdot E_e - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot L_e = -\frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot M_e.$$

Dabei soll  $L_e$  statt  $L(v_0, \xi_e)$ ,  $E_e$  statt  $E(v_0, \xi_e)$  usw., ebenso später  $L_s$  statt  $L(v_0, \xi_s)$ ,  $E_s$  statt  $E(v_0, \xi_s)$  usw. gesetzt sein.

Die Gleichung (9) wird, spezialisiert für den Auffallpunkt,

$$-\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \left( 1 - \frac{c'}{\sin 2 \varphi} \cdot L_e \right) \quad \text{oder, da} \quad \frac{\sin 2 \varphi}{c'} = E_e \quad \text{ist,}$$

$$-\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \left( 1 - \frac{L_e}{E_e} \right) = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{M_e}{E_e}.$$

Im Gipfelpunkt der Bahn ist  $\vartheta = 0$ ,  $\operatorname{tg} \vartheta = 0$ , also wird Gleichung (8) zu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot L_s,$$

und Gleichung (9) zu

$$1 = \frac{c'}{\sin 2 \varphi} \cdot L_s.$$

Endlich folgt aus Gleichung (11):

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{x_s \cdot c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot \left( \frac{\sin 2 \varphi}{c'} - E_s \right) = x_s \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{L_s} \cdot (L_s - E_s) \\ &= x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{M_s}{L_s}. \end{aligned}$$

Damit hat man die folgende Zusammenstellung:

$$\xi_e = \frac{X}{c'}; \tag{12}$$

$$\sin 2 \varphi = X \cdot N(v_0, \xi_e) = c' \cdot E(v_0, \xi_e); \tag{13}$$

$$v_e = \frac{u_e \cdot \cos \varphi}{\cos \omega}; \tag{14}$$

$$\xi_s = D(u_e) - D(v_0); \tag{15}$$

$$T = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot H(v_0, \xi_e); \tag{16}$$

$$-\operatorname{tg} \vartheta_s = \operatorname{tg} \omega = \frac{c}{2 \cos^2 \varphi} \cdot M(v_0, \xi_e) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{M(v_0, \xi_e)}{E(v_0, \xi_e)} \tag{17}$$

für den  
Auffall-  
punkt

( $y = 0$ ,  
 $x = X$ ).

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 2\varphi}{c} &= L(v_0, \xi_s); \\
 t_s &= \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot H(v_0, \xi_s); \\
 \xi_s &= \frac{x_s}{c'} = D(u_s) - D(v_0); \\
 y_s &= x_s \cdot \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot M(v_0, \xi_s) = x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{M(v_0, \xi_s)}{L(v_0, \xi_s)} \\
 v_s &= u_s \cdot \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für den} \\ \text{Gipfel-} \\ \text{punkt} \\ (x = x_s, \\ y = y_s, \\ \varphi = 0). \end{array}
 \begin{array}{l} (18) \\ (19) \\ (20) \\ (21) \\ (22) \end{array}$$

Die hier eingeführten Funktionen  $E, N, H, L, M$  heißen die sekundären ballistischen Funktionen. Die zugehörigen Tabellen sind im Anhang, Tabellen 10b bis 10f, gegeben.

Der Nutzen dieser sekundären Funktionen wird sofort ersichtlich, wenn man z. B. die Aufgabe zu lösen versucht: Gemessen sei die Schußweite  $X$ , der Abgangswinkel  $\varphi$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Gesucht die Flugzeit  $T$ , die Auffallgeschwindigkeit  $v_s$ , der Auffallwinkel  $\omega$ , die Gipfelabszisse  $x_s$ , die Gipfelhöhe  $y_s$ . Allein mit Hilfe der primären Funktionen  $D, T, J, A$  ist die Lösung etwas umständlich (über die Lösung der einzelnen Flugbahnaufgaben vgl. Abschnitt 12); dagegen mit den sekundären Tabellen vollzieht sich die Lösung sehr einfach:

In Gleichung (13)  $\sin 2\varphi = X \cdot N(v_0, \xi_s)$  kennt man  $\varphi$  und  $X$ , folglich  $N$ , und da auch  $v_0$  bekannt ist, läßt sich  $\xi_s$  und wegen (12) auch  $c'$  berechnen. Gleichung (16) liefert somit  $T$  und Gleichung (17)  $\omega$ . Aus Gleichung (15) folgt  $D(u_s)$ , also  $u_s$ . Daher ist wegen (14) nunmehr auch  $v_s$  zu berechnen. Ferner erhält man aus (18)  $\xi_s = \frac{x_s}{c'}$ , folglich auch  $x_s$ ; dazu gibt (21) den Wert von  $y_s$ .

Zugleich erkennt man, daß nichts im Wege steht, außer diesen sekundären Funktionen  $E, N, H, L, M$  noch andere einzuführen. Z. B. ergibt sich aus (12) und (16)

$$T = \frac{X}{\xi_s \cdot \cos \varphi} \cdot H(v_0, \xi_s).$$

Wenn man folglich für  $\frac{H}{\xi}$  eine neue Funktion  $R$  einführt und eine Tabelle mit doppeltem Eingang hierfür berechnet, so hat man

$$T = \frac{X}{\cos \varphi} \cdot R(v_0, \xi_s), \text{ usw.}$$

### § 31. Die ballistischen Abaken von C. Cranz.

Wie in dem vorhergehenden § 30 gezeigt wurde, werden durch die Benutzung der sekundären Funktionen  $E, N, H, L, M$  an Stelle der primären Funktionen  $D, T, J, H$  die ballistischen Berechnungen

wesentlich vereinfacht. Zu dem einheitlichen Siaccischen Luftwiderstandsgesetz von 1896 liegen die Zahlenwerte der sekundären Funktionen in dem verdienstvollen Tabellenwerk von F. Fasella (*Tavole balistiche secondarie*, Genova 1901) vor.

Aber auch die Rechnung mit den Tabellen der sekundären Funktionen bringt, da es sich um zwei Argumente ( $v_0$  und  $\xi$ ), also um Tabellen mit doppeltem Eingang handelt, immerhin noch die Unbequemlichkeit mit sich, daß meistens eine zweifache rechnerische Interpolation nötig ist. Solche Interpolationen vollziehen sich bei der Ablesung aus Schaubildern weit leichter, nämlich durch bloßes Abschätzen mit dem Auge.

Die im Anhang dieses Bandes gegebenen Schaubilder Nr. IIIa bis IIIi, die (nur zu Zwecken der Unterscheidung) als ballistische Abaken bezeichnet sind (abakus = Rechentafel), haben den Zweck, mit einem möglichst geringen Aufwand an Mühe und Zeit eine ballistische Aufgabe zu lösen, die sich auf die Elemente eines beliebigen Punkts einer Flachbahn (nach Siacci bis etwa  $\varphi = 45^\circ$  aufwärts) bezieht. Man hat bei den Ablesungen nur nötig, zwischen die aufgeführten Abakenkurven sich jedesmal diejenige Kurve eingezeichnet vorzustellen, die sich auf die in Betracht kommende Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$  bezieht. Die Durchführung zahlreicher Beispiele hat ergeben, daß, bei sorgfältiger Ablesung mit Hilfe der Abaken, nahezu die gleiche Genauigkeit erzielt wird, wie mit Hilfe der Fasellaschen Tabellen.

Die Gebrauchsanweisung ist im Anhang zu diesem Band vor dem Schaubild Nr. IIIa gegeben, samt Gleichungssystem, Schlüssel der Bezeichnungen und Zahlenbeispiel. Ein weiteres Zahlenbeispiel findet man am Schlusse dieses § 31.

Über die Herstellung dieser Abakenkurven IIIa bis IIIi und deren Beziehung zu den sekundären Funktionen mögen hier einige allgemeine Bemerkungen Platz finden:

Die Gleichungen (I) bis (III) und (IVa), die in der „Zusammenstellung“ von § 23 gegeben worden waren, sollen z. B. für den im Mündungshorizont gelegenen Auffallpunkt ( $x = X$ ,  $y = 0$ ,  $\vartheta = -\omega$ ,  $v = v_e$ ,  $t = T$ ,  $u = u_e$ ) spezialisiert werden. Man hat dann

$$\frac{X\gamma c}{\sigma^3} = D(u_e) - D(u_0); \quad (1)$$

$$T = \frac{\sigma}{c\gamma} (T(u_e) - T(u_0)); \quad (2)$$

$$-\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c\gamma} (J(u_e) - J(u_0)); \quad (3)$$

$$0 = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c\gamma} \left[ \frac{A(u_e) - A(u_0)}{D(u_e) - D(u_0)} - J(u_0) \right]; \quad (4)$$

$$u_e = \frac{v_e \cos \omega}{\sigma}; \quad (5)$$

$$u_0 = \frac{v_0 \cos \varphi}{\sigma}. \quad (6)$$

Dabei sei  $\frac{\gamma c X}{\sigma^2}$  kurz mit  $\xi$  bezeichnet.

Die Gleichung (1) zeigt, daß mit  $u_0$  und  $\xi$  auch  $u_e$  gegeben ist; folglich ist wegen (2)  $\frac{c\gamma}{\sigma} \cdot T$  eine Funktion von  $u_0$  und  $\xi$ ; wegen (3) gilt dasselbe von  $(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega) 2c\gamma$  und wegen (4) ist auch  $2c\gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi$  eine Funktion von  $u_0$  und  $\xi$ ; oder kurz geschrieben, es ist  $T = \frac{\sigma}{c\gamma} \cdot F_1(u_0, \xi)$ ;  $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2c\gamma} \cdot F_2(u_0, \xi) - \operatorname{tg} \varphi$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2c\gamma} \cdot F_3(u_0, \xi)$ , folglich auch  $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2c\gamma} \cdot F_4(u_0, \xi)$ .

Angenommen, es seien die beiden Größen  $u_0$  und  $\xi$  bekannt, so ist folglich gegeben:

erstens:  $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}$ , nämlich  $= F_4 : F_3$ ;

zweitens:  $\frac{v_e \cos \omega}{v_0 \cos \varphi}$ , denn dies ist  $= \frac{u_e}{u_0}$  und mit  $u_0$  und  $\xi$  ist  $u_e$  gegeben,

drittens:  $\frac{v_0^3 \sin 2\varphi}{X}$ , denn dieser Ausdruck ist  $= \frac{u_0^3 \cdot \sigma^2}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{X}$   
 $= 2 \cdot u_0^3 \cdot \frac{\sigma^2}{2c\gamma X} \cdot F_3(u_0, \xi) = \frac{u_0^3}{\xi} \cdot F_3(u_0, \xi)$ , worin nur bekannte Größen vorkommen,

viertens:  $\frac{T}{\sqrt{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}}$ , denn dies ist  $= \frac{\sigma}{c\gamma} \cdot F_1(u_0, \xi) \cdot \frac{\sqrt{2c\gamma}}{\sqrt{X} \cdot \sqrt{F_3(u_0, \xi)}}$   
 $= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}} \cdot \frac{F_1(u_0, \xi)}{\sqrt{F_3(u_0, \xi)}}$ .

Spezialisiert man die Gleichungen (I) bis (IV) ebenso für den Gipfelpunkt der Bahn, also für  $\vartheta = 0$ ,  $x = x_s$ ,  $y = y_s$ ,  $t = t_s$ ,  $v = v_s$ ,  $u = u_s = \frac{v_s}{\sigma}$ , so zeigt sich leicht, daß auch  $\frac{x_s}{X}$  und  $\frac{y_s}{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}$  mit  $u_0$  und  $\xi$  gegeben wird.

Nun hat es sich als zweckmäßig erwiesen,  $\sigma = \cos \varphi$  und  $\gamma = \beta \cdot \cos^2 \varphi$  zu wählen (Siaccoi II und III); dann ist  $u_0 = v_0$  und  $\xi = c\beta X$ , und es kann das Resultat folgendermaßen ausgedrückt werden: Sind  $v_0$  und  $c\beta X$  gegeben, so sind eben damit die folgenden Kombinationen der Elemente der Flugbahn bekannt:  $\frac{v_0^3 \sin 2\varphi}{X} = A_1$ ;  $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi} = A_2$ ;

$$\frac{v_e \cos \omega}{v_0 \cos \varphi} = A_3; \quad \frac{T}{\sqrt{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}} = A_4; \quad \frac{x_s}{X} = A_5; \quad \frac{y_s}{X \cdot \operatorname{tg} \varphi} = A_6;$$

endlich  $A_7 = \xi \cdot A_1$ .



In der Praxis wird gewöhnlich die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , die Schußweite  $X$  und der Abgangswinkel  $\varphi$  gemessen; es liegt also  $A_1$  und  $v_0$  vor. Dann ist eo ipso  $A_2$  und damit der spitze Auffallwinkel  $\omega$ ,  $A_3$  und damit die Endgeschwindigkeit  $v_e$ ,  $A_4$  und damit die Flugzeit  $T$ ,  $A_5$  und damit die Gipfelabszisse  $x_g$ ,  $A_6$  und damit die Gipfelhöhe  $y_g$ , und endlich  $c\beta X$  und damit  $c\beta$ , folglich (bei gegebenem Kaliber  $2R$ , Geschößgewicht  $P$  und Luftgewicht  $\delta$ ) das Produkt  $\beta$  bekannt.

Es leuchtet nach dem Obigen ein, daß und wie aus irgendeinem Lösungssystem mit zugehörigen Tabellen diese Faktoren  $A_1, A_2, \dots$  berechnet werden können. So wurden z. B. aus den ballistischen Tabellen von Siacci 1896, sowie aus den dazu gehörigen sekundären Tabellen von Fasella, worin mehrere der Faktoren berechnet vorliegen, von Oblt. Schatte auf Veranlassung des Verfassers zunächst die 6 Kurventafeln IIIa bis IIIg hergestellt und in die Auflage dieses Lehrbuchs von 1910 (Band IV) aufgenommen. Für die Auflagen von 1917 und 1918 wurden sodann die Abaken in der Richtung erweitert, daß sie auch zur Berechnung der Elemente eines beliebigen Flugbahnpunkts ( $xy$ ) dienen und daß somit jede Flachbahnaufgabe mittels dieses halbgraphischen Verfahrens gelöst werden kann, ohne daß eine zweifache rechnerische Interpolation nötig ist.

Zu diesem Zwecke war es nur erforderlich, zwei weitere Abaken, nämlich die Kurven  $A_8$  und  $A_9$  (Abaken Nr. III<sub>h</sub> und III<sub>i</sub>) hinzuzufügen; die bisherigen Abaken  $A_1$  bis  $A_7$  konnten auch für diese allgemeinen Aufgaben beibehalten werden. Denn, wenn jetzt die Abszisse  $\xi$  den Wert  $c\beta x$  des beliebigen Bahnpunkts ( $xy$ ) bedeutet, so ist

$$A_1 = \frac{E(v_0, c\beta x) \cdot v_0^2}{\xi} = N(v_0, c\beta x) \cdot v_0^2; \quad (\text{vgl. Gleichung (10) von § 30}),$$

$$A_2 = \frac{u}{v_0}, \quad \text{wo } u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}; \quad (\text{vgl. Gleichung (5) von § 30}),$$

$$A_7 = v_0^2 \cdot E(v_0, c\beta x); \quad (\text{vgl. Gleichung (11) von § 30}),$$

$$A_8 = H(v_0, c\beta x); \quad (\text{vgl. Gleichung (7) von § 30}),$$

$$A_9 = L(v_0, c\beta x); \quad (\text{vgl. Gleichung (8) von § 30}),$$

man hat also für einen beliebigen Flugbahnpunkt mit den Elementen  $\vartheta, v, t, \xi = c\beta x$  das folgende Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} y &= x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{2 c \beta v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot A_7, \\ &= x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot A_1, \end{aligned} \right\} \text{ dabei } \xi = c \beta x.$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta &= \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2 c \beta \cos^2 \varphi} \cdot A_0, \\ t &= \frac{1}{c \beta \cos \varphi} \cdot A_8, \\ v &= \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta} \cdot A_8. \end{aligned} \right\} \text{ dabei } \xi = c \beta x.$$

**Zahlenbeispiel.** Gegeben: Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 550$  m/sec; Schußweite 6841 m; Abgangswinkel  $\varphi = 20^\circ$ ; Geschossgewicht  $P = 6,9$  kg; Kaliber  $2R = 0,079$  m; mittleres Luftgewicht  $\delta = 1,206$  (kg/m<sup>3</sup>).

Gesucht: a) für den Auffallpunkt im Mündungshorizont: Der spitze Auffallwinkel  $\omega$ , die Endgeschwindigkeit  $v_e$ , und die Gesamtflugzeit  $T$ , außerdem die Koordinaten  $x_e$  und  $y_e$  des Gipfelpunkts. Es wird

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{X} = 28,4, & \text{daraus ergibt sich} & \quad \xi = 5150; \\ A_2 &= \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi} = 1,74, & " & \quad \omega = 32^\circ 22'; \\ A_3 &= \frac{v_e \cos \omega}{v_0 \cos \varphi} = 0,37, & " & \quad v_e \cos \omega = 191, \text{ also } v_e = 226 \text{ m/sec}; \\ A_4 &= \frac{T}{\sqrt{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}} = 0,512, & " & \quad T = 25,5 \text{ sec}; \\ A_5 &= \frac{x_e}{X} = 0,563, & " & \quad x_e = 3855 \text{ m}; \\ A_6 &= \frac{y_e}{X \cdot \operatorname{tg} \varphi} = 0,343, & " & \quad y_e = 854 \text{ m}; \\ A_7 &= \xi \cdot A_1 = 145000, & " & \quad \beta c = 0,746, \text{ somit } i\beta = 0,972 \text{ und} \\ & & & \quad \text{da } \beta = 0,905 \text{ ist, wird } i = 1,07. \end{aligned}$$

b) Für den beliebigen Flugbahnpunkt, dessen Abszisse  $x = 5000$  m ist, wird gesucht: die Ordinate  $y$ , der Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente, die Flugzeit  $t$  bis zum Erreichen dieses Punkts und die Geschossgeschwindigkeit  $v$  in diesem Punkt.

Zu  $x = 5000$  gehört  $\xi = c \beta x = 3730$ ; damit erhält man  $A_1 = 23$ ;  $A_0 = 0,72$ ;  $A_8 = 11,5$ ;  $A_9 = 0,430$ . Somit ist

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot A_1 = 740 \text{ m}; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2 c \beta \cos^2 \varphi} \cdot A_0; \quad \vartheta = -10^\circ 20'; \\ t &= \frac{1}{c \beta \cos \varphi} \cdot A_8 = 16,4 \text{ sec}; \\ v &= \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta} \cdot A_9 = 225,3 \text{ m/sec}. \end{aligned}$$

**Anmerkungen.** 1. Schon J. Didion hat die in seiner analytischen Lösungsmethode vorkommenden Funktionen in zweckmäßiger Weise durch Schaubilder dargestellt, wodurch die Interpolationen erleichtert werden. Seitdem sind in der Mathematik und Technik die graphischen Darstellungen-

verfahren wesentlich vervollkommenet worden, insbesondere durch M. d'Ocagne, R. Mehmke, C. Runge, R. Rothe, v. Pirani u. a. Auch in der Ballistik haben diese Verfahren immer mehr an Bedeutung gewonnen. Zur Darstellung einer Funktion zwischen 2 Veränderlichen können außer den gewöhnlichen rechtwinkligen oder schiefwinkligen Punktkoordinaten die logarithmischen und anderen „Funktionsskalen“, ferner häufig auch die „projektivischen Teilungen“ mit Vorteil angewandt werden. Und eine Funktion zwischen 3 Veränderlichen kann, statt durch eine Tabelle mit doppeltem Eingang, mittels einer Kurvenschar in einem Punktkoordinatensystem, häufig aber besser durch ein Nomogramm dargestellt werden, eine Rechentafel, die auf dem sogenannten Verfahren der fluchtrecten Punkte beruht (mit geradlinigen oder auch krummlinigen Skalenträgern). So ließe sich auch im vorliegenden Fall daran denken, ein Abaken-Nomogramm aufzustellen. Und im Anfang zu diesem Bande findet man ein Nomogramm für die Ermittlung des Tagesluftgewichts. Über diese Darstellungsmethoden im allgemeinen vgl. die Lit.-Note (d'Ocagne, Mehmke, Schultz, Schrutka, Schilling, J. E. Mayer, v. Sanden, Soreau, M. Pirani). In der Ballistik wurden solche Verfahren, wie es scheint, zuerst angewendet von den italienischen Ballistikern G. Pesci, G. Ronca, Garbasso; ferner von R. v. Portenschlag-Ledermayr, A. Nowakowski. Letzterer hat unter anderem ein Verfahren veröffentlicht, um die zu einer gegebenen Flughöhe  $y$  gehörige Flugbahnabszisse  $x$  mittels Anlegens logarithmischer Maßstäbe an eine für alle Flugbahnen von gleicher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gültige Schaulinie zu ermitteln. Später hat A. Nowakowski eine eigenartige Schußtafeldarstellung beschrieben, die darauf beruht, daß man die Flugbahnen einer Schußtafel in eine krumme Oberfläche auseinanderlegt, und diese Oberfläche durch wagrechte Ebenen in Schichtlinien schneidet; er hat dies weiterhin auch angewendet zur Bestimmung der „schußtoten Räume“. In etwas anderer Weise hat Prof. Amann graphische Schußtafeln konstruiert, die während des Kriegs vielfache Verwendung gefunden haben.

2. Wenn von zahlreichen Flugbahnen mit verschiedenen Werten von  $v_0$  je die Flugbahnelemente  $\varphi, X, v, x, y, T \dots$  direkt beobachtet wurden (photogrammetrische Messungen oder Aufnahmen nach der Methode F. Neesen), wäre es möglich, solche Abaken rein empirisch aufzustellen, ohne daß zuvor eine Luftwiderstandsfunktion samt den primären und sekundären Tabellen anzuwenden wäre; für  $\beta$  würde dabei etwa der Valliersche Formel-ausdruck genommen werden. Unter der Annahme, daß die Schußtafeln rein empirischer Natur wären, — was bekanntlich nicht der Fall ist —, wurden solche empirische Abaken aus einer größeren Anzahl von Schußtafeln hergestellt (Hörer Lt. Simon). Es zeigte sich, daß solche Tafeln für rasche und bequeme Lösung von Flugbahnaufgaben gute Dienste leisten könnten. Doch soll mit Vorstehendem nicht gesagt werden, daß die Ballistik auf diesem empirischen Weg sich am zweckmäßigsten weiter entwickeln würde.

3. Die Form der Faktoren  $A_1, A_2 \dots$  ist dieselbe, wie sie Siacci und Chapel unter Voraussetzung des quadratischen bzw. des kubischen Luftwiderstandsgesetzes in ihren Tabellen der Schußfaktoren (vgl. § 25) benützten. Durch die obigen Ausführungen hat sich somit gezeigt, daß den Faktoren  $A_1, A_2 \dots$  insofern eine weit allgemeinere Bedeutung zukommt, als sie für ein beliebiges Luftwiderstandsgesetz aufgestellt und auf einen beliebigen Flugbahnpunkt angewendet werden können. Aber immer wird man sich der Voraussetzungen bewußt bleiben müssen, unter denen auch diese Lösung gebildet ist; es wäre daher verfehlt, wenn jemand diese Abaken für Steilbahnen verwenden wollte.

## Sechster Abschnitt.

## Reihenentwicklungen zur Berechnung einer Flugbahn in einem einzigen Bogen.

§ 32. Allgemeines. Methode von Piton-Bressant und Hélie. Formeln der Kommission von Gâvre. Methode von Duchêne. Methode des „Aide-Mémoire“.

Wenn eine Funktion  $F(x)$  in dem Intervall 0 bis  $x$  endlich und stetig ist samt ihren  $n+1$  ersten, als existierend vorausgesetzten Ableitungen  $F'(x)$ ,  $F''(x)$ , ...,  $F^{(n+1)}(x)$ , so ist bekanntlich nach Taylor-Maclaurin

$$F(x) = F(0) + x \cdot F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0) + \text{Restglied } R,$$

wobei nach Lagrange  $R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot F^{(n+1)}(\varepsilon x)$ ; dabei  $\varepsilon$  eine unbekannte Zahl zwischen 0 und 1. Oder auch in Integralform

$$R = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \cdot F^{(n+1)}(t) \cdot dt.$$

Wird also  $F(x)$  durch eine solche Potenzentwicklung berechnet und wird dabei die Berechnung bei dem Gliede  $\frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0)$  abgebrochen, so wird ein Fehler  $R$  begangen, und der Ausdruck für das Restglied  $R$  gestattet, für diesen Fehler Grenzen anzugeben, (mit der beliebig fortgesetzten Reihe  $F(x) = F(0) + x \cdot F'(0) + \dots$  usw. in infinitum darf nur gerechnet werden, wenn man in dem betreffenden Fall nachgewiesen hat, daß für  $n = \infty$ ,  $R = 0$  wird, d. h. wenn die Reihe konvergiert).

Im vorliegenden Falle möge es sich z. B. darum handeln, die Flugbahnordinate  $y$  in Funktion der zugehörigen Flugbahnabszisse  $x$  durch eine Reihenentwicklung darzustellen. Dann ist

$$F(x) = y; \quad F(0) = y_{x=0} = 0,$$

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta; \quad F'(0) = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$F''(x) = \frac{d(\operatorname{tg} \vartheta)}{dx} = -\frac{g}{v^2 \cos^2 \vartheta} \quad (\text{vgl. § 17}); \quad F''(0) = -\frac{g}{(v_0 \cos \varphi)^2},$$

$$F'''(x) = -g \cdot \frac{d}{dx} (v^2 \cdot \cos^2 \vartheta)^{-1} = + \frac{g \cdot 2 v \cdot \cos \vartheta}{v^4 \cos^4 \vartheta} \cdot \frac{d(v \cos \vartheta)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

oder, da

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{dt} = -c f(v) \cos \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \vartheta$$

ist, wird

$$F'''(x) = -\frac{2g \cdot c f(v) \cdot \cos \vartheta}{(v \cos \vartheta)^4}, \quad F'''(0) = -\frac{2g \cdot c f(v_0)}{v_0^4 \cos^3 \varphi}.$$

Ebenso wird

$$F^{(IV)}(0) = \frac{2g \cdot c f(v_0)}{v_0^5 \cos^4 \varphi} \cdot \left[ g \left\{ \frac{v_0 (c f(v_0))'}{c f(v_0)} - 1 \right\} \cdot \sin \varphi + v_0 (c f(v_0))' - 4 c f(v_0) \right]$$

usw., wobei unter  $(f(v))'$  die Ableitung nach  $v$  zu verstehen ist.

So lange das Geschöß sich über dem Mündungshorizont befindet, bleibt  $y$  samt seinen Ableitungen nach  $x$  jedenfalls endlich und stetig. Somit erhält man durch Einsetzen der berechneten Werte  $F(0)$ ,  $F'(0)$ , ... in die obige Reihe die Entwicklung von  $y$  nach  $x$ . Die Tangentenneigung  $\vartheta$  wird daraus wegen  $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}$  durch einmalige Ableitung und die Horizontalkomponente  $v \cos \vartheta$  der Geschwindigkeit wegen  $v \cos \vartheta = \sqrt{\frac{-g}{y''}}$  (vgl. § 18) durch zweimalige Ableitung gewonnen. Endlich die Flugzeit  $t$  berechnet sich aus  $dt = \frac{dx}{v \cos \vartheta}$  durch eine Integration, wobei  $t=0$  für  $x=0$  ist.

Man erhält so:

$$\begin{aligned} y = & x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 (v_0 \cos \varphi)^2} - \frac{g}{3} \cdot \frac{c f(v_0)}{v_0} \left( \frac{x}{(v_0 \cos \varphi)} \right)^3 \\ & - \frac{g}{12} \cdot \left[ 3 \left( \frac{c f(v_0)}{v_0} \right)^2 - \left( \frac{c f(v_0)}{v_0} \right)' \{ c f(v_0) + g \sin \varphi \} \right] \cdot \left( \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \right)^4 \\ & + \dots + \text{Restglied } R; \text{ oder} \end{aligned}$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 (v_0 \cos \varphi)^2} \cdot \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{c f(v_0)}{v_0^2 \cos \varphi} x + \dots \right] + \text{Restgl. } R \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{(v_0 \cos \varphi)^2} \cdot \left[ 1 + \frac{c f(v_0)}{v_0^2 \cos \varphi} x + \dots \right] + \text{Restgl. } R \quad (2)$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \cdot \left[ 1 + \frac{c f(v_0)}{2 \cdot v_0^2 \cos \varphi} x + \dots \right] + \text{Restgl. } R \quad (3)$$

$$v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi \cdot \left[ 1 - \frac{c f(v_0)}{v_0^2 \cos \varphi} x + \dots \right] + \text{Restgl. } R. \quad (4)$$

Hier bedeutet, wenn z. B. das biquadratische Luftwiderstandsgesetz  $c f(v) = c v^4$  zugrunde gelegt wird.

$$c f(v_0) = c v_0^4; \quad (c f(v_0))' = (c v^4)'_{v=v_0} = 4 c v_0^3; \quad \left( \frac{c f(v_0)}{v_0} \right)' = 3 c v_0^2, \text{ usw.}$$

Es lassen sich also für irgendein analytisch gegebenes Luftwiderstandsgesetz die Reihenentwicklungen ohne weiteres bilden.

Derartige Entwicklungen wurden schon seit Ende des 18. Jahrhunderts verschiedentlich durchgeführt, entweder mit  $x$  oder mit  $t$  oder mit  $\vartheta$  oder  $s$  als der unabhängigen Variablen (Lambert, Borda, Tempelhof, Otto, Heim, Français, Pfister, Denecke, Ligowski, Neumann). Die Konvergenz der Reihenentwicklungen wurde dabei entweder als selbstverständlich betrachtet oder mit wenigen Worten abgetan.

Auch die von P. Haupt neuerdings ausgeführten Konvergenzuntersuchungen (vgl. Lit.-Note) sind nicht beweiskräftig. Erst in neuerer Zeit ist von C. Veithen in aller Strenge nachgewiesen worden, daß die ballistischen Potenzreihenentwicklungen von  $x$  und  $y$  in Funktion von  $t$  für alle endlichen Werte der Flugzeit  $t$  konvergieren, falls über die Luftwiderstandsfunktion eine gewisse Annahme gemacht wird.

In einfacherer Weise ist der Nachweis der Konvergenz neuerdings von Th. Vahlen geleistet worden (s. Lit.-Note). Dieser gibt an, weiterhin aus (1) durch Reihenumkehrung und durch die Spezialisierung  $y=0$  den folgenden Ausdruck für die Schußweite  $X$  gewonnen zu haben:

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} \cdot \left\{ 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{cf(v_0)}{g} \cdot \sin \varphi + \frac{8}{9} \cdot \frac{cf(v_0)}{g} \left( \frac{cf(v_0)}{g} + \frac{3}{4} \cdot \frac{v_0}{g} \cdot (c \cdot f(v_0))' \right) \sin^2 \varphi + \dots \right\}. \quad (1a)$$

Neuerdings (1917) hat H. Zlamal (vgl. Lit.-Note) unter Zugrundelegung des Luftwiderstandsgesetzes  $cf(v) = cv^n$  unendliche konvergente Potenzreihen für die Variablen  $v \cos \vartheta$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $t$  in Funktion von  $\sin \vartheta$  aufgestellt. Die exakte Ableitung gilt allgemein für jeden positiv-reellen Wert der Konstanten  $c$  und  $n$  und gestattet die Anlegung von Tabellen. Auf diese Arbeit sei besonders hingewiesen.

Werden nur die 3 bzw. 4 ersten Glieder der Reihe (1) benutzt, so heißt dies, daß die Flugbahn als eine Parabel 3. bzw. 4. Ordnung angesehen wird. So verfahren z. B. Prehn, Dolliak, Piton-Bressant, Hélié, Mieg (letzterer rechnete mit höheren arithmetischen Reihen 3. bzw. 4. Ordnung, was inhaltlich dasselbe ist).

### Einige Anwendungen.

1. Methode von Piton-Bressant und Hélié; Formeln der Kommission von Gâvre. Die Reihe (1) wird mit dem 3. Glied abgebrochen; der Faktor  $\frac{2}{3} \frac{cf(v_0)}{v_0^2 \cos \varphi}$  wird kurz mit  $K$  bezeichnet und aus der Schußweite ermittelt. Man hat somit (vgl. auch § 19):

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot (1 + K x);$$

und daraus

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} (2 + 3 K x).$$

Für  $x = X$  ist  $y = 0$ ,  $\vartheta = -\omega$ . Wird also  $1 + K X = Z$  gesetzt, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{g X}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot Z; \quad Z = \frac{v_0^2 \sin 2 \varphi}{g X},$$

und  $Z$  bedeutet das Verhältnis zwischen der Schußweite im leeren Raum bei gleichen Werten von  $\varphi$  und  $v_0$  und der Schußweite  $X$  im luftgefüllten Raum. Im Endpunkt der Bahn ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\omega) &= \operatorname{tg} \varphi - \frac{g X}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} (2 + 3 K X) = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{Z} (2 + 3 (Z - 1)) \\ &= \operatorname{tg} \varphi \cdot \left( \frac{1}{Z} - 2 \right). \end{aligned}$$

Da ferner

$$-y'' = \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \varphi} (1 + 3 K x)$$

ist, so hat man

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{\sqrt{1 + 3 K x}};$$

im Endpunkt

$$\frac{v_e \cos \omega}{v_0 \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 K X}} = \frac{1}{\sqrt{3 Z - 2}}.$$

Endlich die Flugzeit ergibt sich durch Integration aus

$$dt = dx \sqrt{\frac{-y''}{g}} = \frac{1}{v_0 \cos \varphi} \cdot \sqrt{1 + 3 K x} \cdot dx$$

zu

$$t = \frac{2}{9 v_0 \cos \varphi K} \cdot \left( (1 + 3 K x)^{\frac{3}{2}} - 1 \right),$$

was mit  $K = \frac{Z-1}{X}$  leicht für den Endpunkt der Bahn spezialisiert werden kann. Die Gipfelabszisse  $x_e$  folgt aus der Bedingung  $\vartheta = 0$ .

Man erhält so das folgende Formelsystem:

#### Zusammenstellung.

a) Für einen beliebigen Flugbahnpunkt:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} (1 + K x). \quad (5)$$

Dabei  $K$  aus

$$1 + K X = \frac{v_0^2 \sin 2 \varphi}{g X}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} (2 + 3 K x), \quad (7)$$

$$\frac{v \cos \vartheta}{v_0 \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 K x}}, \quad (8)$$

$$t = \frac{2}{9 v_0 \cos \varphi} \cdot \frac{(1 + 3 K X)^{\frac{3}{2}} - 1}{K}$$

b) Für den Gipfelpunkt:

$$x_s = \frac{1}{3 K} \cdot (\sqrt{1 + 3 K X (1 + K X)} - 1) \quad (10)$$

$$y_s = x_s \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{1 + 2 K x_s}{2 + 3 K x_s} \quad (11)$$

c) Für den Endpunkt im Mündungshorizont:

$$\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi} = 2 - \frac{1}{Z} = f_1(Z), \quad (12)$$

$$\frac{v_a \cos \omega}{v_0 \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{3 Z - 2}} = f_2(Z), \quad (13)$$

$$\frac{T v_0 \cos \varphi}{X} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(3 Z - 2)^{\frac{3}{2}} - 1}{Z - 1} = f_3(Z). \quad (14)$$

Dabei

$$Z = 1 + K X = \frac{v_0^2 \sin^2 2 \varphi}{g}. \quad (15)$$

Häufig wird  $K$  für dasselbe Geschütz, dasselbe Geschöß und dieselbe Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  als unabhängig von  $\varphi$ , also als eine Konstante der betreffenden Schußtafel behandelt. Tatsächlich ist aber, wie aus der Entwicklung (1) ohne weiteres ersichtlich ist,  $K$  von  $\varphi$  abhängig.

In der Tat gibt M. Hélie (vgl. Lit.-Note) für solche Fälle, in denen die Schußweite  $X$  nicht gegeben ist, sondern erst mittels  $K$ ,  $v_0$  und  $\varphi$ , also aus Gleichung (15) oder aus

$$X = \frac{1}{2 K} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4 K v_0^2 \sin^2 2 \varphi}{g}} \right) \quad (15a)$$

berechnet werden soll, eine empirische Formel für  $K$ , in der dieser Koeffizient  $K$  als eine Funktion von  $\varphi$  erscheint:

$$\frac{10^{10} \cdot P}{\delta \cdot (2 R)^2 \cdot \sin \gamma} \cdot K = v_0^2 N \left\{ -\frac{M}{N} (1 - \cos \varphi) + \sec \varphi \right\}.$$

Dabei bedeutet, wie bisher,  $P$  das Geschößgewicht (kg);  $\delta$  das Luftgewicht (kg/cbm);  $2 R$  das Kaliber (m);  $\gamma$  den halben Ogivalwinkel an der Geschößspitze, also den Winkel zwischen der Geschößachse und der Tangente an die Ogivalkurve. Die Faktoren  $M$  und  $N$  hängen von  $v_0$  ab. Hierfür werden empirische Formeln, sowie eine Tabelle gegeben. Die letztere ist hier im Auszug angeführt.

$v_0 =$ (m/sec)	$v_0 \cdot N =$	$\frac{M}{N} =$	$v_0 =$ (m/sec)	$v_0 \cdot N =$	$\frac{M}{N} =$
100	4070000	0	460	6412000	1,932
200	4072000	0	480	6454000	1,952
300	4197000	0,699	500	6460000	1,965
400	5550000	1,800	550	6460000	1,984
420	5964000	1,862	600	6460000	1,992
440	6264000	1,904	650	6460000	1,996



## 200 Reihenentwicklungen z. Berechnung einer Flugbahn in einem einzig. Bogen.

Z. B. für  $2R = 0,242$ ;  $v_0 = 470$ ;  $\delta = 1,208$ ;  $P = 120$ ;  $\gamma = 41^\circ 42'$  findet sich:  $v_0 \cdot N = 6441000$ ;  $M/N = 1,943$ . Daraus wird z. B. für  $\varphi = 45^\circ$  mittels Gleichung (15a) die Schußweite  $X = \text{rund } 11000 \text{ m}$  erhalten.

Für  $f_1(Z)$ ,  $f_2(Z)$ ,  $f_3(Z)$  ist nachstehend eine Tabelle gegeben.

Beispiel.

Gegeben  $X = 3300 \text{ m}$  bei  $\varphi = 10^\circ$  und  $v_0 = 354 \text{ m/sec}$ .

Gesucht  $\varphi$ ,  $v_e$ ,  $\omega$  und  $T$  für  $X = 4000 \text{ m}$ .

Man erhält  $K$  aus

$$1 + K \cdot 3300 = \frac{354^2 \cdot \sin(2 \cdot 10)}{9,81 \cdot 3300}, \quad K = \frac{0,32}{3300}.$$

Für die Schußweite  $X = 4000$  berechnet sich der zugehörige Abgangswinkel  $\varphi$  aus

$$\frac{354^2 \cdot \sin 2\varphi}{9,81 \cdot 4000} = 1 + \frac{0,32}{3300} \cdot 4000 = 1,388, \quad \text{daraus } \varphi = 12^\circ 53'.$$

Für dieselbe Schußweite 4000 wird sodann, da  $Z = 1,388$ , also gemäß der Tabelle  $f_1(Z) = 1,279$ ,  $f_2(Z) = 0,680$ ,  $f_3(Z) = 1,250$  ist,

$$\begin{aligned} \text{tg } \omega &= 1,279; \quad \omega = 16^\circ 18'; \\ \frac{v_e \cdot \cos(16^\circ 55')}{354 \cdot \cos(12^\circ 53')} &= 0,680; \quad v_e = 244 \text{ m/sec}; \\ \frac{T \cdot 354 \cdot \cos(12^\circ 53')}{4000} &= 1,250; \quad T = 14,5. \end{aligned}$$

Diese so berechneten Werte  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $v_e$ ,  $T$  dürften mit der Wirklichkeit ziemlich gute Übereinstimmung liefern. Wollte man jedoch z. B. aus den Angaben für die Schußweite 3300 und dem zugehörigen  $K$ -Wert auf die Bahnelemente für die Schußweite 6000 schließen, so würden die Fehler voraussichtlich schon ungehörig groß werden.

### 2. Methode von Duchêne (Frankreich).

Die Flugbahngleichung wird in der Form angenommen:

$$y = x \text{tg } \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \left[ 1 + \frac{Ax}{\cos \varphi} + \frac{Bx^2}{\cos^2 \varphi} \right], \quad (16)$$

wobei  $A$  und  $B$  als nur abhängig von  $v_0$  (bei gleichem Geschuß), aber als unabhängig von  $\varphi$ , d. h. als Konstanten der betreffenden Schußtafel genommen werden.

Um  $A$  und  $B$  zu ermitteln, braucht man zwei empirisch bestimmte Wertepaare z. B. von  $X$  und  $\varphi$ . Verwendet man diese in der Gleichung

$$\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{gX} = 1 + \frac{A \cdot X}{\cos \varphi} + \frac{B \cdot X^2}{\cos^2 \varphi}, \quad (17)$$

so hat man 2 Gleichungen für die Unbekannten  $A$  und  $B$ . Z. B. sei gegeben für  $v_0 = 529 \text{ m/sec}$ .

$$X_1 = 1800 \text{ m}, \quad \varphi_1 = 2^\circ 28'$$

und

$$X_2 = 2200 \text{ m}, \quad \varphi_2 = 3^\circ 12',$$

so wird

$$A = 1,984 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad B = 1,724 \cdot 10^{-9}.$$

$Z$	$f_1(Z)$	$f_2(Z)$	$f_3(Z)$	
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	
1,05	1,0476	0,9325	1,0366	
1,10	1,0909	0,8771	1,0716	
1,15	1,1304	0,8305	1,1052	
1,20	1,1667	0,7906	1,1376	
1,25	1,2000	0,7559	1,1689	
1,30	1,2308	0,7255	1,1992	
1,35	1,2593	0,6984	1,2287	
1,40	1,2857	0,6742	1,2573	
1,45	1,3103	0,6523	1,2852	
1,50	1,3333	0,6325	1,3124	
1,55	1,3548	0,6143	1,3390	
1,60	1,3750	0,5976	1,3650	
1,65	1,3939	0,5822	1,3904	
1,70	1,4118	0,5680	1,4153	
1,75	1,4286	0,5547	1,4397	
1,80	1,4444	0,5423	1,4637	
1,85	1,4595	0,5307	1,4873	
1,90	1,4737	0,5199	1,5104	
1,95	1,4872	0,5096	1,5332	
2,00	1,5000	0,5000	1,5556	
2,05	1,5122	0,4909	1,5776	
2,10	1,5238	0,4822	1,5993	
2,15	1,5349	0,4740	1,6207	
2,20	1,5455	0,4662	1,6418	
2,25	1,5556	0,4588	1,6626	
2,30	1,5652	0,4517	1,6832	
2,35	1,5745	0,4450	1,7035	
2,40	1,5833	0,4385	1,7235	
2,45	1,5918	0,4323	1,7433	
2,50	1,6000	0,4264	1,7628	
2,55	1,6078	0,4207	1,7821	
2,60	1,6154	0,4153	1,8012	
2,65	1,6226	0,4100	1,8201	
2,70	1,6296	0,4049	1,8387	
2,75	1,6364	0,4000	1,8571	
2,80	1,6429	0,3953	1,8754	
2,85	1,6491	0,3907	1,8935	
2,90	1,6552	0,3863	1,9114	
2,95	1,6610	0,3821	1,9291	
3,0	1,6667	0,3780	1,9467	
3,1	1,6774	0,3701	1,9813	
3,2	1,6875	0,3627	2,0153	
3,3	1,6970	0,3558	2,0487	
3,4	1,7059	0,3492	2,0816	
3,5	1,7143	0,3430	2,1139	
3,6	1,7222	0,3371	2,1457	
3,7	1,7297	0,3315	2,1771	
3,8	1,7368	0,3262	2,2079	
3,9	1,7436	0,3211	2,2384	
4,0	1,7500	0,3162	2,2684	
4,5	1,7778	0,2949	2,4126	
5,0	1,8000	0,2774	2,5485	
5,5	1,8182	0,2626	2,6772	
6,0	1,8333	0,2500	2,8000	
7,0	1,8571	0,2294	3,0803	
8,0	1,8750	0,2132	3,2441	
9,0	1,8889	0,2000	3,4444	
10,0	1,9000	0,1890	3,6336	

$$\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{gX}$$

$$T = \frac{X}{v_0 \cos \varphi} \cdot f_2(Z); \quad Z = 1 + KX =$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \cdot f_1(Z); \quad v_0 \cos \omega = v_0 \cos \varphi \cdot f_3(Z);$$

Alsdann erhält man für dasselbe Geschloß, dieselbe Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , aber irgendeinen anderen Abgangswinkel die Elemente mittels:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot (1 + p + q \cdot p^2) \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}p + 2q \cdot p^2\right) \quad (19)$$

$$v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi \cdot (1 + 3p + 6p \cdot q^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \cdot \frac{1}{p} \int_0^p \sqrt{1 + 3p + 6qp^2} \cdot dp, \quad (21)$$

wobei zur Abkürzung  $\frac{A}{\cos \varphi} x = p$  und  $\frac{B}{A^2} = q$  gesetzt ist.

Diese Methode von Duchêne ist mit Rücksicht auf (1) genauer als die vorige, aber weniger bequem zu handhaben.

3. Wenn man beabsichtigt, eine und dieselbe Flugbahn durch eine ganze rationale algebraische Funktion vom 3. bzw. 4. Grad darzustellen und alsdann zu beliebigen Entfernungen  $x$  die Flughöhen  $y$  zu ermitteln oder auch die Flugbahn zu zeichnen, so ist hierfür eine große Zahl von Möglichkeiten gegeben.

Eine Flugbahnparabel 3. Ordnung, z. B.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

ist durch die Schußweite  $X$ , den Abgangswinkel  $\varphi$  und den spitzen Auffallwinkel  $\omega$  eindeutig gegeben, wegen der 4 Bedingungen, daß für  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $y' = \operatorname{tg} \varphi$ , für  $x = X$ ,  $y = 0$  und  $y' = -\operatorname{tg} \omega$  sein soll. Somit ist

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \omega}{X} x^2 - \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \varphi}{X^2} x^3. \quad (22)$$

Eine Parabel 4. Ordnung  $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$  ist z. B. durch den Abgangswinkel  $\varphi$ , die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , die Schußweite  $X$  und den spitzen Auffallwinkel  $\omega$  festgelegt, da für  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y' = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $v_0 \cos \varphi = \sqrt{\frac{g}{y''}}$  und für  $x = X$ ,  $y = 0$  und  $y' = -\operatorname{tg} \omega$  sein muß, also 5 Bedingungsgleichungen vorliegen. Wegen der ersten drei Bedingungen erhält man zunächst die Form

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} (1 + Ax + Bx^2). \quad (23)$$

Die noch übrigen 2 Koeffizienten  $A$  und  $B$  erhält man sodann aus:

$$AX + BX^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{gX} - 1 \quad (24)$$

$$3AX + 4BX^2 = (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega) \cdot \frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi}{gX} - 2$$

Z. B. gegeben  $v_0 = 406 \text{ m/sec}$ ;  $\varphi = 35^\circ$ ;  $X = 8700 \text{ m}$ ;  $\omega = 46^\circ 19'$ .  
 Es wird  $A = \frac{31,3}{8700}$ ;  $B = \frac{-14,2}{8700^2}$ . Damit erhält man mittels (23)  
 $y_s = 1900 \text{ m}$ , (nach den Ottoschen Tabellen ist  $y_s = 1855 \text{ m}$ ).

Sind die Koeffizienten nun bekannt, so berechnet man die Flughöhe  $y$  zu verschiedenen Entfernungen  $x$  etwa mit Hilfe des Horner'schen Schemas und, wenn es sich um zahlreiche äquidistante Werte  $x$  handelt, mittels arithmetischer Reihen. Ohne jede Rechnung, nur mit Hilfe von Millimeterpapier und rechtem Winkel, kann  $y$  zu beliebigem  $x$  graphisch ermittelt werden. Und das Zeichnen einer solchen Parabel höherer Ordnung kann nach dem Vorschlag von Abdank-Abakanowitz mit Hilfe seines Integraphen in besonders einfacher Weise erfolgen. Das Prinzip ist das folgende: Es liege z. B. die Funktion 4. Grads vor  $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ , mit nunmehr bekannten Koeffizienten. Bildet man die 3 ersten Ableitungen, so hat man

$$y' = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3$$

$$y'' = 2 a_2 + 6 a_3 x + 12 a_4 x^2$$

$$y''' = 6 a_3 + 24 a_4 x.$$

Die letzte Gleichung stellt, mit  $x$  und  $y'''$  als Koordinaten, eine gerade Linie vor. Diese wird gezeichnet und alsdann mit dem Integraphenstift befahren, wobei die Integrationskonstante aus der Bedingung  $y'' = 2 a_2$  für  $x = 0$  bestimmt wird. Die so erhaltene Parabel 2. Ordnung wird wiederum befahren, wobei die Integrationskonstante aus der Forderung sich ergibt, daß für  $x = 0$   $y' = a_1$  sei. Man erhält eine Parabel 3. Ordnung. Diese wird noch einmal integriert, wobei für  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Auf diese Weise ist schließlich die Flugbahn als Parabel 4. Ordnung gezeichnet. Ihr Schnitt mit der  $x$ -Achse gibt eine reelle Wurzel der Gleichung  $0 = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ ; also die Schußweite  $x = X$ , für die  $y = 0$  ist.

Über die Einzelheiten der rechnerischen und graphischen Methoden vergleiche man die „Praktische Analysis“ von H. von Sanden, und über das mechanische Integraphen-Verfahren das Buch von Abdank-Abakanowitz, Les Intégraphes, Paris 1889, vgl. Lit.-Note.

4. Wenn für ein bestimmtes Geschütz- und Geschößsystem eine gewöhnliche Schußtafel (für Ziele im Mündungshorizont) vorliegt, so handelt es sich häufig um die Aufgabe, allein mit Hilfe dieser Schußtafel die Bahnelemente eines Punktes  $P$  zu ermitteln, der nicht im Mündungshorizont liegt.

Hierfür kann unter anderem die in Frankreich entstandene „Methode des Aide-Mémoire“ dienen (Aide-mémoire des officiers d'artillerie,

vgl. die Lit.-Note Vallier). Die Grundlage bildet die Voraussetzung, daß die Flugbahngleichung zwischen  $x$  und  $y$  die Form habe:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot F(x). \quad (a)$$

Diese Voraussetzung ist zwar ziemlich allgemeiner Natur, aber wie man aus der Reihenentwicklung (1) erkennt, trifft sie auch dann nicht genau zu, wenn es sich um dasselbe Geschütz- und Geschößsystem, dasselbe Luftgewicht und dieselbe Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  handelt. Denn innerhalb derselben Schußtafel wechselt der Abgangswinkel  $\varphi$ ; von diesem hängt aber gemäß (1) die Funktion  $F$  gleichfalls ab.

Für dasselbe Geschütz und dieselbe Ladung kann obige Gleichung geschrieben werden:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{f(x)}{\cos^2 \varphi}, \quad (b)$$

woraus

$$\operatorname{tg} \vartheta = y' = \operatorname{tg} \varphi - \frac{f'(x)}{\cos^2 \varphi} \quad (c)$$

und

$$\frac{g}{(v \cos \vartheta)^2} = -y'' = + \frac{f''(x)}{\cos^2 \varphi}. \quad (d)$$

Hier mögen  $x$ ,  $y$  die Koordinaten  $OA$ ,  $AB$  der Flugbahn  $OB$  oder 1 bedeuten, die den Abgangswinkel  $\varphi$  besitzt;  $\vartheta$  die Tangentenneigung in  $B$ ,  $v$  die Geschwindigkeit in  $B$  (vgl. Abbildung 51).

Man denke sich nun diejenige Flugbahn 2, welcher die Schußweite  $OA$  oder  $x$  und nach der vorhanden gedachten Schußtafel der

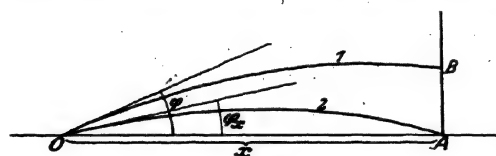


Abb. 51.

Abgangswinkel  $\varphi_x$ , der spitze Auffallwinkel  $\omega_x$  in  $A$ , die Endgeschwindigkeit  $v_{ex}$  in  $A$  und die Gesamtflugzeit  $T_w$  zugehört. Diese Flugbahn 2 hat die Gleichung

$$y = x \operatorname{tg} \varphi_x - \frac{f(x)}{\cos^2 \varphi_x},$$

woraus

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi_x - \frac{f'(x)}{\cos^2 \varphi_x}; \quad \frac{g}{(v \cos \vartheta)^2} = \frac{f''(x)}{\cos^2 \varphi_x}.$$

Wenn jedoch in diesen Gleichungen  $x$  speziell die Schußweite  $OA$  der Flugbahn 2 und zugleich die Abszisse  $OA$  des Punktes  $B$  der Flugbahn 1 bedeutet, so hat man

$$0 = x \operatorname{tg} \varphi_x - \frac{f(x)}{\cos^2 \varphi_x}, \quad (e)$$

$$\operatorname{tg} (-\omega_x) = \operatorname{tg} \varphi_x - \frac{f'(x)}{\cos^2 \varphi_x}, \quad (f)$$

$$\frac{g}{(v_{ex} \cos \omega_x)^2} = \frac{f''(x)}{\cos^2 \varphi_x}. \quad (g)$$

Durch Elimination von  $f(x)$  aus (b) und (e), von  $f'(x)$  aus (c) und (f), von  $f''(x)$  aus (d) und (g) erhält man der Reihe nach:

$$y = x \left( \operatorname{tg} \varphi - \frac{\cos^2 \varphi_x \cdot \operatorname{tg} \varphi_x}{\cos^2 \varphi} \right) = x \cdot \frac{\sin (2 \varphi) - \sin (2 \varphi_x)}{2 \cdot \cos^2 \varphi};$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\cos^2 \varphi_x \cdot \operatorname{tg} \varphi_x}{\cos^2 \varphi} - \frac{\cos^2 \varphi_x \cdot \operatorname{tg} \omega_x}{\cos^2 \varphi} = \frac{y}{x} - \frac{\operatorname{tg} \omega_x \cdot \cos^2 \varphi_x}{\cos^2 \varphi};$$

$$\frac{v \cos \vartheta}{v_{ex} \cdot \cos \omega_x} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_x}.$$

Endlich die Flugzeit  $t$  von  $O$  bis  $B$  ergibt sich aus

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v \cos \vartheta} = \frac{\cos \varphi_x}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{v_{ex} \cdot \cos \omega_x}.$$

Danach wird (näherungsweise) gesetzt:

$$t = T_x \cdot \frac{\cos \varphi_x}{\cos \varphi}.$$

Zusammenstellung:

$$y = x \cdot \left( \operatorname{tg} \varphi - \frac{\cos^2 \varphi_x \cdot \operatorname{tg} \varphi_x}{\cos^2 \varphi} \right) \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} - \frac{\operatorname{tg} \omega_x \cdot \cos^2 \varphi_x}{\cos^2 \varphi} \quad (26)$$

$$v \cos \vartheta = v_{ex} \cdot \cos \omega_x \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_x} \quad (27)$$

$$t = T_x \cdot \frac{\cos \varphi_x}{\cos \varphi}. \quad (28)$$

Die Gleichung (25) dient dazu, die Flughöhe (Sprenghöhe)  $AB$  oder  $y$  zu berechnen, wenn der Abgangswinkel  $\varphi$  gegeben ist. Nach  $\varphi$  aufgelöst lautet sie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sin (2 \varphi_x)} \cdot (1 - \sqrt{\cos^2 (2 \varphi_x) - 2 \cdot \operatorname{tg} E \cdot \sin (2 \varphi_x)}), \quad (29)$$

wobei  $\operatorname{tg} E = \frac{y}{x}$ , und gestattet dann, denjenigen Abgangswinkel  $\varphi$  zu berechnen, unter dem das gegebene Ziel  $B$  oder  $(xy)$  getroffen wird. Gleichung (26) liefert  $\vartheta$ , alsdann (27) die Geschwindigkeit  $v$  und (28) die Flugzeit  $t$ .

Sind die Abgangswinkel  $\varphi$  und  $\varphi_x$  wenig voneinander verschieden, so lassen sich diese Gleichungen (25) bis (28) näherungsweise durch die folgenden ersetzen  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_x$ ;  $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \omega_x$ ;  $v \cos \vartheta = v_{ex} \cdot \cos \omega_x$ ;  $t = T_x$ .

Da  $\frac{y}{x}$  der Tangens des Höhenwinkels  $BOA$  oder  $E$  ist, unter dem das Ziel von  $O$  aus gesehen wird ( $E$  Geländewinkel), so ist die erstere

dieser Gleichungen gleichbedeutend mit:  $\operatorname{tg} E = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_x$  oder bei kleinen Winkeln mit:  $E = \varphi - \varphi_x$  („Schwenken der Flugbahn“).

Die Gleichungen (25) bis (28) liefern, mindestens bis zu Abgangswinkeln  $\varphi$  von  $20^\circ$ , meistens brauchbare Näherungswerte.

5. Mit dem Restglied  $R$  in Integralform hat (vgl. § 28) zuerst E. Vallier 1886 in der Ballistik gerechnet.

Die betreffenden Gleichungen für  $y$ ,  $\vartheta$ ,  $v$  und  $t$  lauteten folgendermaßen:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} - g \int_{\xi=0}^{\xi=x} (x - \xi)^2 \cdot \left( \frac{cf(v)}{v^4 \cos^2 \vartheta} \right)_{\xi} \cdot d\xi \quad (30)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi} - 2g \int_{\xi=0}^{\xi=x} (x - \xi) \cdot \left( \frac{cf(v)}{v^4 \cos^2 \vartheta} \right)_{\xi} \cdot d\xi \quad (31)$$

$$v \cos \vartheta = v_0 \cos \varphi - \frac{cf(v_0)}{v_0} x + \frac{1}{2} \cdot \int_{\xi=0}^{\xi=x} \left( \frac{cf(v)}{v} \right)' \cdot \left( \frac{cf(v) + g \sin \vartheta}{v \cos \vartheta} \right)_{\xi} (x - \xi) \cdot d\xi \quad (32)$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi} + \int_{\xi=0}^{\xi=x} (x - \xi) \cdot \left( \frac{cf(v)}{v^3 \cos^2 \vartheta} \right)_{\xi} \cdot d\xi. \quad (33)$$

Abgesehen von der dritten Gleichung stellt hier das Integral je die Korrektur der Gleichungen des luftleeren Raumes für den luft erfüllten Raum dar.

Eine Anwendung Valliers bezieht sich auf eine Ableitung anderer Art für die Gleichungen von § 25 für Flachbahnen. Es sei das biquadratische Luftwiderstandsgesetz  $cf(v) = cv^4$  vorausgesetzt, und für  $\sec \vartheta$  sei ein konstanter Mittelwert  $\alpha$  (Didionscher Mittelwert) vor das Integral genommen. Damit wird Gleichung (30)

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} - gc\alpha^3 \cdot \int_{\xi=0}^{\xi=x} (x - \xi)^2 \cdot d\xi$$

oder

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \left( 1 + \frac{2}{3} c\alpha^3 v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot x \right)$$

wie in § 25.

Eine Anwendung zur Berechnung eines Ausdrucks für den Ausgleichsfaktor  $\beta$  war in § 28 besprochen worden.

## Siebenter Abschnitt.

### Zweite Hauptgruppe von Näherungslösungen des speziellen außerballistischen Problems:

### Streckenweise graphische Konstruktion oder stückweise numerische Berechnung einer Flugbahn.

Es sei die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und der Abgangswinkel  $\varphi$  für ein bestimmtes Geschöß von der Masse  $m = \frac{P}{g}$ , dem Kaliber  $2R$  und dem Formfaktor  $i$  gegeben; mittleres Luftgewicht  $\delta$ . Man will durch sukzessiven Aufbau der Flugbahn die ballistischen Elemente  $xyvt$  für die aufeinanderfolgenden Punkte der Bahn ermitteln, unter Zugrundelegung eines bestimmten Luftwiderstandsgesetzes. Hierfür wird am besten die neuere Luftwiderstandstabelle von O. v. Eberhard gewählt. Falls  $v_0 < 240$  m/sec, genügt es für manche Zwecke, nach Mayevski die Verzögerung durch den Luftwiderstand zu setzen gleich  $c \cdot f(v) = \frac{0,014 \cdot R^2 \pi \cdot \delta \cdot i \cdot g}{P \cdot 1,206} \cdot v^2$ ; Luftwiderstand  $W$  (kg)  $= m \cdot c \cdot f(v)$   

$$= \frac{0,014 \cdot R^2 \pi \cdot \delta \cdot i \cdot v^2}{1,206}$$

#### § 33. Das graphische Verfahren von Poncelet (1827) und Didion (1848).

Dieses Verfahren beruht auf der Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft. Es sei  $M_0$  der Abgangspunkt. Man denkt sich zunächst die Flugbahn in so kleine Teile  $M_0 M_1$ ,  $M_1 M_2$ ,  $M_2 M_3$  usw. zerlegt, daß jedes Bogenstück als geradlinig betrachtet werden kann; man faßt also die Flugbahn als ein Polygon mit geraden Seiten auf.

Der Luftwiderstand im Anfangspunkt  $M_0$  ist längs der Anfangstangente, also der Voraussetzung zufolge längs  $M_1 M_0$  gerichtet. In derselben Richtung wirkt außerdem die eine Komponente der Schwerkraft, die wir uns in der Richtung der Tangente und Normale in jedem Kurvenpunkt zerlegt denken. Also hat man längs der Tangente in  $M_0$  als Summe aus Luftwiderstand  $W$  und Tangentialkomponente  $N_0 P_0$  des Gewichts die Kraft  $T_0 = W(v_0) + P \cdot \sin \varphi$ ; diese Summe kann aus  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $P$ ,  $c$  berechnet werden. Nun ist längs der

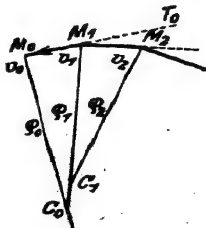


Abb. 52.



Tangente die Abnahme der lebendigen Kraft des Geschosses gleich der Arbeit der Kraft  $T_0$  auf dem sehr kleinen Weg  $M_0M_1$ ; die Kraft  $T_0$  sehen wir längs dieses Weges als konstant an und haben

$$\frac{1}{2}m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_1^2 = M_0M_1 \cdot T_0.$$

Hieraus läßt sich  $v_1$  berechnen; denn man kennt  $T_0$ ,  $v_0$  und die Geschossmasse  $m$  und kann  $M_0M_1$  (beliebig klein) wählen.

Dieser Bogen  $M_0M_1$  wird folgendermaßen beschrieben: Die Komponentensumme  $M_0N_0$  oder  $N_0$  entlang der Normalen  $M_0C_0$  gibt die Arbeit Null. Die Kraft  $N_0$  wird dazu verwendet, die Bahn zu krümmen; sie hat die Größe  $N_0 = m \cdot \frac{v_0^2}{\rho_0}$ . Daraus kennt man den Krümmungsradius  $M_0C_0$  oder  $\rho_0$  in  $M_0$ , damit den Schnittpunkt  $C_0$  der zwei aufeinanderfolgenden Normalen  $M_0C_0$  und  $M_1C_0$ ; um  $C_0$  beschreibt man danach einen sehr kurzen, also mit der Sekante  $M_0M_1$  nahezu zusammenfallenden Kreisbogen  $M_0M_1$  mit dem Radius  $M_0C_0$ . Damit ist man im Punkt  $M_1$  angelangt, wo man als neue Tangentenrichtung  $M_1M_2$  die Kreisbogen-tangente in  $M_1$  oder die Senkrechte zu  $M_1C_0$  hat. So fährt man fort.

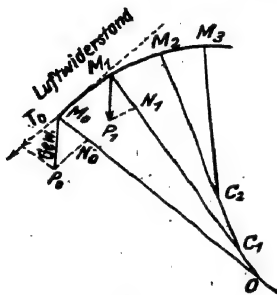


Abb. 53.

Nachdem der Gipfel überschritten ist, werden natürlich die zwei Kräfte: Luftwiderstand und tangentielle Schwerkraftskomponente einander entgegengesetzt gerichtet sein, weshalb man bei Berechnung von  $T$  auf das Vorzeichen zu achten hat.

Endlich die Flugzeit ermittelt man folgendermaßen:

Zum Zurücklegen des Bogens  $M_0M_1$  brauche das Geschosß die sehr kleine Zeit  $t$ ; längs  $M_0M_1$  sehen wir die Kraft  $T_0$  als konstant an diese ist also gleich bewegter Masse  $m$  des Geschosses multipliziert mit dem Verhältnis der Geschwindigkeitsabnahme  $v_0 - v_1$  zur Zeit  $t$ , in welcher letztere erfolgt, also  $T_0 = m \cdot \frac{v_0 - v_1}{t}$ , hieraus wird  $t = \frac{m v_0 - m v_1}{T_0}$ ,

oder da  $m v_0^2 - m v_1^2 = 2 M_0M_1 \cdot T_0$ , so ist  $t = \frac{M_0M_1}{\frac{v_0 + v_1}{2}}$ , ein Ergebnis,

das man auch daraus ableiten kann, daß der Weg  $M_0M_1$ , welcher tatsächlich mit abnehmender Geschwindigkeit vom Geschosß beschrieben wird, auch mit einer konstanten Geschwindigkeit beschrieben gedacht werden kann, welche gleich ist dem arithmetischen Mittel aus den beiden Endgeschwindigkeiten  $v_0$  und  $v_1$  in  $M_0$  und  $M_1$ .

Die ganze Flugzeit ist dann die Summe aller dieser Zeiteilchen  $t$ . Auch der Gipfel, der Punkt kleinster Geschwindigkeit und

der Punkt des kleinsten Krümmungshalbmessers lassen sich mit dieser Methode graphisch bestimmen.

Bei sehr flachen Bahnen wird der Krümmungsradius  $\varrho_0$ ,  $\varrho_1$  usw. sehr groß, so daß die Punkte  $C_0 C_1 \dots$  über das Zeichnungsblatt hinausfallen würden. In diesem Fall schlägt Didion vor, die Bögen  $M_0 M_1$ ,  $M_1 M_2$  usw. als Kreisbögen oder auch Parabelbögen zu berechnen. Bei ersterer Annahme z. B. habe man,  $M_0 T_0$  als Abszissenachse und die Richtung von  $M_0 C_0$  als Ordinatenachse betrachtet,  $(xy)$  als Koordinaten von  $M_1$ ; so ist  $x^2 + y^2 - 2\varrho_0 \cdot y = 0$ , woraus  $\varrho_0$  bzw.  $y$  folgt; das Nähere s. bei Didion.

### § 34. Graphisches Verfahren von C. Cranz und R. Rothe mit den Modifikationen von C. Veithen und L. Gumbel.

1. Wie C. Cranz und R. Rothe (vgl. Lit.-Note) gezeigt haben, läßt sich das außerballistische Hauptproblem für ein beliebig gegebenes Luftwiderstandsgesetz — nämlich auch dann, wenn dieses Gesetz nur in Tabellen- oder Kurvenform vorliegt —, sogar bei beliebig mit der Höhe veränderlichem ballistischem Koeffizienten und ohne Verwendung von Mittelwerten, — auf graphischem Wege vollständig lösen, und zwar mit einer Genauigkeit, die theoretisch unbegrenzt, praktisch nur durch die Fehler des Zeichenmaterials beschränkt ist und gewiß die Genauigkeit ballistischer Messungen übersteigt. Dazu wurde das Verfahren der graphischen Integration von Differentialgleichungen durch aufeinanderfolgende Näherungen benutzt, wie es von C. Runge (s. Lit.-Note) angegeben worden ist. Die Bedeutung dieses Verfahrens besteht hauptsächlich darin, daß es konvergent ist, d. h. man kann aus irgendeiner ersten Näherungslösung eine zweite, daraus eine dritte usw. gewinnen, von denen sich jede folgende mit immer größerer Genauigkeit der gesuchten wirklichen Lösung des Problems annähert. Hierin ist das Verfahren offenbar allen übrigen Lösungsversuchen des ballistischen Problems, auch den rechnerischen, überlegen.

Es sollen zwei verschiedene Weisen kurz beschrieben werden. Bei der einen wird die erste Näherungslösung möglichst genau konstruiert und erst danach durch aufeinanderfolgende Näherungen verbessert. Sie mag auf die ballistische Hauptgleichung mit konstantem ballistischem Koeffizienten  $c$  angewendet werden. Bei der anderen wird die Näherungslösung schrittweise konstruiert und zugleich verbessert. Sie soll an dem verallgemeinerten ballistischen Problem für den Fall eines mit der Höhe veränderlichen ballistischen Faktors  $c = c(y)$  auseinandergesetzt werden.

2. Erstes Verfahren. Es handle sich um die Integration der ballistischen Hauptgleichung

$$gd(v \cos \vartheta) = cf(v)vd\vartheta \quad (1)$$

unter der Annahme eines konstanten Wertes von  $c$ ; die Anfangsbedingung sei gegeben, d. h. für  $\vartheta = \vartheta_0$  (Abgangswinkel) soll  $v = v_0$  (Anfangsgeschwindigkeit) sein. Man wird zunächst versuchen, die Hauptgleichung auf eine solche Form zu bringen, daß die Herstellung der Zeichnung möglichst erleichtert wird. Wenn man z. B. die Veränderlichen

$$u = \ln v, \quad z = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right),$$

also 
$$du = \frac{dv}{v}, \quad dz = \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}$$

einführt und  $\frac{c}{g}f(e^u) = F(u)$  setzt, so nimmt die Hauptgleichung die Form

$$\frac{du}{dz} = \operatorname{tg} z + F(u) \quad (2)$$

an, die die zeichnerische Behandlung ungemein vereinfacht. Um eine möglichst gute Näherungslösung dieser Differentialgleichung zu erhalten, zeichnet man zunächst im Koordinatensystem mit der Abszissenachse  $z$  und der Ordinatenachse  $u$  eine genügend dichte Schar von Isoklinen, das sind Kurven

$$\operatorname{tg} z + F(u) = \text{konst.},$$

was eben bei der Form (2) der Differentialgleichung leicht ausführbar ist. Die Werte von  $F(u)$  sind durch die Luftwiderstandstabelle oder -kurve zu jedem  $u = \ln v$  gegeben; die Werte von  $\operatorname{tg} z$  entnimmt man aus einer Tabelle der Hyperbelfunktionen (z. B. W. Ligowski, Berlin 1890.

Verlag von Ernst & Korn; oder Funktionentafeln von Jahnke und Emde, Leipzig 1909, Verlag von B. G. Teubner). Zu jedem Wert  $C_0, C_1, C_2, \dots$  der Konstanten, als zu jeder Isokline, gehört eine bestimmte Tangentenrichtung der Integralkurve. Zu  $C_0$  gehöre die Isokline, die durch den Anfangspunkt  $A_0$  mit den Koordinaten

$$z_0 = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_0}{2} \right), \quad u_0 = \ln v_0$$

geht. Von diesem Punkte beginnend konstruiert man nun ein Tangentenpolygon der Integralkurve folgendermaßen (Abb. 54a). Durch

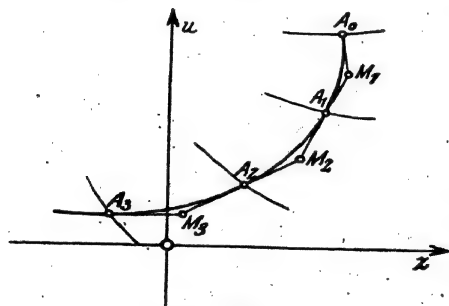


Abb. 54a.

$A_0$  zieht man die zu  $C_0$  gehörige Tangentenrichtung bis zu einem Punkte  $M_1$ , der etwa mitten zwischen der Isokline  $C_0$  und der nächsten  $C_1$  gelegen ist; in  $M_1$  setzt man die zur Isokline  $C_1$  gehörige Tangentenrichtung an bis zu einem Punkte  $M_2$ , etwa in der Mitte zwischen den Isoklinen  $C_1$  und  $C_2$ , und so fort. Die Schnittpunkte  $A_1, A_2, \dots$  dieser Tangenten mit den zugehörigen Isoklinen sind die Berührungspunkte mit der gesuchten Kurve, die in erster, bei sorgfältiger Ausführung übrigens schon recht guter Annäherung die Lösung der Differentialgleichung darstellt und sich aus diesen Punkten und den zugehörigen Tangenten leicht und genau zeichnen ließe. Doch ist das für die nun folgende Verbesserung nicht nötig, vielmehr genügt das Tangentenpolygon.

3. Um diese erste Näherungslösung zu verbessern, wendet man nun das Verfahren der aufeinanderfolgenden Näherungen durch Quadraturen (d. h. gewöhnliche Integration) an. Dazu werden die aus der Zeichnung entnommenen Koordinatenwerte der Punkte  $A_0, A_1, A_2, \dots$  in die rechte Seite der Differentialgleichung eingesetzt, wodurch sich die zugehörigen Werte der Ableitung  $\frac{du}{dz}$  ergeben. Diese werden als Ordinaten zu den Abszissen  $z$  aufgetragen und ihre Endpunkte mit Hilfe eines Kurvenlineals zu einer glatten Kurve verbunden. Wird nun diese Kurve mit einem Integrappen oder auch nach dem im nächsten Abschnitt beschriebenen graphischen Verfahren so integriert, daß die entstehende Integralkurve durch den Punkt  $A_0$  geht, so entsteht, wie sich beweisen läßt, eine zweite, bessere Lösung der Differentialgleichung (Beweis bei Runge). Dies äußert sich in der Zeichnung dadurch, daß beide Kurven, die im Anfangspunkte und in der Anfangsrichtung übereinstimmen, erst allmählich voneinander abweichen, je weiter sie sich vom Punkte  $A_0$  entfernen. Die fortgesetzte Wiederholung der Konstruktion liefert immer bessere Näherungslösungen, die sich mehr und mehr aneinanderanschmiegen. Soweit sich zwei aufeinanderfolgende Näherungskurven innerhalb der Zeichengenauigkeit überdecken, stellen sie mit dieser Genauigkeit die gesuchte Lösung dar, und man hat die Fortsetzung des Verfahrens nur auf die Teile zu erstrecken, in denen eine solche Übereinstimmung noch nicht erreicht ist. Wenn schließlich für den ganzen Bereich, für den man die Lösung zu kennen wünscht, eine abermalige Anwendung des Verfahrens keine merkliche Verbesserung mehr herbeiführt, so ist die Hauptgleichung fertig integriert. Bringt man auf der  $z$ -Achse eine Teilung für  $\vartheta$ , auf der  $u$ -Achse eine solche für  $v$  an, so kann man aus der Zeichnung, die am besten auf Gitterpapier ausgeführt wird, ohne weitere Rechnung die zusammengehörigen Werte von  $v$  und  $\vartheta$  entnehmen.

4. Graphische Integration. An Stelle des Integraphen, der bekanntlich zu einer Kurve  $y = f(x)$  im Koordinatensystem  $xy$  die Integralkurve

$$Y = \int_{x_0}^x f(x) dx + Y_0$$

zeichnet, die durch den beliebig wählbaren Anfangspunkt  $A_0 = (x_0, y_0)$  geht, kann man oft mit Vorteil und mit etwa gleicher Genauigkeit das folgende rein graphische Verfahren anwenden.

Wenn zunächst die zur Abszissenachse parallele Gerade  $f(x) = a$  integriert wird, entsteht die Gerade  $Y = ax + \text{konst.}$ , wobei die Konstante durch die Angabe irgendeines Punktes bestimmt ist, durch

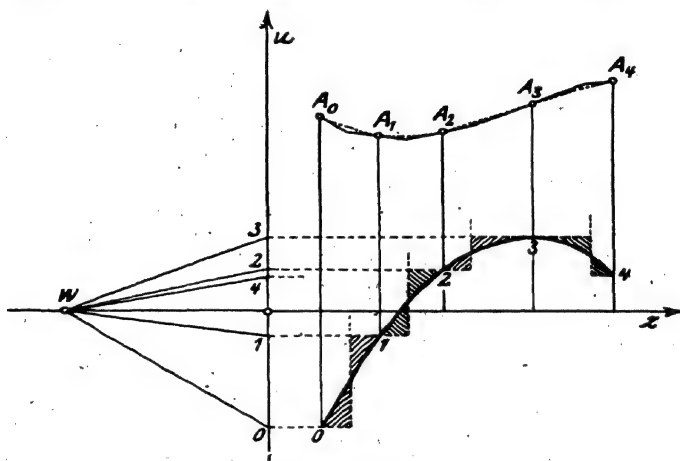


Abb. 54b.

den diese Gerade hindurchgehen soll. Um nun das Integral einer beliebigen Kurve zu finden, denke man sie sich angenähert durch eine geeignete Treppenkurve mit wagrechten Stufen ersetzt (Abb. 54b), und diese Treppe Stufe für Stufe integriert, wie vorher angegeben. Es entsteht ein leicht zu zeichnender Polygonzug, der im gegebenen Punkte  $A_0$  beginnt. Jene Treppe ist am besten in folgender Weise anzuordnen. Sie verläuft teils unterhalb, teils oberhalb der Kurve; man kann es so einrichten — Abschätzung nach dem Augenmaß genügt meistens —, daß für jeden Absatz der Flächeninhalt des unterhalb der Kurve verlaufenden Teiles der Stufe gleich dem Flächeninhalt des oberhalb verlaufenden Teiles der nächsten Stufe ist, wie in der Abbildung in den schraffierten Teilen angedeutet. Dann nämlich stimmen an den Schnittpunkten der gegebenen Kurve mit der Treppe

die Werte des Integrales und des Polygonzuges überein; durch eine leichte Überlegung schließt man, daß die Seiten des Polygonzuges Tangenten der Integralkurve sind, und daß die Berührungspunkte  $A_0, A_1, A_2, \dots$  dieselben Abszissen wie die Schnittpunkte von Kurve und Treppe haben. Zur bequemen Zeichnung des Tangentenpolygons nimmt man auf der Abszissenachse einen Punkt  $W$  im Abstände 1 von der Ordinatenachse oder von einer anderen dazu parallelen Geraden, auf die man horizontal die Schnittpunkte von Kurve und Treppe projiziert; die von  $W$  nach den Projektionspunkten hingehenden Strahlen geben die Richtungen an, denen die entsprechenden Seiten des Tangentenpolygons parallel laufen müssen.

5. Beispiel 1. Für die Luftwiderstandsfunktionen werde die in § 10 angegebene empirische Tabelle für Kruppsche Normalgeschosse zugrunde gelegt. Luftgewicht konstant gleich 1,22 kg/cbm Geschosßquerschnitt  $\pi R^2 = 50 \text{ cm}^2$ ; Geschosßgewicht  $P = 10 \text{ kg}$ ;  $v_0 = 600 \text{ m/sec}$ ;  $\vartheta_0 = 30^\circ$ . Danach ergibt sich  $u_0 = \ln 600 = 6,3969$ ;  $z_0 = \ln \lg 60^\circ = 0,5495$ . Ferner  $c = 0,5 \cdot g \cdot 10^{-6}$ . Daher  $F(u) = 0,5 v^2 \cdot 10^{-6} \cdot K(v)$ , wofür eine Tabelle mittels der Werte in § 10 leicht zu berechnen ist. In der Zeichnung (Einheit der  $z$ -Achse und der  $u$ -Achse 50 cm) wurden für die Konstantenwerte  $C = 6,90; 5,90; 4,90; 3,90; 2,90; 2,00; 1,00; 0,50; 0,30; 0,00; -0,30; -0,50$  die zugehörigen Isoklinen durch einzelne Punkte (je etwa drei bis vier) ermittelt. Es ist klar, daß man von diesen Kurven nur kurze Stücke in der Nähe der zu erwartenden Schnittpunkte mit der Integralkurve zu zeichnen braucht. Die Konstruktion des Tangentenpolygons ergab die Werte  $u_1$  der Tabelle; eine einmalige Verbesserung nach dem vorher beschriebenen

$z = 0,542$	0,508	0,444	0,316	-0,057	-0,820
$u_1 = 6,350$	6,154	5,914	5,703	5,486	5,506
$u_2 = 6,350$	6,154	5,914	5,702	5,482	5,514

Verfahren, wobei ein Integralkurve nach Abdank-Abakanowicz benutzt wurde, lieferte die Werte  $u_2$ , und diese Verbesserung genügte fast, denn eine Wiederholung des Verfahrens ergab nur eine Abweichung von höchstens 0,05%.

$z$	$\vartheta$	$v$	$z$	$\vartheta$	$v$
0,5494	30° 0'	600 m/sec	0,00	0° 0'	245,2 m/sec
0,50	27° 31'	452,6	-0,10	-5° 43'	237,5
0,45	24° 57'	376,9	-0,20	-11° 23'	233,2
0,40	22° 20'	335	-0,30	-16° 56'	231,7
0,30	16° 56'	295,6	-0,50	-27° 31'	233,7
0,20	11° 23'	272,6	-0,86	-44° 8'	251,9
0,10	5° 43'	256			

Die endgültigen Werte von  $v$  enthält die vorstehende Tabelle.

Vgl. hierzu Beispiel 3.

Beispiel 2. Zur Kontrolle und Beurteilung der Genauigkeit des Verfahrens wurde eine nach einem quadratischen Luftwiderstandsgesetz hergestellte Tabelle zugrunde gelegt. Luftgewicht  $1,206 \text{ kg/cbm}$  konstant. Geschloßquerschnitt  $50 \text{ cm}^2$ ;  $P = 10 \text{ kg}$ ; Formfaktor  $i = \frac{4}{3}$ , von der Geschwindigkeit unabhängig;  $v_0 = 500 \text{ m/sec}$ ;  $\vartheta_0 = 45^\circ$ . Mithin  $c = 2g \cdot 10^{-5}$ . Anfangswerte:  $z = \ln \lg 67,5^\circ = 0,8814$ ;  $u_0 = \ln 500 = 6,21461$ . Es wurden die Isoklinen für die Konstantenwerte  $C = 5,0; 4,0; 3,0; 2,0; 1,5; 1,0; 0,5; 0,3; 0,1, 0,0; -0,1$  gezeichnet. Maßstabeinheit der  $z$ - und  $u$ -Achse  $50 \text{ cm}$ . Die zweimalige Verbesserung der ersten Näherungskurve mit dem Integrappen ergab merklich dieselbe Kurve wie die erste Verbesserung. Daraus zu den Abszissen  $z$  entnommene Werte von  $u$  in der Spalte 1 der Tabelle.

$z$	$\vartheta$	1	2	3	$v$
0,8844	$45^\circ$	6,21461	6,21461	0	500 m/sec
0,768	$40^\circ$	5,766	5,765	0,001	319,0
0,653	$35^\circ$	5,524	5,523	0,001	250,5
0,451	$25^\circ$	5,233	5,234	-0,001	187,6
0,265	$15^\circ$	5,062	5,061	0,001	157,8
0,087 <sub>6</sub>	$5^\circ$	4,953	4,951 <sub>6</sub>	0,001 <sub>6</sub>	141,4
0	$0^\circ$	4,918	4,914	0,004	136,2
-0,087 <sub>6</sub>	$-5^\circ$	4,889 <sub>6</sub>	4,886	0,003 <sub>6</sub>	132,5
-0,265	$-15^\circ$	4,862	4,857	0,005	128,7
-0,451	$-25^\circ$	4,867	4,859	0,008	128,9

Die graphisch gefundenen Werte erlauben hier eine rechnerische Kontrolle; vgl. die Formelzusammenstellung in § 18. Unter Benutzung der  $\xi$ -Tafeln (Tabelle 8b, im Anhang) wurden die in Spalte 2 der Tabelle angegebenen Werte von  $u$  berechnet. Die Unterschiede zwischen den graphisch und rechnerisch gefundenen Werten von  $u$  (Spalte 3) betragen höchstens  $0,8\%$ , d. i.  $1,03 \text{ m/sec}$  der Endgeschwindigkeit von  $v = 129 \text{ m/sec}$ . Dieser Fehler liegt gewiß innerhalb der Meßgenauigkeit einer solchen Geschwindigkeit.

6. Zweites Verfahren. Es handle sich jetzt um die Lösung des ballistischen Problems in dem allgemeineren Falle  $c = c(y)$ . Dann kann das Problem streng genommen nicht mehr in der üblichen Weise — zuerst Integration der Hauptgleichung, danach Bestimmung von  $x, y, t$  durch Quadraturen — behandelt werden. Vielmehr tritt jetzt zu der bisherigen Hauptgleichung (1), worin aber  $c = c(y)$  gesetzt worden ist, noch die Gleichung

$$g dy = -v^2 \lg \vartheta d\vartheta \quad (3)$$

hinzu. Man könnte daran denken,  $y$  zu eliminieren; aber wir ziehen vor, die Gleichungen (1) und (3) als ein System von zwei gleichzeitigen Differentialgleichungen erster Ordnung der beiden

unbekannten Funktionen  $v(\vartheta)$  und  $y(\vartheta)$  aufzufassen. Benutzt man wieder die Variablen  $z$  und  $u$ , so nimmt dieses System die einfachere Form an

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \mathfrak{T}_g z + \frac{c(y)}{c(0)} F(u) \\ \frac{dy}{dz} &= -\frac{1}{g} e^{2u} \mathfrak{T}_g z, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

worin  $\frac{c(0)}{g} f(e^u) = F(u)$  gesetzt wurde. Die Funktion  $c(y)$  ist dem Luftgewicht  $\delta_y$  proportional, und dieses hängt von der Höhe in bekannter Weise ab (vgl. § 15); meist wird es genügen, eine lineare Abhängigkeit  $\delta_y = \delta(1 + \alpha y)$  mit etwa  $\alpha = -0,00011$  nach Charbonnier anzunehmen; man kann aber auch eine tabellarische Abhängigkeit, etwa die Schubertschen oder die Wienerschen Tabellen (Band III) zugrunde legen.

Die Anfangswerte sind hier  $z_0 = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_0}{2} \right)$ ,  $u_0 = \ln v_0$ ,  $y_0 = 0$ . Die Aufgabe ist, über der gemeinsamen  $z$ -Achse die beiden Integralkurven zu zeichnen, deren Ordinaten  $u$  und  $y$  die vorstehenden Differentialgleichungen befriedigen und durch die Anfangspunkte  $A_0 = (z_0, u_0)$  und  $B_0 = (z_0, 0)$  hindurchgehen. Man bestimmt zunächst die Anfangsbogen dieser Kurven näherungsweise genau genug auf folgende Art: Durch Einsetzen der Anfangswerte in die rechten Seiten der Differentialgleichungen sind  $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ ,  $\left(\frac{dy}{dz}\right)_0$  und damit die Anfangstangenten bekannt. Man zieht sie und nimmt auf ihnen in mäßiger Entfernung von  $A_0$  und  $B_0$  zwei Punkte  $A_1 = (z_1, u_1)$ ,  $B_1 = (z_1, y_1)$  an. Durch Einsetzen ihrer Koordinaten in die rechten Seiten der Differentialgleichungen sind  $\left(\frac{du}{dz}\right)_1$ ,  $\left(\frac{dy}{dz}\right)_1$  und damit die zugehörigen Tangentenrichtungen bekannt. Man setzt diese aber nicht in  $A_1$ ,  $B_1$ , sondern besser in Punkten  $P_1$ ,  $Q_1$  an, die etwa mitten auf  $A_0 A_1$ ,  $B_0 B_1$  gelegen sind (Abb. 54c). Auf ihnen nimmt man in

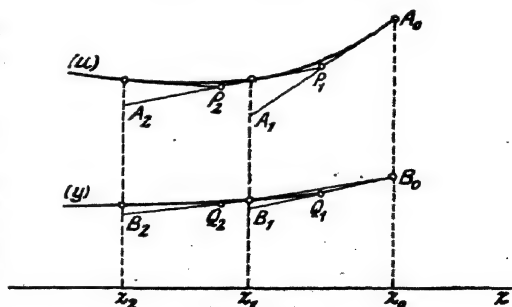


Abb. 54c.

mäßiger Entfernung von  $P_1$ ,  $Q_1$  zwei Punkte  $A_2 = (z_2, u_2)$ ,  $B_2 = (z_2, y_2)$  an und wiederholt das Verfahren zwei oder drei Male. So erhält man zwei von  $A_0$  und  $B_0$  ausgehende Tangentenpolygone für die gesuchten Kurvenanfänge; die Berührungspunkte sind leicht zu fin-



den, da sie die Abszissen  $z_0, z_1, z_2, \dots$  haben. Danach sind die Kurvenanfänge zu zeichnen. Man könnte durch Fortsetzung des Verfahrens die Näherungskurven für  $u$  und  $y$  in ihren ganzen gewünschten Ausdehnungen konstruieren, aber es ist vorteilhafter, die Anfangsbogen erst nach dem Verfahren der aufeinander folgenden Näherungen zu verbessern.

Dies geschieht wie vorher, indem man die berechneten Werte  $\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \left(\frac{du}{dz}\right)_1, \dots$  und  $\left(\frac{dy}{dz}\right)_0, \left(\frac{dy}{dz}\right)_1, \dots$  als Ordinaten zu den Abszissen  $z_0, z_1, \dots$  aufträgt und die hindurchgelegten Kurven integriert, hier am besten graphisch nach dem oben angegebenen Verfahren, da die Benutzung des Integraphen wegen der notwendigen wiederholten Neueinstellungen zu umständlich und daher weniger genau wäre. Erst wenn die Anfänge der  $u$ - und der  $y$ -Kurve nicht mehr verbesserungsfähig sind, extrapoliert man sie einfach um ein Stück nach dem Augenmaß, betrachtet dieses Stück als erste Annäherung und verbessert es wieder soweit als möglich. So fährt man fort, bis der ganze Bereich von  $z$ , für den man die Lösung zu kennen wünscht, durchlaufen ist.

7. Beispiel 3. Die Angaben der Aufgabe seien dieselben wie beim Beispiel 1, jedoch soll das Luftgewicht mit der Erhebung  $y$  des Geschosses veränderlich sein:  $\delta_y = 1,22 (1 - 0,00011 y)$ . Setzt man  $1 - 0,00011 y = \varepsilon$ , ferner  $0,00011 : g = 0,0000112 = k$ , so lauten jetzt die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dz} &= \mathfrak{T}g z + \varepsilon F(u) \\ \frac{d\varepsilon}{dz} &= k e^{2u} \mathfrak{T}g z.\end{aligned}\tag{5}$$

In der Zeichnung waren die Einheiten der Maßstäbe folgendermaßen gewählt: für  $z$  40 cm, für  $u$  und  $\varepsilon$  20 cm, für  $\frac{du}{dz}$  und  $\frac{d\varepsilon}{dz}$  5 cm. Jeder der Werte  $u, \varepsilon$  (s. die Tabelle S. 217) ist durch drei bis vier Verbesserungen erhalten worden. Die einzelnen Schritte, in denen die Kurven konstruiert wurden, sind an den Werten von  $z$  kenntlich. In der Tabelle sind zum Vergleich in Spalte 4 und 6 auch die, hier mit  $\bar{u}$  und  $\bar{\varepsilon}$  bezeichneten Werte aus Beispiel 1 aufgeführt. In beiden Fällen nimmt die Bahngeschwindigkeit, vom Anfangswerte beginnend, zunächst ab, erreicht einen kleinsten Wert hinter dem Gipfel der Flugbahn, um sodann wieder zu steigen. Während im Falle eines konstanten ballistischen Koeffizienten nur ein Minimum der Bahngeschwindigkeit, aber kein Maximum auftritt, ist dies beim verallgemeinerten Problem  $c = c(y)$  nicht der Fall. Der Unterschied der

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$z$	$\phi$	$\psi$	$\bar{w}$	$v$ m/sec	$\bar{v}$ m/sec	Diff.	$\epsilon$	$x$ m	$\bar{x}$ m	Diff.	$y$ m	$\bar{y}$ m	Diff.
0,494	30°	6,8969	6,8969	600	600	0	1,000	0	0	0	0	0	0
0,50	27° 31'	6,131	6,115	459,9	452,6	7,3	0,929	1220	1180	40	645	650	(-5)
0,45	24° 57'	5,950 <sub>6</sub>	5,932	388,8	378,9	6,9	0,885	2020	1935	85	1045	1030	+15
0,40	22° 20'	5,835	5,814	342,7	335	7,7	0,852 <sub>6</sub>	2630	2520	110	1340	1280	60
0,30	16° 56'	5,709	5,689	301,6	295,6	6,0	0,813	3625	3465	160	1700	1625	75
0,20	11° 28'	5,635	5,608	280,1	272,6	7,5	0,790	4465	4270	195	1910	1830	80
0,10	5° 43'	5,582	5,545	265,6	258	9,6	0,779	5210	4965	245	2010	1935	75
0,00	0° 0'	5,542 <sub>6</sub>	5,502	255,4	245,2	10,2	0,774 <sub>6</sub>	5905	5600	305	2050	1965	85
-0,10	- 5° 43'	5,515	5,470	248,3	237,5	10,8	0,778	6555	6190	365	2020	1935	85
-0,20	- 11° 28'	5,499 <sub>6</sub>	5,452	244,5	233,2	11,3	0,789	7165	6755	410	1920	1845	75
-0,30	- 16° 56'	5,494	5,445 <sub>6</sub>	243,2	231,7	11,5	0,805	7750	7280	470	1770	1715	55
-0,50	- 27° 31'	5,507 <sub>6</sub>	5,454	246,3	233,7	12,6	0,855 <sub>6</sub>	8860	8300	560	1310	1290	+20
-0,70	- 37° 11'	5,542 <sub>6</sub>	5,487	255,2	241,5	13,7	0,934	9930	9280	670	610	670	-60
-0,86	- 44° 8'	5,578	5,529	264,5	251,9	12,6	1,015	10770	10020	750	-120	15	-135

Geschwindigkeiten  $v$  und  $\bar{v}$  (Spalte 7) erreicht einen Höchstwert nicht weit vor dem Auftreffen des Geschosses auf den Mündungshorizont. Bezüglich der Bestimmung dieser ausgezeichneten Werte und weiterer Einzelheiten sei auf die Abhandlung von C. Cranz und R. Rothe verwiesen.

Will man die Flugbahn selbst konstruieren, so hat man  $x$  und  $y$  zu bestimmen. Nach Einführung von  $z$  als Veränderlicher geschieht dies durch die Formeln

$$x = - \int_{z_0}^z \frac{v^2}{g \cos z} dz, \quad y = - \int_{z_0}^z \frac{v^2}{g} \operatorname{Tg} z dz.$$

Im Falle des konstanten ballistischen Koeffizienten hat man beide Integrale zu bestimmen, mit dem Integrappen oder auch nach dem graphischen Integrationsverfahren. Im allgemeineren Falle  $c = c(y)$  wird  $y$  aber schon durch die Integration des Systems der beiden Differentialgleichungen bestimmt, bei dem Beispiel 3 insbesondere durch  $y = (1 - \epsilon):0,00011$ . In der Tabelle sind die so gefundenen Werte  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  entsprechen wieder dem Beispiel 1 — eingetragen. Die Schußweite ist um 600 m größer, wenn die Abnahme der Luftdichte mit der Höhe berücksichtigt wird.

8. Bemerkungen. Nachdem einmal nachgewiesen ist, daß die Genauigkeit der graphischen Integration nach dem Verfahren der aufeinanderfolgenden Näherungen ausreichend ist, würde eine weitere Aufgabe sein, zu untersuchen, ob und in welcher Weise sich die graphische Integrationsmethode für praktische Zwecke nutzen ließe. Die im vorstehenden benutzte Form der Differentialgleichungen (mit Einführung der Variablen  $z$  und  $u$ ) stellt keineswegs den allein möglichen Weg dar, und auch die Integrationsverfahren selbst sind mannigfaltiger Abänderungen fähig. Geeignete Vordrucke von Isoklinen und Skalen sowie die Benutzung von Nomogrammen können wegen der Zeitersparnis selbst auf Kosten der Genauigkeit von Vorteil sein. — Bei der Deutung der Ergebnisse im Falle des verallgemeinerten ballistischen Problems, unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Luftgewichtes mit der Höhe, wird man zu beachten haben, daß mehrere von den in § 20 erwähnten allgemeinen Eigenschaften der Flugbahn alsdann nicht mehr Gültigkeit haben. Das gilt um so mehr, wenn auch die sehr geringfügige Änderung der Schwere mit der Höhe in Frage kommt, für welchen Fall übrigens das graphische Verfahren ebenfalls anwendbar ist.

Anmerkungen. 1. Das geschilderte graphische Verfahren von C. Cranz und R. Rothe hat C. Veithen (vgl. Lit.-Note) in folgender Weise modifiziert:

Er geht aus von der Hauptgleichung (3) in § 17, also von  $d(v \cos \vartheta) g = c \cdot v f(v) \cdot d\vartheta$ , die sich mit den Substitutionen  $\xi = v \cos \vartheta$ ;  $vf(v) = \Phi(v)$  schreiben läßt:

$$\frac{d\xi}{d\vartheta} = \frac{c}{g} \cdot \Phi\left(\frac{\xi}{\cos \vartheta}\right).$$

Das System der Isoklinen wird durch die Kurven  $\xi = \cos \vartheta \cdot \text{konst.}$ , also  $v = \text{konst.}$  gebildet. Da diese Isoklinen von  $c$  unabhängig sind, können sie, und darin liegt der Hauptvorteil des Verfahrens, ein für allemal vorgedruckt werden.

In dieser Weise führt C. Veithen die graphische Lösung analog durch, wobei er darauf aufmerksam macht, daß noch weitere Vordrucke möglich sind. Wenn  $c$  nicht als konstant, sondern als eine Funktion von  $y$  betrachtet wird,  $c = c_0 \cdot c(y)$ , so hat man die drei Gleichungen

$$\frac{d\xi}{d\vartheta} = \frac{c_0}{g} \cdot c(y) \cdot \Phi(v); \quad \frac{dy}{d\vartheta} = -\frac{1}{g} v^2 \operatorname{tg} \vartheta; \quad \xi = v \cos \vartheta,$$

die mit Hilfe von Nomogrammen für sich graphisch integriert werden. Im übrigen sei auf die Veithensche Arbeit selbst und die darin durchgeführten Beispiele hingewiesen.

2. L. Gümbel (s. Lit.-Note) will das Cranz-Rothsche Verfahren in anderer Weise modifizieren:

Er geht aus von den zwei Differentialgleichungen der Geschößbewegung in Richtung der Tangente und senkrecht dazu, also von

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \vartheta - cf(v) \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{g \cos \vartheta}{v^2}$$

und richtet vier Koordinatensysteme ein:

$$\text{a) } y \text{ über } x, \quad \text{b) } v \text{ über } t, \quad \text{c) } \frac{dv}{dt} \text{ über } t, \quad \text{d) } \frac{d\vartheta}{ds} \text{ über } s.$$

Die näheren Einzelheiten sind aus der Arbeit selbst zu ersehen, auf die hingewiesen wird.

3. Bei diesem Anlaß möge noch erwähnt werden der ballistische Integrator von Jacob, der zur mechanischen Integration der Hauptgleichung bestimmt ist. (Übrigens ist der Apparat offenbar derartig umfangreich und kostspielig, daß eine allgemeine Verwendung in der Praxis vorläufig nicht wahrscheinlich scheint.)

## § 35. Die graphischen Lösungsmethoden von Th. Vahlen (1918) und von E. A. Brauer (1918).

1. Th. Vahlen baut eine Flugbahn in folgender Weise graphisch auf. Das Geschöß befinde sich jetzt, im Anfang der ersten Sekunde, in  $P_0$  (s. Abb. 55);  $P_0 Q_0$  sei die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  nach Größe und Richtung. Aus dem betr. Luftwiderstandsgesetz berechnet man die Verzögerung  $cf(v)$  in 1 Sekunde und trägt diese als  $Q_0 R$  von  $Q_0$  aus rückwärts auf. Von  $R$  aus geht man um die Schwerebeschleunigung  $g$  in 1 Sekunde vertikal abwärts bis  $S$ . Dann ist  $P_0 S$  die Geschwindigkeit  $v_1$  zu Anfang der zweiten Sekunde nach Größe und Richtung. Indem man nun annimmt, daß sich das Geschöß in der ersten Sekunde mit der mittleren Geschwindigkeit

$\frac{1}{2}(v_0 + v_1)$  bewegt hat, befindet sich das Geschöß am Schluß der ersten Sekunde in  $P_1$ , der Mitte von  $Q_0 S$ . Und indem die Flugbahn aus einzelnen Parabelbögen konstruiert gedacht wird, ist  $LP_1$  die Richtung der neuen Tangente, dabei  $L$  die Mitte von  $P_0 Q_0$ . Trägt man also auf der Verlängerung der Geraden  $LP_1$  von  $P_1$  aus eine Strecke  $P_1 Q_1$  gleich  $P_0 S$  auf, so hat man für den Anfang der zweiten Sekunde die Lage  $P_1$  des Geschosses und die Geschwindigkeit  $v_1$  nach Größe und Richtung. So fährt man fort; der Punkt  $Q_1$  spielt jetzt für die zweite Sekunde dieselbe Rolle, wie vorher  $Q_0$  für die erste Sekunde. Je nachdem wird statt 1 sec ein kleineres Zeitintervall  $\Delta t$  gewählt.

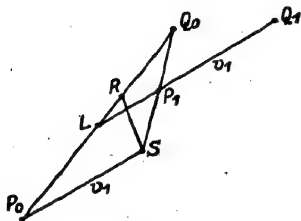


Abb. 55.

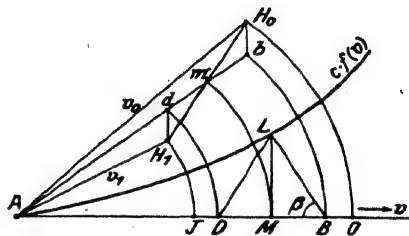


Abb. 56.

2. E. A. Brauer geht aus von einer graphischen Lösung der Hauptgleichung (3) in § 17, also von einer Näherungskonstruktion der Hodographenkurve, die die Beziehung zwischen  $v$  und  $\vartheta$  angibt. Durch den Abgangspunkt  $A$  seien die Vektoren  $AH_0, AH_1, AH_2$  usw. gleich und parallel den Geschwindigkeiten gezogen, wie sie im Anfang der ersten, zweiten, dritten usw. Sekunde bestehen. Dann ist  $H_0H_1H_2\dots$  die Hodographenkurve. So sei also zunächst  $AH_0$  gleich und parallel der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ ; dieser Vektor  $AH_0$  ist ohne weiteres bekannt, da die Anfangsgeschwindigkeit der Größe nach und der Abgangswinkel  $H_0AO = \varphi$  (s. Abb. 56) gegeben ist. Den Vektor  $AH_1$ , also die Geschwindigkeit  $v_1$  nach Größe und Richtung am Anfang der zweiten Sekunde konstruiert alsdann E. A. Brauer wie folgt. Er geht von  $H_0$  aus um eine Strecke  $H_0b$  gleich  $\frac{1}{2}g$  vertikal abwärts, trägt sodann auf  $bA$  nach  $A$  hin die Strecke  $bd$  gleich der mittleren Verzögerung  $cf(v_m)$  in der ersten Sekunde ab und geht von  $d$  aus nochmals um  $\frac{g}{2}$  vertikal abwärts bis  $H_1$ . Dann ist  $AH_1$  die Geschwindigkeit  $v_1$  des Geschosses im Anfang der zweiten Sekunde sowohl der Größe als der Richtung nach. Dabei wird  $bd$  auf Grund der folgenden Überlegung gefunden. Auf der Horizontalen durch  $A$  seien die Geschwindigkeiten  $v$  als Abszissen abge-

tragen, und dazu als Ordinaten die Verzögerungen  $cf(v)$ , wie sie sich aus dem betreffenden Luftwiderstandsgesetz ergeben. Die Kurve der  $cf(v)$  sei also gezeichnet. Nun seien um  $A$  die 5 Kreisbögen durch  $H_0, b, m, d, H_1$  bis zu den Schnittpunkten  $O, B, M, D, J$  mit der Abszissenachse der  $v$  beschrieben. Wenn  $m$  die Mitte von  $db$  ist, so ist  $db$  gleich  $DB$  und  $M$  ist die Mitte von  $DB$  und näherungsweise auch die Mitte von  $IO$ . Die Ordinate  $ML$  der  $cf(v)$ -Kurve ist dann ebenfalls gleich der mittleren Verzögerung  $cf(v_m)$  innerhalb der ersten Sekunde; somit in dem gleichschenkligen Dreieck  $DLB$  die Höhe  $ML$  gleich der Grundlinie  $DB$ , folglich der Winkel  $LBM$  oder  $\beta$  gegeben durch  $\tan \beta = 2$ . Danach findet man  $bd$  dadurch, daß man um  $A$  einen Kreisbogen mit Halbmesser  $Ab$  bis zum Schnitt  $B$  mit der Horizontalen durch  $A$  zieht und in  $B$  einen Winkel  $\beta = \arctan 2$  anlegt. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet die  $cf(v)$ -Kurve in  $L$ ; dann ist die Ordinate  $LM$  des Punktes  $L$  die gesuchte mittlere Verzögerung  $bd$ .

Hat man auf solche Weise die sukzessiven Hodographenpunkte  $H_0, H_1, H_2, \dots$  konstruiert, so kennt man die aufeinanderfolgenden Bahngeschwindigkeiten  $v$  und deren Komponenten  $v_x$  und  $v_y$  und kann durch eine graphische Integration die  $x$  und  $y$  gewinnen. Auch die Änderung des Luftgewichts mit der Höhe ( $c = c(y)$ ) will Brauer weiterhin berücksichtigen.

Eine Prüfung der beiden graphischen Verfahren, von Vahlen und von Brauer, auf die Genauigkeit und auf die praktische Verwendbarkeit dürfte eine dankbare Aufgabe für die Ballistiker sein.

#### Anmerkungen. Sonstige graphische Lösungsmethoden.

1. Der Versuch von A. Indra (1886) zu einer „graphischen Ballistik“ (s. Lit.-Note) beruht auf folgendem Gedanken. Man denke sich zunächst die Flugbahnparabel des luftleeren Raums.  $O$  sei der Abgangspunkt;  $O_1, O_2, O_3, \dots$  seien die Bahnpunkte nach 1, 2, 3, ... Sekunden. Verbindet man  $O$  mit  $O_1, O_2, O_3, \dots$  und zieht in den Punkten  $O_1, O_2, \dots$  die Vertikalen oder, was dasselbe ist, verbindet man diese Punkte mit dem unendlich fernen Punkt der  $y$ -Achse, so stellen sich die aufeinanderfolgenden Bahnpunkte als die Schnittpunkte von zwei projektivischen Strahlenbüscheln dar: dem Strahlenbüschel aus  $O, O_2, O_3, \dots$  und dem Strahlenbüschel aus dem unendlich fernen Punkt der  $y$ -Achse. Zum Übergang in den luftgefüllten Raum wird nun von A. Indra das Zentrum des Parallelstrahlenbüschels aus dem Unendlichen ins Endliche gerückt. Daß die mit diesem Verfahren verbundene Willkürlichkeit zugleich eine geeignete Anpassung an die Verhältnisse des tatsächlichen Luftwiderstands bedeutet, ist nicht nachgewiesen.

2. Von Dr.-Ing. Rothe (s. Lit.-Note) ist 1911 eine graphische Lösung veröffentlicht worden, bei der die Beziehung zwischen  $v$  und  $\theta$ , also die Hodographengleichung, zugrunde gelegt wird. Gegen die Einzelheiten der Rotheschen Lösung sind von H. Rohne, von Narath und von Th. Vahlen Bedenken geäußert worden, worüber man die betreffenden Arbeiten vergleiche.

3. C. Cranz hat 1896/97 ein graphisches Lösungsverfahren gegeben, bei dem die Flugbahn als aus Parabelbögen oder aus Hyperbelbögen zusammengesetzt und die ältere Kruppsche Luftwiderstandstabelle verwendet wird. Dieses Verfahren ist noch in der letzten Auflage dieses Bandes von 1918 aufgeführt. Da in der vorliegenden Neuauflage die Kruppsche Tabelle nicht mehr aufgenommen werden konnte, ist auch jene graphische Lösungsmethode (zumal sie grundsätzlich nur für Flachbahnen Gültigkeit haben sollte) nicht mehr weiter erwähnt.

### § 36. Stückweise Berechnung der Flugbahn von C. Veithen (1919) nach C. Runge und W. Kutta.

C. Veithen ging 1918 zur numerischen Integration der Differentialgleichungen der Geschößbewegung nicht wie bisher meist geschehen war, von der Hauptgleichung (3) in § 17 aus, sondern von den ursprünglichen Gleichungen (1) und (2). (Dieses Gleichungspaar mit der Zeit  $t$  als Parameter ist ja, wie in § 17 gezeigt wurde, gleichwertig mit der Differentialgleichung (3) ohne diesen Parameter). Mit den Abkürzungen:  $\xi = v \cos \vartheta$ ;  $\eta = v \sin \vartheta$ ;  $F(v) = \frac{1}{v} f(v)$  schrieb C. Veithen diese Gleichungen (1) und (2) in der Form

$$\frac{d\xi}{dt} = -c \cdot F(v) \cdot \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = -c \cdot F(v) \cdot \eta - g; \quad \text{wobei } v = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (1)$$

Dieses Gleichungssystem behandelte C. Veithen weiter nach dem von C. Runge und W. Kutta aufgestellten Verfahren. Die Arbeit von C. Veithen ist nach dessen Tode von R. Neuendorff (s. Lit.-Note) pietätvoll veröffentlicht worden.

Zunächst zur Einleitung einige erläuternde Worte allgemeiner Art über das Verfahren von Runge und Kutta (s. Lit.-Note, H. v. Sanden): Es liege eine Differentialgleichung vor  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Und zu dem Anfangswert  $x_0$  der einen Variablen sei der Wert  $y_0$  der anderen Variablen gegeben. Man will, um von diesem Anfangspunkt  $(x_0, y_0)$  aus die Integralkurve stückweise aufzubauen, ermitteln, um welchen Betrag  $k$  sich  $y$  ändert, falls man  $x$  um den willkürlich gewählten kleinen Betrag  $h$  geändert hat. Für  $k$  wählt Runge einen Ausdruck von der Form

$$k = R_1 \cdot k_1 + R_2 \cdot k_2 + R_3 \cdot k_3 + R_4 \cdot k_4.$$

Dabei sollen die Größen  $k_1, k_2, \dots$  aus folgenden Gleichungen genommen werden

$$k_1 = f(x_0, y_0) \cdot h$$

$$k_2 = f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k_1) \cdot h$$

$$k_3 = f(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k_1 + \gamma' k_2) \cdot h$$

$$k_4 = f(x_0 + \alpha'' h, y_0 + \beta'' k_1 + \gamma'' k_2 + \delta'' k_3) \cdot h.$$

Die noch unbestimmten Koeffizienten  $R_1 R_2 \dots$  und die 9 Größen  $\alpha \alpha' \beta \beta' \gamma \gamma' \delta''$  werden nun so ermittelt, daß der Fehler des berechneten Zuwachses  $k$  von der 5. Ordnung in  $h$  ist. W. Kutta erhielt das Resultat, daß man hierfür z. B. zu nehmen hat  $R_1 = R_4 = \frac{1}{6}$  und  $R_2 = R_3 = \frac{1}{8}$ , ferner  $\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}$ ;  $\alpha'' = 1$ ;  $\beta = \gamma' = \frac{1}{2}$ ;  $\delta'' = 1$ ;  $\beta' = \beta'' = \gamma'' = 0$ . Danach ist also die Vorschrift die, daß man nimmt  $k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ , wobei sich die Werte  $k_1 k_2 k_3 k_4$  nacheinander folgendermaßen ergeben: Man berechnet zuerst

$$k_1 = f(x_0, y_0) \cdot h,$$

$$\text{sodann damit } k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \cdot h$$

$$'' \quad '' \quad k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot h$$

$$'' \quad '' \quad k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3) \cdot h.$$

Auf diese Weise hat man von dem Anfangspunkt  $(x_0, y_0)$  der Integral-Kurve aus näherungsweise einen nächsten Punkt  $(x_0 + h, y_0 + k)$  erhalten. Und diesen letzteren Punkt betrachtet man sodann als den Ausgangspunkt, um einen dritten Punkt zu gewinnen, usw.

Um die Genauigkeit abzuschätzen, mit der dabei ein Wert von  $y$  gewonnen ist, hat man die Rechnung zweimal durchzuführen; erstens geht man mit dem willkürlich gewählten Intervall  $h$  (z. B. mit  $h = 0,1$ ) zwei Schritte vorwärts und erhält einen bestimmten Wert von  $y$  nach dem zweiten Schritt; zweitens geht man mit dem doppelten Intervall  $2h$  einen einzigen Schritt nach obiger Vorschrift vor und erhält ein anderes  $y$ . Die beiden so erhaltenen Werte  $y$  vergleicht man.  $\frac{1}{16}$  der Differenz beider Werte  $y$  gibt die Größenordnung des zu erwartenden Fehlers an. Hat man z. B. zweimal nacheinander mit  $h = 0,1$  gerechnet und  $y = 1,0411643$  erhalten (Zahlenbeispiel von H. v. Sanden) und hat man sodann ein einziges Mal mit  $h = 0,2$  gerechnet und  $y = 1,0411648$  erhalten, so weichen die beiden so erhaltenen Werte von  $y$  nur um 5 Einheiten der 7. Dezimale ab, und dann kann der Wert  $y = 1,0411643$  mit allen hingeschriebenen Ziffern als genau gelten. Selbstverständlich rechnet man um so genauer, je kleiner  $h$  gewählt wird, aber die Rechenarbeit wird auch größer. Das beschriebene Verfahren bietet den Vorteil, daß man an jeder Stelle leicht den Fehler ermitteln kann, den man bei einer bestimmten Wahl von  $h$  begeht.

Nach diesen Vorbemerkungen kehren wir zu den Differentialgleichungen (1) zurück. Beim Beginn des Geschosßflugs in der Luft, also zur Zeit  $t = 0$ , sei gegeben  $x_0 = 0, y_0 = 0, \vartheta_0 = \varphi$ , somit  $\xi_0 = v_0 \cos \varphi, \eta_0 = v_0 \sin \varphi$ . Nach dem willkürlich gewählten kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  haben  $x y \xi \eta$  die Zuwächse erhalten  $\Delta x, \Delta y, \Delta \xi, \Delta \eta$ .



so daß nach diesem ersten Schritt die Werte  $xy\xi\eta$  geworden sind:  $x_1 = x_0 + \Delta x$ ,  $y_1 = y_0 + \Delta y$ ,  $\xi_1 = \xi_0 + \Delta\xi$ ,  $\eta_1 = \eta_0 + \Delta\eta$ , die Berechnung dieser Zuwächse  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  vollzieht sich dabei in 4 Stufen: Man berechnet zuerst  $k_1$ ,  $l_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$ ; damit dann

$$k_2, l_2, m_2, n_2 \text{ usw.}$$

$$\text{a) 1. Stufe, } k_1 = \xi_0 \cdot \Delta t; l_1 = \eta_0 \cdot \Delta t; m_1 = -c \cdot F(v_0) \cdot \xi_0 \cdot \Delta t; n_1 = -c \cdot F(v_0) \cdot \eta_0 \cdot \Delta t - g \cdot \Delta t.$$

$$\text{b) 2. } \xi' = \xi_0 + \frac{m_1}{2}; \eta' = \eta_0 + \frac{n_1}{2}; v' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}; \\ k_2 = \xi' \cdot \Delta t; l_2 = \eta' \cdot \Delta t; m_2 = -c F(v') \cdot \xi' \cdot \Delta t; n_2 = -c F(v') \cdot \eta' \cdot \Delta t - g \cdot \Delta t;$$

$$\text{c) 3. } \xi'' = \xi_0 + \frac{m_2}{2}; \eta'' = \eta_0 + \frac{n_2}{2}; v'' = \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2}; \\ k_3 = \xi'' \cdot \Delta t; l_3 = \eta'' \cdot \Delta t; m_3 = -c F(v'') \cdot \xi'' \cdot \Delta t; n_3 = -c F(v'') \cdot \eta'' \cdot \Delta t - g \cdot \Delta t;$$

$$\text{d) 4. } \xi''' = \xi_0 + m_3; \eta''' = \eta_0 + n_3; v''' = \sqrt{\xi'''^2 + \eta'''^2}; \\ k_4 = \xi''' \cdot \Delta t; l_4 = \eta''' \cdot \Delta t; m_4 = -c F(v''') \cdot \xi''' \cdot \Delta t; n_4 = -c F(v''') \cdot \eta''' \cdot \Delta t - g \cdot \Delta t.$$

Dann ist

$$\Delta x = \frac{1}{6} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6),$$

$$\Delta y = \frac{1}{6} (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6),$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{6} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6),$$

$$\Delta \eta = \frac{1}{6} (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6).$$

Die so erhaltenen neuen Werte  $x_1 y_1 \xi_1 \eta_1$  am Ende des ersten Zeitintervalls, also die Werte  $x_1 = x_0 + \Delta x$  usw., bilden sodann die Anfangswerte des zweiten Zeitintervalls, für das die entsprechenden Zuwächse  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  usw. analog berechnet werden. Man gewinnt so punktweise die Flugbahn. (Zur bequemeren Berechnung, der einzelnen Schritte hat die Art. Prüf.-Komm. in Berlin nach den Vorschlägen von C. Veithen einen besonderen Rechenschieber (von der Firma Dennert & Pape in Altona) herstellen lassen, der Schieber verschieden für die einzelnen Geschostypen; dieser Rechenschieber gestattet durch eine erste Einstellung, zu  $\xi$  und  $\eta$  den Wert  $v = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  abzulesen, und durch eine zweite Einstellung, die Produkte  $c F(v) \cdot \xi$  und  $c F(v) \cdot \eta$  für verschiedene Geschosßformen zu gewinnen).

**Zahlenbeispiel.** Gegeben: Kaliber  $2R = 0,088$  m; Geschosßgewicht  $P = 7,5$  kg; Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 442$  m/sec; Abgangswinkel  $\varphi = 10^\circ$ ; Luftgewicht am Boden  $\delta = 1,22$  kg/m<sup>3</sup>;  $v_0 \cos \varphi = 435$ ;  $v_0 \sin \varphi = 76,7$ ;  $c = 1,08$ . Der Einfachheit halber soll die Abhängigkeit von  $c$  mit der Höhe unberücksichtigt bleiben;  $\Delta t$  sei  $= 1$  sec gewählt.

Im folgenden sind die Zahlenwerte der  $klm n$  für das erste Zeitintervall angegeben. Es wird mit  $\Delta t = 1$ :

$k_1 = 435$	$l_1 = 76,7$	$v_0 = 442$	$-m_1 = 82,2$	$-n_1 = 24,8$
$k_2 = 394$	$l_2 = 64,5$	$v' = 399$	$-m_2 = 64,0$	$-n_2 = 20,4$
$k_3 = 403$	$l_3 = 66,5$	$v'' = 408$	$-m_3 = 61,8$	$-n_3 = 21,2$
$k_4 = 373$	$l_4 = 55,5$	$v''' = 377$	$-m_4 = 56,0$	$-n_4 = 18,1$

Daraus erhält man  $\Delta x = 400$ ;  $\Delta y = 65,7$ ;  $\Delta \xi = -65,0$ ;  $\Delta \eta = -20,9$ , so daß nach 1 Sekunde die Koordinaten des Geschosses sind  $x_1 = 400$  m;  $y_1 = 65,7$  m. Nach 12 Schritten, also nach der Zeit  $T'' = 12,0$  sec, erhielt C. Veithen auf diese Weise  $\sum \Delta x = x = 3384$  m;  $\sum \Delta y = y = +1,5$  m;  $v = 227$  m/sec. (Die Schußtafel ergibt  $X = 3400$  m;  $T = 12,1$  sec;  $v_e = 222$  m/sec.)

Anmerkung. Hierher zu rechnen ist auch die „Méthode des vitesses“, die E. Vallier 1894 in seiner „balistique extérieure“ (Paris, Verlag von Gauthier-Villars, S. 34 u. folg.) veröffentlicht hat und die ebenfalls, wie das Verfahren von Kutta, auf einer Art von Simpsonscher Regel beruht.

### § 37. Über die Methoden von O. Wiener (1919) und A. von Brunn (1919) zur stückweisen Berechnung von Flugbahnen.

In Abschnitt 6 wurden Rechnungsverfahren erwähnt, bei denen die Taylorsche Reihenentwicklung auf die direkte Berechnung der ganzen Flugbahn bis zum Mündungshorizont oder wenigstens eines größeren Flugbahnbogens, also auf die Gewinnung von geschlossenen Formeln für die Elemente eines beliebigen Flugbahnpunkts ( $xy$ ), speziell des Auffallpunkts ( $X, 0$ ), angewendet wurden. Wenn dabei, wie es üblich ist, aus praktischen Gründen nur 3 bis 4 Glieder der Reihenentwicklung benützt werden, so ist die Berechnung um so weniger zuverlässig, je größer der Abgangswinkel  $\varphi$  ist. Um jedoch auch Steilbahnen mit ausreichender Genauigkeit berechnen zu können, entwickelt O. Wiener (s. Lit.-Note) die in den Differentialgleichungen vorkommenden Variablen nur für einzelne kurze Wegstrecken der Bahn, etwa je für 1 Sekunde, in Taylorsche Reihen und nimmt für jede Wegstrecke die Integration vor. Das Wienerische Verfahren kann hier aus Platzmangel nur angedeutet werden; über die Einzelheiten vergleiche man die Wienerische Arbeit selbst, sowie ihre Weiterführung durch R. Sängewald (s. Lit.-Note).

Die Verzögerung durch den Luftwiderstand sei jetzt bezeichnet mit  $c \cdot k \cdot f(v)$  oder kürzer mit  $F(v)$ . Dabei ist  $k$  von den Dimensionen, der Masse und der Form des Geschosses abhängig und  $c$  bedeutet das Verhältnis  $\delta_y : \delta_0$  des Luftgewichts  $\delta_y$  in der Höhe  $y$  zum Bodenluftgewicht  $\delta_0$ .  $c$  ist die Ableitung von  $c$  nach  $y$ ;  $f'$  und  $f''$  sind die Ableitungen von  $f(v)$  nach  $v$ . Der Index  $a$  bzw.  $e$  bezieht sich auf den Anfang, bzw. das Ende des betreffenden Bahnstücks; der Index  $m$  deutet einen Mittelwert in dem betr. Bahnstück an.

Um die zu einem Schritt  $\Delta t$  gehörigen Änderungen  $\Delta v, \Delta \theta, \Delta x, \Delta y$  von  $v \theta xy$  zu erhalten, geht O. Wiener aus von den Glei-

chungen der Tangential- und der Normalbeschleunigung für den betrachteten Zeitpunkt  $t$ , also von den Gleichungen  $\frac{dv}{dt} = -g \sin \vartheta - F$  und  $-\frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} = g \cdot \frac{dt}{v}$ . In der ersteren Gleichung wird  $F$  in eine Taylorsche Reihe nach steigenden Potenzen von  $t$  entwickelt, wovon die 3 ersten Glieder genommen werden. Gleiches geschieht mit  $\vartheta$ . Nachdem so die rechte Seite dieser ersten Gleichung als Funktion von  $t$  dargestellt ist, wird integriert vom Anfang bis zum Ende des Intervalls. In der zweiten Gleichung wird rechts  $\frac{1}{v}$  in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von  $t$ , links  $\frac{1}{\cos \vartheta}$  in eine solche Reihe nach Potenzen von  $\vartheta$  entwickelt und alsdann beiderseits integriert. Die Berücksichtigung der Änderung der Luftdichte mit der Höhe geschieht in der Weise, daß  $c = \delta_y \cdot \delta_0$ , was von  $y$  und damit von  $t$  abhängt, gleichfalls in eine Reihe nach Potenzen von  $t$  entwickelt wird, wovon O. Wiener die beiden ersten Glieder nimmt. Und die zugehörigen Koordinatenzuwächse  $\Delta x$  und  $\Delta y$  in horizontaler und in vertikaler Richtung, also die Änderungen

$$\Delta x = \int_0^{\Delta t} v \cdot \cos \vartheta \cdot dt \text{ und } \Delta y = \int_0^{\Delta t} v \sin \vartheta \cdot dt$$

berechnet er alsdann mit Hilfe eines von ihm aufgestellten allgemeinen Satzes über die abgekürzte Integration des Produkts zweier Reihen.

Das Rechenverfahren ist, ohne weitere Ableitung zusammengestellt, das folgende:

1. Zunächst wird ein angenäherter Wert für die Abnahme  $-\Delta v$  von  $v$  während der Zeit  $\Delta t$  ermittelt; (dieser erste Näherungswert sei als solcher durch eine Klammer angedeutet, also durch  $-(\Delta v)$ ). Es wird

$$-(\Delta v) = \frac{I + II + III}{1 + B + C} \cdot \Delta t; \text{ hier ist } I = c_a \cdot k \cdot f_a(v);$$

$$II = \frac{1}{2} \cdot v_a \cdot k \cdot f_a'(v) \cdot c_a' \cdot \sin \vartheta_a \cdot \Delta t; \text{ III} = g \cdot \sin \vartheta_a;$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot c_a \cdot k \cdot f_a' \cdot \Delta t; \text{ C} = \frac{1}{8} c_a \cdot \left( \frac{k \cdot f_a' \cdot \Delta t}{2} \right)^2.$$

Daraus erhält man einen Näherungswert von  $v_m$ , nämlich

$$(v_m) = v_a + \frac{1}{2} \cdot (\Delta v).$$

Sodann berechnet man einen Näherungswert von  $\frac{1}{2} \Delta \vartheta$  aus  $\frac{1}{2} (\Delta \vartheta)$  in Grad  $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{g \cos \vartheta_a}{(v_m)} \cdot \Delta t$ ; und hieraus  $(\vartheta_m) = \vartheta_a + \frac{1}{2} (\Delta \vartheta)$ . Sind so diese angenähernten Werte  $(v_m)$  und  $(\vartheta_m)$  erhalten, so wird

Über die Methoden von Wiener u. Brunn zur Berechnung von Flugbahnen. 227  
 der endgültige Wert von  $-\Delta v$  durch den folgenden Ausdruck berechnet

$$-\Delta v = \frac{I + II + III + IV + V}{I + B + C + D' + E' \cdot (\Delta v)} \cdot \Delta t.$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$IV = g \cdot [\sin(\vartheta_m) - \sin \vartheta_a]; \quad V = \frac{1}{2} k f_a(v) c_a' \sin(\vartheta_m) (\Delta v) \cdot \Delta t, \\ D' = \frac{1}{3} k f_a'(v_m) c_a' \sin(\vartheta_m) \cdot \Delta t^3; \quad E' = \frac{1}{6} c_a k f_m''(v) \cdot \Delta t.$$

Damit gewinnt man sodann den genauen Mittelwert  $v_m = v_a + \frac{1}{2} \Delta v$  und den Endwert  $v_e$  der Geschwindigkeit  $v_e = v_a + \Delta v$ .

2. Analog berechnet man den Endwert  $\vartheta_e$  des Horizontalneigungswinkels am Ende des Zeitintervalls  $\Delta t$ ; man bildet

$$(y_e) = y_a + v_m \cdot \sin(\vartheta_m) \quad \text{und} \quad \Delta F = c_a k f_e(v) - c_a k f_a(v);$$

dann ist genau

$$-\Delta \vartheta \text{ in Grad} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{g \Delta t}{v_m} \cdot \left( 1 + \frac{\Delta v^2}{12 v_m^2} - \frac{\Delta F}{12 v_m} \cdot \Delta t \right)$$

und  $\vartheta_e = \vartheta_a + \Delta \vartheta$ . Man hat damit den Tangentenneigungswinkel  $\vartheta_e$  am Ende des Bahnstücks.

3. Um endlich aus den Anfangswerten  $x_a$  und  $y_a$  der Abszisse bzw. der Ordinate des betrachteten Flugbahnstücks die Endwerte  $x_e$  und  $y_e$  zu berechnen, verfährt man wie folgt: Man bildet die Mittelwerte

$$\sin \vartheta_m' = \frac{1}{2} (\sin \vartheta_a + \sin \vartheta_e) \quad \text{und} \quad \cos \vartheta_m' = \frac{1}{2} (\cos \vartheta_a + \cos \vartheta_e) \\ \text{und hieraus die Hilfsgrößen } v_m' \text{ und } u, \text{ die definiert sind durch} \\ v_m' = v_m + \frac{1}{12} \Delta F \cdot \Delta t; \quad u = \frac{1}{6} \Delta \vartheta \left\{ -\Delta v + \frac{1}{2} g \sin \vartheta_m' \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta t \right\}.$$

Dann ist

$$\Delta x = (v_m' \cos \vartheta_m' - u \sin \vartheta_m') \cdot \Delta t \\ \Delta y = (v_m' \sin \vartheta_m' + u \cos \vartheta_m') \cdot \Delta t$$

und endlich  $x_e = x_a + \Delta x$ ;  $y_e = y_a + \Delta y$ .

Den gesamten Rechnungsverlauf für einen einzelnen Schritt  $\Delta t$  demonstriert R. Sängewald an einem Beispiel mit  $\Delta t = 2 \text{ sec}$ ; er findet, daß man selbst bei zweckmäßiger Anordnung der Zahlenrechnung eine nicht ganz unbeträchtliche Mühe aufzuwenden hat, um einen Schritt  $\Delta t$  vorwärts zu kommen. Aus der Eberhardschen Luftwiderstandstabelle für Kruppsche Normalgeschosse hat Sängewald die Zahlenwerte von  $f f' f''$  entnommen und bis  $v = 750 \text{ m/sec}$  aufwärts sehr sorgfältig ausgeglichen.

Ein Vorzug der Wienerschen Methode besteht darin, daß sie gestattet, an jeder Stelle den durch das mathematische Näherungsverfahren entstandenen Fehler abzuschätzen, und dies hat O. Wiener auch durchgeführt. A. Sängewald hat ferner geeignete Kriterien

dafür aufgestellt, wie groß jedesmal das betreffende Zeitintervall  $\Delta t$  zu wählen ist, damit ein bestimmter Grad von Genauigkeit erzielt wird. Bei den Änderungen  $\Delta v$  bzw.  $\Delta \vartheta$  eines Schrittes  $\Delta t$  fordert er: an absoluter Genauigkeit 0,01 m/sec bzw. 0,0001, an relativer Genauigkeit bei  $\Delta t = 1$  sec 0,04 bzw. 0,0002; man findet dann aus seinen Kriterien die notwendige Größe von  $\Delta t$ . In einem Zahlenbeispiel mit  $\varphi = 70^\circ$ ,  $v_0 = 467$  m/sec und  $k = 68,212$  erhält er im ganzen 34 Schritte  $\Delta t$ , nämlich vom Anfang der Bahn an bis zu deren Ende im Mündungshorizont bzw.:  $\Delta t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3$  Sekunden. Er führt die Berechnung einer solchen Steilbahn durch, zunächst für Windstille, weiter für konstanten Gegenwind.

2. A. von Brunn (s. Lit.-Note) operiert insofern ähnlich wie O. Wiener, als er gleichfalls die Flugbahn in kleinen Teilbögen berechnet und dabei gleichfalls Taylorsche Reihenentwicklungen anwendet. Aber A. v. Brunn geht aus von den Differentialgleichungen der Geschößbewegung längs der horizontalen  $x$ -Achse und längs der vertikalen  $y$ -Achse, also von den Gleichungen (1) und (2) in § 17:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - c(y) \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Er entwickelt  $x$  und  $y$  für das betreffende kleine Zeitintervall  $\Delta t$  in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von  $\Delta t$ , und für  $x', x'', x''' \dots$  und ebenso für  $y', y'', y''' \dots$  werden unter Verwendung der vorhin erwähnten Differentialgleichungen die zugehörigen Ausdrücke aufgestellt. Das Luftwiderstandsgesetz und das Verhältnis  $\delta_y : \delta_0$  kann dabei in Tabellenform vorliegen. R. Sängewald findet, daß die strenge Methode von A. v. Brunn an „Rechenökonomie dem Wienerischen Verfahren weit unterlegen“ sei. Übrigens bezog sich einer der Hauptzwecke, die A. v. Brunn bei seinen Untersuchungen leiteten, darauf, mit seinem zwar etwas umständlichen, aber strengen Rechenverfahren einige Lösungsmethoden auf ihre Genauigkeit zu prüfen; insbesondere die Methode, die sich in dem literarischen Nachlaß von Schwarzschild vorfand und von K. Regner bearbeitet worden ist. Über alles Weitere sei auf die Brunnsche Arbeit selbst verwiesen, wo man auch das Prinzip des Schwarzschildischen Verfahrens klar dargestellt findet. Über dieses letztere, sowie über einige andere Vorschläge ist in den folgenden Anmerkungen einiges Wenige gesagt.

Anmerkungen. 1. In § 23 war unter Absatz d) erwähnt worden, daß Hélie die ganze Flugbahn damit zu berechnen sucht; daß er den Ausgleichsfaktor  $\alpha$  als das geometrische Mittel zwischen dem Secans des Abgangswinkels und dem Secans des Winkels  $\vartheta$  im Scheitelpunkt der Bahn wählt. Im Gegen-

satz zu Hélie will Schwarzschild die Flugbahn in einer größeren Anzahl von kleinen Bogenstücken berechnen, und er nimmt dabei für ein solches Bogenstück den Faktor  $\alpha$  gleich dem geometrischen Mittel aus den Werten von  $\sec \vartheta$  am Anfang und am Ende des Bogenstücks. Die Hauptsache bei dem Verfahren von Schwarzschild ist aber die Art, wie er die ganze Bahn in einzelne Bogenstücke geteilt denkt. Dies soll in der Weise geschehen, daß die Teilpunkte äquidistant sind in bezug auf  $\log \sec \vartheta$ , also so, daß die zu den Endpunkten der einzelnen Bahnstücke gehörenden Werte von  $\cos \vartheta$  eine geometrische, ihre Logarithmen somit eine arithmetische Reihe bilden. Und bei den zweiten Integrationen, die  $x, y, t$  selbst liefern, verzichtet Schwarzschild auf die grundsätzlich strenge Quadratur und ersetzt sie (wie schon die Hauptgleichung durch eine nur angenäherte Hauptgleichung ersetzt worden war) durch Annäherungen, bei denen jedoch nicht mehr vernachlässigt wird, als schon bei der Hauptgleichung vernachlässigt worden war. A. v. Brunn kommt hinsichtlich des Schwarzschild'schen Verfahrens zu dem Ergebnis, daß man, wenn man nach Schwarzschild's Vorschriften schematisch operieren wollte, eine sehr große Anzahl von Schritten ausführen müßte, um die Schußweite innerhalb eines kleinen Bruchteils der mittleren Streuung genau zu erhalten, daß man aber unter Verbesserung der Genauigkeit die Schrittzahl bedeutend herabdrücken kann, wenn man das Anfangsstück der Bahn mit einem kleinen, den absteigenden Ast mit einem größeren Intervall von  $\log \sec \vartheta$  berechnet. In einem Beispiel mit  $v_0 = 1000$  m/sec und  $\varphi = 45^\circ$  nimmt A. v. Brunn für den aufsteigenden Ast 10 Schritte, wobei jedoch der erste Schritt in 4 Schritte unterteilt ist, und erhält eine befriedigende Genauigkeit.

2. Schon Didion, St. Robert, Hélie, v. Wuich und G. Bianchi hatten übrigens, im Fall von Steilbahnen, vorgeschlagen, die Bahn stückweise zu berechnen. Wenn dabei (vgl. § 23)  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$  gewählt wird und  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  die Neigungswinkel der Tangenten in den beiden Endpunkten eines Flugbahnstücks bedeuten, so ist nach Didion zu nehmen  $\alpha = [\xi(\vartheta_1) - \xi(\vartheta_2)] : (\operatorname{tg} \vartheta_1 - \operatorname{tg} \vartheta_2)$ ; nach N. v. Wuich  $\alpha = \xi\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) : \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$ ; nach St. Robert

$$\alpha = \frac{1}{2} (\sec \vartheta_1 + \sec \vartheta_2);$$

nach Hélie  $\alpha = \sqrt{\sec \vartheta_1 \cdot \sec \vartheta_2}$ . J. Schatte (vgl. Lit.-Note) schlägt vor, zu nehmen  $\alpha = \sec \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$ .

3. S. Takeda (s. Lit.-Note) wählt eine gewisse Verbindung des Didion'schen und des Siacci'schen Verfahrens:  $\sigma = \frac{1}{\alpha}$ . (Dabei  $\alpha$  der Didion'sche Faktor);  $\gamma = \frac{\delta_0}{\delta_y} \cdot \beta$ , (dabei  $\beta$  der Ausgleichsfaktor von Siacci III).

4. O. v. Eberhard (s. Lit.-Note) rechnet bei Fernbahnen ebenfalls die Bahn in einzelnen Bogenstücken. Dabei nimmt er für einen solchen Bogen, dessen Anfangs- bzw. Endwert von  $\vartheta$  wieder mit  $\vartheta_1$  bzw.  $\vartheta_2$  bezeichnet sei, übereinstimmend mit Siacci:  $\sigma = \cos \vartheta_1$  (also  $u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \vartheta_1}$ ) und  $\gamma = \beta \cdot \cos^2 \vartheta_1$ . Aber O. v. Eberhard berechnet  $\beta$  als das arithmetische Mittel aus den beiden wahren Werten, die  $\beta$  an den beiden Enden des Bogens hätte. Unter Voraussetzung von Zonen-Potenzgesetzen  $c f(v) = c \cdot v^*$  ist der wahre (veränderliche)

Wert von  $\beta$  der folgende:

$$\beta = \left( \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta} \right)^n \cdot \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_1} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta_1} = \left( \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta_1}.$$

Am Anfang des Bogenteils, wo  $\vartheta = \vartheta_1$  ist, hat also  $\beta$  den Wert  $\frac{1}{\cos \vartheta_1}$ ; und am

Ende den Wert  $\left( \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\cos \vartheta_1}$ . So nimmt O. v. Eberhard für  $\beta$  den Mittelwert:

$$\beta = \frac{1}{\cos \vartheta_1} \cdot \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} \right)^{n-1} \right].$$

Dabei wechselt  $n$  von einem Zonengesetz zum andern entlang der Bahn; z. B. im Gebiet des quadratischen Zonengesetzes ( $n = 2$ ) ist somit  $\beta = \frac{1}{2} (\sec \vartheta_1 + \sec \vartheta_2)$ , wie bei St. Robert. Gleichzeitig nimmt O. v. Eberhard für  $\delta(y)$  und damit für  $c(y)$  entlang des Bogenteils einen konstanten Mittelwert, wie er der mittleren Höhe des betrachteten Bogenteils über dem Erdboden entspricht. Näheres darüber in § 40.

### § 38. Über die Methoden von Frh. von Zedlitz, von E. Stübler und von J. de Jong zur stückweisen Berechnung einer Flugbahn.

1. Unstreitig das beste Verfahren zur Festlegung einer Steilbahn ist das in Band III zu besprechende experimentelle Verfahren mittels zweier Phototheodolite. Für den Fall, daß aber doch eine Steilbahn (mit angebbarer Genauigkeit) berechnet werden muß, — und bei den Geschossen ohne Zeitzündler versagt jenes experimentelle Verfahren —, hatte der Verfasser 1909 (s. Lit.-Note) ein planimetrisches Verfahren ausgearbeitet, das im folgenden 8. Abschnitt zur Genauigkeitsprüfung von Näherungsmethoden an der Hand von „Normalbahnen“ benutzt werden wird. Diese Methode hat sodann 1913 Freiherr von Zedlitz (s. Lit.-Note) rein rechnerisch umgearbeitet und E. Stübler hat die betreffenden Formeln für den praktischen Gebrauch noch weiter vereinfacht. Voraussetzung ist ein Luftwiderstandsgesetz in der Form von Zonenpotenzgesetzen. Gemäß den Formeln von § 18 ist dann die Beziehung zwischen  $v$  und  $\vartheta$  innerhalb jedes einzelnen Zonenbereichs gegeben. Die Flugbahn wird in einzelnen kleinen Bogenstücken berechnet.  $\vartheta_0$  und  $v_0$  bzw.  $\vartheta$  und  $v$  mögen die Tangentenneigung und die Geschwindigkeit im Anfangspunkt, bzw. im Endpunkt des betrachteten Bahnstückes bezeichnen. Dann ist z. B. innerhalb des quadratischen Zonenbereichs, wo also  $c \cdot v^2$  die Verzögerung  $c \cdot f(v)$  durch den Luftwiderstand bedeutet,

$$\frac{1}{(v \cos \vartheta)^2} - \frac{1}{(v_0 \cos \vartheta_0)^2} = \frac{2c}{g} \cdot [\xi(\vartheta_0) - \xi(\vartheta)];$$

dabei

$$\xi(\vartheta) = \int \sec^3 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{2} \left[ \sin \vartheta \cdot \sec^3 \vartheta + \operatorname{lognat} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) \right];$$

für  $\xi(\vartheta)$  ist im Anhang zu diesem Band die Tabelle 8b gegeben.

Nun wendet Frh. von Zedlitz auf ein solches Bogenstück die im 6. Abschnitt behandelte Reihenentwicklung an. Dort ist  $y$ ,  $\vartheta$ ,  $v \cos \vartheta$  in Funktion von  $x$  dargestellt. Eliminiert man aus den betreffenden 4 abgebrochenen Reihen das mit  $c$  behaftete Glied, so erhält man 3 Gleichungen für die 3 Variablen  $x$ ,  $y$ ,  $t$  in Funktion von  $v \cos \vartheta$ . Von der zugehörigen Rechnung sei hier nur das Resultat, und zwar in der von E. Stübler aufgestellten Form wieder gegeben.

Zusammenstellung: Nachdem man, wie angegeben, für eine größere Anzahl von  $\vartheta$ -Werten die Geschwindigkeitskomponenten  $v \cos \vartheta$  berechnet hat (vgl. § 18, Zusammenstellung) berechne man für ein einzelnes Flugbahnstück, das von  $\vartheta_0$  bis  $\vartheta$  reicht, zunächst  $p$ , daraus  $q$  und damit die horizontalen und vertikalen Koordinatenstücke  $x$  und  $y$  und die zugehörige Zeit  $t$  mit den folgenden Gleichungen:

$$p = \frac{v_0 \cos \vartheta_0}{v \cos \vartheta}; \quad (1)$$

$$q = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0 - \operatorname{tg} \vartheta}{1 + p^2}; \quad (2)$$

$$x = \frac{2}{g} (v_0 \cos \vartheta_0)^2 \cdot q, \quad (3)$$

$$y = x \cdot \left[ \operatorname{tg} \vartheta_0 - \frac{q}{3} (p^2 + 2) \right]; \quad (4)$$

$$t = \frac{2x}{3 \cdot v_0 \cos \vartheta_0} \cdot \frac{p^3 - 1}{p^2 - 1}. \quad (5)$$

Von einem Flugbahnstück zum nächsten ändern sich die Werte  $p$  und  $q$ , aber innerhalb desselben Stücks werden sie als konstant betrachtet. Die Zahlenberechnungen von Frh. von Zedlitz haben gezeigt, daß sich mit diesem Verfahren eine Genauigkeit erzielen läßt, die innerhalb der mittleren Streuung liegt. Soll auch die Änderung des Luftgewichts  $\delta$  mit der Höhe berücksichtigt werden, so wird man die Rechnung zuerst mit einem konstanten mittleren  $\delta$  und damit  $c$  durchführen, alsdann die Rechnung wiederholen und dabei von einem kleinen Bahnstück zum andern  $\delta$  und damit  $c$  veränderlich annehmen.

2. Wesentlich anders ist in jüngster Zeit der holländische Ballistiker G. de Josselin de Jong, Professor an der Kgl. holländ. Militärakademie zu Buda, vorgegangen (s. Lit.-Note). Es sei an die Ausdrücke erinnert, die in § 18 (Gleichungen 8 bis 11) zu dem



linearen Gesetz der Verzögerung durch den Luftwiderstand:  $c \cdot f(v) = c \cdot v$  gegeben wurden. Wir sahen dort, daß bei dieser Annahme und nur bei dieser die beiden Differentialgleichungen längs der  $x$ -Achse und längs der  $y$ -Achse unabhängig voneinander sind und ohne weiteres die Integration zulassen. Nun ist zwar der Luftwiderstand — darauf wurde schon in § 18 hingewiesen — für Geschosßgeschwindigkeiten, keineswegs proportional der 1. Potenz der Geschwindigkeit  $v$ ; aber die Luftwiderstandskurve läßt sich, wenn sie in zahlreiche kleine Stücke zerlegt wird, mit genügender Annäherung als ein aus geradlinigen Seiten zusammengesetztes Polygon darstellen. Es ist dann der ballistische Koeffizient  $c$  nicht allein von den Dimensionen, der Form und der Masse des Geschosses und dem Luftgewicht, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängig; von einer Polygonseite zur anderen ist  $c$  veränderlich.

Nun waren die in § 18 für die Annahme  $c f(v) = c v$  aufgeführten Gleichungen, — mit  $v_{x_0}$  bzw.  $v_{y_0}$  gleich der Horizontal- bzw. Vertikalkomponente der Geschwindigkeit im Abgangspunkt und mit  $v_x$  bzw.  $v_y$  gleich diesen Komponenten in dem nach der Zeit  $t$  erreichten Bahnpunkt  $(x y)$  —, die folgenden:

$$c \cdot x = v_{x_0} \cdot (1 - e^{-ct}); \quad c \cdot y = -gt + \left(\frac{g}{c} + v_{y_0}\right) (1 - e^{-ct});$$

$$v_x = v_{x_0} \cdot e^{-ct}; \quad v_y + \frac{g}{c} = \left(v_{y_0} + \frac{g}{c}\right) e^{-ct}.$$

Diese Gleichungen werden von J. de Jong in der folgenden Form geschrieben:

$$c \cdot t = \log \text{nat} \frac{v_{x_0}}{v_x} = \log \text{nat} \frac{\frac{g}{c} + v_{y_0}}{\frac{g}{c} + v_y}; \quad (6)$$

$$c \cdot x = v_{x_0} - v_x; \quad (7)$$

$$c \cdot y = v_{y_0} - v_y - gt = \frac{\frac{g}{c} + v_{y_0}}{v_{x_0}} \cdot c \cdot x - gt. \quad (8)$$

Damit führt J. de Jong die Berechnung einer Bahn in kleinen Stücken durch; dabei macht er darauf aufmerksam, daß nur wenige Tabellen erforderlich sind. Die bei diesem Jongschen Annäherungsverfahren auftretenden Fehler beziehen sich natürlich in erster Linie auf das Luftwiderstandsgesetz, in rein mathematischer Hinsicht gehen sie nicht über diejenigen Fehler hinaus, die in den benützten logarithmischen und trigonometrischen Tabellen usw. liegen. Jedenfalls dürfte es sich lohnen, eingehende Prüfungen darüber anzustellen, ob dieses Verfahren sich mit ausreichender Genauigkeit für den praktischen Gebrauch einrichten läßt. Nach den von J. de Jong durchgeführten Zahlenbeispielen scheint in der Tat einige Aussicht

dafür zu bestehen. Es sei deshalb auf diese Arbeit, die in der holländ. Zeitschr. Militaire Spectator (1924 Jan./Febr.-Hefte) erschienen ist, aufmerksam gemacht.

### § 39. Der lotrechte und der nahezu lotrechte Schuß.

Untersuchungen über diesen Schuß haben heutzutage Bedeutung insbesondere für das Fliegierschießen, außerdem für Jagd Zwecke und etwa für gerichtliche Feststellungen. Auf eine andere Verwendung des vertikalen Schusses hat als Erster A. Preuß (s. Lit.-Note) aufmerksam gemacht: Bei den neueren Infanteriegeschossen, die mit Mündungsgeschwindigkeiten von rund 1000 m/sec verfeuert werden, handelt es sich häufig darum, Gewißheit darüber zu erlangen, in welchem Zustande sie die Mündung der Waffe verlassen haben; ob sie im Lauf deformiert worden sind; ob sie den Zügen richtig gefolgt sind, usw. Nach dem Einschießen in Sand, Holz, Sägespäne, Werg, Watte zeigen sich die modernen Stahlmantelgeschosse mit Bleikern stark deformiert; und selbst das früher zu jenen Feststellungen übliche Einschießen in ein Wasserbassin ist bei den großen Anfangsgeschwindigkeiten der neueren Geschosse nicht mehr verwendbar, da die Geschosse im Wasser zerdrückt werden. Aber in dem vertikalen Aufwärtsschießen und Auffangen des wieder unten angekommenen Geschosses auf einer Eisfläche oder Rasenfläche oder Holzfläche hat A. Preuß ein Mittel gefunden, um die Geschosßform, wie sie beim Flug des Geschosses in der Luft bestand, in großer Reinheit zu erhalten. Bei diesem Einschießen in ein Luftpolster von über 2 km Länge erfährt z. B. das *S*-Geschosß ( $v_0 = \text{circ. } 880 \text{ m/sec}$ ) keine wahrnehmbare Deformation. Es gelangt der Rechnung zufolge in eine Höhe von 2550 m und kommt, wie ein Diabolokreisel angenähert sich selbst parallel bleibend, also abwärts mit dem Geschosßboden voraus fliegend, nach einer Gesamtflugzeit von 74 sec wieder unten an; dabei kündigt sich das Geschosß, weil die Schallwellen bei der Abwärtsbewegung des Geschosses diesem vorausseilen, 3 bis 4 sec vorher durch Sausen an. Die Auffallgeschwindigkeit berechnet sich zu  $v_e = 41 \text{ m/sec}$ . In der Tat dringt das *S*-Geschosß beim Aufschlag auf Holz nur ca. 1 mm, auf Eis 4 bis 5 mm tief ein. Als Deckung für den Schießenden genügt ein über den Kopf gehaltenes gewöhnliches Brett. Beim Schießen von einer Eisfläche aus ließ sich wiederholt wahrnehmen, daß die Geschosse nach ihrer Rückkehr noch längere Zeit ihre Kreisel tänze auf dem Eise ausführten.

Jedenfalls können danach Fälle eintreten, in denen man genötigt ist, auch den vertikalen oder den nahezu vertikalen Schuß rechnerisch bzw. graphisch zu verfolgen.

## A. Der vertikale Schuß.

Die Anfangsgeschwindigkeit, mit der das Geschöß von  $O$  aus lotrecht in die Höhe geschossen wird, sei  $v_0$ . Die Geschwindigkeit des Geschosses wird unter dem Einfluß von Schwere und Luftwiderstand mehr und mehr abnehmen und nach einer gewissen Zeit  $t_1$  und in einer gewissen Höhe  $y = Y$  Null werden. Von da beginnt das Geschöß wieder mit der Anfangsgeschwindigkeit Null herabzufallen, seine Geschwindigkeit nimmt zu und nähert sich dabei asymptotisch dem konstanten Grenzwert  $v_f$  („Fallschirmgeschwindigkeit“), der durch die Gleichheit von Luftwiderstand und Gewicht bedingt ist (während umgekehrt die Geschwindigkeit eines Meteorsteins, der mit sehr großer Anfangsgeschwindigkeit, von durchschnittlich 30 000 m/sec, aus dem Weltraum kommend in die Erdatmosphäre eindringt und schließlich auf die Erde stürzt, immer mehr abnehmen und sich jener Grenzggeschwindigkeit  $v_f$  als unterem Grenzwert asymptotisch nähern wird). Ehe das Geschöß jenen oberen Grenzwert  $v_f$  der Geschwindigkeit annehmen kann, schlägt das Geschöß nach  $t_2$  sec, vom obersten Punkt ab gerechnet, wieder auf dem Erdboden auf, wobei seine Auffallgeschwindigkeit  $v_e$  sein möge. Rechnerisch muß die Geschößbewegung getrennt für das Aufsteigen und für das Absteigen behandelt werden, da die zwei Teile der Bewegung nicht symmetrisch sind, vielmehr im ersten Teil Luftwiderstand und Schwere in gleicher Richtung, nämlich beide verzögernd, im zweiten Teil Luftwiderstand und Schwere in entgegengesetzter Richtung, nämlich der Luftwiderstand verzögernd; die Schwere beschleunigend, wirken.

a) Aufsteigende Bewegung: Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Vom Abgangspunkt  $O$  aus sei die Koordinate  $y$  positiv nach oben gerechnet. Nach  $t$  sec vom Beginn der Geschößbewegung in der Luft ab befinde sich das Geschöß in  $y$  m Höhe über  $O$ . Dabei sei seine Geschwindigkeit  $v$  und seine durch den Luftwiderstand bewirkte Verzögerung  $c \cdot f(v)$ , so ist die Differentialgleichung der Bewegung  $\frac{dv}{dt} = -g - cf(v)$ . Daraus

$$t = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{g + cf(v)}. \quad (1)$$

Ersetzt man  $\frac{dv}{dt}$  durch  $\frac{v \cdot dv}{dy}$  und integriert, so wird]

$$y = - \int_{v_0}^v \frac{v \cdot dv}{g + cf(v)}. \quad (2)$$

Die Gleichung (1) gestattet, die Geschwindigkeit zu berechnen, die

das Geschoß bei seiner Aufwärtsbewegung nach  $t$  sec besitzt; und die Gleichung (2) liefert die Geschwindigkeit  $v$  in der Höhe  $y$ . Man wird diese Berechnungen stückweise ausführen, falls die Abnahme des Luftgewichts  $\delta(y)$  mit der Höhe  $y$  berücksichtigt werden soll, und wird Schritt für Schritt den Wert von  $c$  dementsprechend ändern; (selbstverständlich kann auch ein laufendes graphisches Integrationsverfahren angewendet werden). Häufig wird übrigens eine Überschlagsrechnung genügen, bei der ein konstanter Mittelwert von  $\delta$  und damit von  $c$  benützt wird. In diesem Fall wird man für den betreffenden Wert von  $c$  die Integrale (1). und (2) durch mechanische Quadratur mittels des Integrirers von Abdank-Abakano-witz oder nach dem graphischen Verfahren von C. Runge gewinnen.

Wenn das Geschoß in der Höhe momentan zur Ruhe gekommen ist ( $v = 0$ ), sei  $t = t_1$  und  $y = Y$  geworden. Diese gesamte Steigzeit  $t_1$  und diese maximale Steighöhe  $Y$  ergeben sich aus:

$$t_1 = + \int_0^{v_0} \frac{dv}{g + c f(v)}; \quad (3)$$

$$Y = + \int_0^{v_0} \frac{v \cdot dv}{g + c f(v)}. \quad (4)$$

Wenn speziell das quadratische Luftwiderstandsgesetz, Verzögerung  $c f(v) = c v^2$ , zugrunde gelegt werden kann, so ergibt sich durch Integration von  $-dt = \frac{dv}{g + c v^2}$  zunächst:  $-t \cdot \sqrt{g c}$   
 $= \arctg \frac{v \sqrt{\frac{c}{g}} - v_0 \sqrt{\frac{c}{g}}}{1 + v v_0 \frac{c}{g}}$ , oder da  $\arctg \frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha \beta} = \arctg \alpha \pm \arctg \beta$  ist,

durch Auflösung nach  $v$  die folgende Gleichung für die Geschwindigkeit  $v$  nach der beliebigen Zeit  $t$ :

$$v = \frac{v_0 \sqrt{\frac{c}{g}} \cos(t \sqrt{g c}) - \sin(t \sqrt{g c})}{v_0 \frac{c}{g} \sinh(t \sqrt{g c}) + \sqrt{\frac{c}{g}} \cos(t \sqrt{g c})}. \quad (5)$$

Wird  $v = \frac{dy}{dt}$  nochmals, nach  $t$ , integriert, so folgt

$$c \cdot y = \log \text{nat} \left[ \cos(t \sqrt{g c}) + v_0 \sqrt{\frac{c}{g}} \sin(t \sqrt{g c}) \right], \quad (6)$$

als ein Ausdruck für die nach der Zeit  $t$  erreichte Steighöhe  $y$ .

Setzt man speziell  $v = 0$ , so erhält man die ganze Steigzeit  $t_1$  und die ganze Steighöhe  $Y$  aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg}(t_1 \sqrt{gc}) = v_0 \sqrt{\frac{c}{g}}; \quad (7)$$

$$Y = \frac{1}{2c} \log \left( 1 + v_0^2 \frac{c}{g} \right). \quad (8)$$

Der hier vorkommende Ausdruck  $\sqrt{\frac{c}{g}}$  hängt mit der oben erwähnten „Fallschirmgeschwindigkeit“  $v_f$  dadurch zusammen, daß beim quadratischen Gesetz ist

$$\sqrt{\frac{g}{c}} = v_f; \quad (9)$$

denn, wenn  $P$  das Geschößgewicht ist, so ist  $v_f$  der obere Grenzwert, dem die Geschwindigkeit  $v$  derart zustrebt, daß mehr und mehr der Luftwiderstand  $\frac{P}{g} \cdot c \cdot v^2$  gleich dem Gewicht  $P$  wird.

b) Absteigende Bewegung. Im obersten Punkt  $O_1$  ist die Geschwindigkeit des Geschosses Null. Von  $O_1$  aus sei jetzt die Koordinate  $y$  positiv nach abwärts gerechnet, auch die Zeiten  $t$  seien von  $O_1$  ab gezählt. Durch Integration der Bewegungsgleichung  $\frac{dv}{dt} = +g - cf(v) = \frac{v \cdot dv}{dy}$  erhält man

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g - cf(v)}; \quad t_2 = \int_0^{v_*} \frac{dv}{g - cf(v)}, \quad (10)$$

$$y = \int_0^v \frac{v \, dv}{g - cf(v)}; \quad Y = \int_0^{v_*} \frac{v \, dv}{g - cf(v)}. \quad (11)$$

Die letztere Gleichung (11) liefert, da die maximale Steighöhe  $Y$  schon aus Gleichung (4) bestimmt ist, die Auffallgeschwindigkeit  $v_*$ . Und mittels der Gleichung (10) läßt sich die ganze Zeit  $t_2$  für das Absteigen ermitteln. Das Geschöß ist dann im ganzen  $t_1 + t_2$  sec in der Luft.

Meistens wird man, wenigstens bei rotierenden Langgeschossen in diesem zweiten Teil der Geschößbewegung, wo das Geschöß mit dem Bodenteil vorausfliegt, einen wesentlich größeren Koeffizienten  $c$  anzuwenden haben, als im ersten Teil.

Speziell bei Annahme des quadratischen Gesetzes hat man als Bewegungsgleichung  $\frac{dv}{dt} = g - cv^2$ . Durch Partialbruchzerlegung läßt sich leicht integrieren; und man erhält für die Berechnung

der Geschwindigkeit  $v$ , die nunmehr das Geschöß nach der Zeit  $t$  vom obersten Punkt  $O_1$  ab besitzt:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{2\sqrt{gc}} \log \text{nat} \frac{\sqrt{\frac{g}{c}} + v}{\sqrt{\frac{g}{c}} - v}, \\ \text{oder} \\ v &= \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{gc}} - 1}{e^{2t\sqrt{gc}} + 1} = \sqrt{\frac{g}{c}} \mathfrak{I}_g(\sqrt{gc} \cdot t). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wird diese Gleichung, worin  $v = \frac{dy}{dt}$  ist, nochmals integriert, so resultiert die folgende Beziehung für den Weg  $y$ , den das Geschöß bis zu der Zeit  $t$  von oben ab zurückgelegt hat,

$$y = \frac{1}{c} \log \text{nat} \frac{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}{2} = \frac{1}{c \cdot 0,4343} \cdot \log \text{vulg} \mathfrak{Cof}(\sqrt{gc} t). \quad (13)$$

Und durch Elimination von  $t$  aus (12) und (13) oder auch durch Integration der ursprünglichen Bewegungsgleichung in der Form  $\frac{v \cdot dv}{dy} = g - cv^2$ , erhält man die Geschwindigkeit  $v$  nach Zurücklegen des Weges  $y$  von oben ab

$$v = \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2cy}}}. \quad (14)$$

Spezialisiert man (12) und (13) für den Auffallpunkt, wo  $y = Y$ ;  $v = v_*$ ;  $t = t_*$  geworden ist, so gewinnt man, da die maximale Steighöhe  $Y$  bereits aus (8) bekannt ist, die ganze Zeit  $t_*$  der Abwärtsbewegung aus:

$$Y = \frac{1}{c \cdot 0,4343} \cdot \log^{10} \mathfrak{Cof}(\sqrt{gc} t_*) \quad (15)$$

und die Auffallgeschwindigkeit  $v_*$  alsdann aus:

$$v_* = \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \mathfrak{I}_g(\sqrt{gc} t_*). \quad (16)$$

c) Schuß lotrecht abwärts mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Beim Schuß lotrecht aufwärts beginnt das Geschöß, nachdem es im obersten Punkt  $O_1$  angekommen ist, mit der Anfangsgeschwindigkeit Null abwärts zu fallen. Nunmehr sei statt dessen angenommen, daß das Geschöß von  $O_1$  aus mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  abwärts sich bewege; (Schießen vom Flugzeug aus abwärts; Schießen in Wasser usw.). In diesem Fall erhält man, wenn wiederum das quadratische Luftwiderstandsgesetz verwendet werden kann, an Stelle

der obigen Gleichung (13) die folgende Gleichung für den nach  $t$  sec von oben zurückgelegten Weg  $y$ :

$$y = \frac{1}{c \cdot 0,4343} \cdot \log \left\{ v_0 \cdot \sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \sin(\sqrt{gct}) + \cos(\sqrt{gct}) \right\}. \quad (17)$$

Tabellen für die hyperbolischen Funktionen  $\text{Sin}$ ,  $\text{Cos}$ ,  $\text{Tg}$  findet man außer im Anhang dieses Bandes bei: W. Ligowski: *Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen*, Berlin 1890, Verlag von Ernst und Korn; sowie bei E. Jahnke und F. Emde: *Funktions-tafeln*, Leipzig 1909, Verlag von B. G. Teubner.

Anmerkung. Es ist mehrmals — teils im Ernst, teils im Scherz — die rein akademische Frage aufgeworfen worden, ob es möglich ist, daß ein lotrecht aufwärts abgefeuertes Geschöß gewöhnlicher Größe dauernd die Erde verlassen würde, wenn es mit außerordentlicher Anfangsgeschwindigkeit (rechnerisch mit  $v_0 = \infty$ ) abgehen könnte. Diese Frage kann nicht ohne weiteres bejaht werden, da mit der Geschwindigkeit des Geschosses auch dessen Luftwiderstand wächst. Denkt man sich, als extremen Fall, z. B. eine kleine Kugel aus Holundermark oder eine Flaumfeder mit enormer Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach oben geschleudert, so wird es hierbei jedermann begreiflich finden, daß ein solcher Körper nicht unendlich hoch steigen könnte, da gegenüber sehr großen Geschwindigkeiten ein deformierbarer Körper, z. B. eine Flüssigkeit oder ein Gas, wie ein fester Körper sich verhält. Theoretische Berechnungen, die St. Robert über diese Frage mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Integralrechnung angestellt hat, findet man in den Auflagen dieses Bandes I von 1910, 1917, 1918 auf S. 234–237; sie sind in diese Neuauflage nicht aufgenommen, da die Grundlagen der betr. Entwicklungen allzu unsicher und unvollständig sind.

Zahlenbeispiele zu b) und c). 1. Ein Geschöß vom Querschnitt  $0,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  und vom Gewicht  $0,01 \text{ kg}$  war lotrecht in die Höhe geschossen worden und hat eine maximale Steighöhe von  $2600 \text{ m}$  erreicht. Es kommt nun mit Anfangsgeschwindigkeit Null wieder herab, mit dem flachen Geschößboden vorausliegend; es sei das quadratische Luftwiderstandsgesetz verwendet; dabei sei  $c = 0,0089$ . Gesucht die Gesamtzeit  $t_2$  für die Abwärtsbewegung und die Auffallgeschwindigkeit  $v_*$ . Mit den Ausdrücken (15) und (16) ergibt sich  $t_2 = 56 \text{ sec}$ ; sodann  $v_* = 41 \text{ m/sec}$ .

2. Ein Geschöß vom Querschnitt  $R^2 \pi = 0,025 \text{ (m}^2\text{)}$  und vom Gewicht  $P = 14 \text{ (kg)}$  werde mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 150 \text{ (m/sec)}$  lotrecht abwärts in eine Wassermasse vom spez. Gewicht  $\delta = 1050 \text{ (kg/m}^3\text{)}$  eingeschossen. In welcher Tiefe  $y$  befindet es sich nach  $t = 0,1 \text{ sec}$ ? Gemäß den Überlegungen, die in § 9 (Anfang) bei der theoretischen Ableitung des quadratischen Widerstandsgesetzes angestellt wurden, hat man hier bei Wasser als Ausdruck für den Widerstand anzunehmen:  $W = R^2 \pi \cdot \frac{\delta \cdot i}{9,81} \cdot v^2$ . Der Formkoeffizient des Spitzgeschosses sei hierbei  $i = 0,3$ . Dividiert man  $W$  durch die Geschößmasse  $\frac{P}{9,81}$ , so erhält man  $c = \frac{0,3 \cdot 0,025 \cdot 1050}{14}$ . Damit wird mittels Gleichung (17) die Eintauchtiefe nach  $0,1 \text{ sec}$ :  $y = 7 \text{ m}$ .

## B. Der nahezu lotrechte Schuß.

Bei dem folgenden Verfahren ist vorausgesetzt, daß der Winkel  $\psi$  der Flugbahntangente gegen die Vertikale so klein bleibt, daß in den Reihenentwicklungen von  $\sin \psi$  und  $\cos \psi$  je nur die ersten Glieder genommen zu werden brauchen,  $\sin \psi = \psi$ ;  $\cos \psi = 1$ . Also kommt beim Schuß aufwärts nicht der ganze aufsteigende Ast in Betracht, sondern nur der betreffende rasante Teil davon, der bei dem Schießen nach Flugzeugen praktisch allein benützt wird.

a) Schuß schief aufwärts. Es sei  $(xy)$  der Bahnpunkt, der nach der Zeit  $t$  erreicht wird,  $v$  die Bahngeschwindigkeit,  $cf(v)$  die Verzögerung durch den Luftwiderstand;  $\psi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$  die Neigung der Bahntangente gegen die Vertikale in diesem Punkt;  $\psi_0$  der Abgangswinkel gegenüber der Vertikalen;  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit. Die allgemeinen Flugbahngleichungen von § 17 werden, da  $\cos \psi = \sin \vartheta$ ,  $\sin \psi = \cos \vartheta$ ,  $d\psi = -d\vartheta$  ist, nunmehr

$$d(v \cos \psi) = -g \cdot dt - cf(v) \cos \psi \cdot dt \quad (18)$$

$$d(v \sin \psi) = -cf(v) \cdot \sin \psi \cdot dt \quad (19)$$

$$g \cdot dx = +v^2 \cdot d\psi \quad (20)$$

$$g \cdot dt = +v \cdot \operatorname{cosec} \psi \cdot d\psi \quad (21)$$

$$g \cdot dy = +v^2 \cdot \cotg \psi \cdot d\psi \quad (22)$$

$$g \cdot d(v \sin \psi) = -cf(v) \cdot v \cdot d\psi. \quad (23)$$

Unter der obigen Voraussetzung über die Kleinheit von  $\psi$  erhält man aus (18):  $dt = -\frac{dv}{g + cf(v)}$  und wenn man links von  $t = 0$  bis  $t$  und rechts von  $v = v_0$  bis  $v = 1200$  und von  $v = 1200$  bis  $v$  integriert, so wird

$$t = -\int_{v_0}^v \frac{dv}{g + cf(v)} = M(v) - M(v_0), \quad \text{wobei} \quad M(v) = \int_{v_0}^{1200} \frac{dv}{g + cf(v)} \quad (24)$$

und

$$M(v_0) = \int_{v_0}^{1200} \frac{dv}{g + cf(v)}.$$

Ferner wird aus (21)  $\frac{d\psi}{\psi} = g \cdot \frac{dt}{v} = -g \cdot \frac{dv}{v(g + cf(v))}$ . Durch Integration von  $\psi_0$  bis  $\psi$  und  $v_0$  bis 1200 und von 1200 bis  $v$  erhält man für die jeweilige Bahntangentenneigung  $\psi$  die Beziehung

$$\psi = \frac{\psi_0}{G(v_0)} \cdot G(v), \quad (25)$$



wo  $G(v) = e^{N(v)}$  und  $G(v_0) = e^{N(v_0)}$  ist. Hier bedeuten:

$$N(v) = g \cdot \int_v^{1200} \frac{dv}{v(g + cf(v))}; \quad N(v_0) = g \cdot \int_{v_0}^{1200} \frac{dv}{v(g + cf(v))}.$$

Die Gleichungen (20) und (22) endlich liefern  $x$  und  $y$ ; nämlich aus  $dx = + \frac{v^2}{g} \cdot d\psi = - \frac{\psi_0}{G(v_0)} \cdot \frac{G(v) \cdot v \cdot dv}{g + cf(v)}$  wird erhalten:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\psi_0}{G(v_0)} [P(v) - P(v_0)], \text{ wobei } P(v) = \int_v^{1200} \frac{G(v) \cdot v \cdot dv}{g + cf(v)} \\ \text{und} \quad P(v_0) &= \int_{v_0}^{1200} \frac{G(v) \cdot v \cdot dv}{g + cf(v)} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ist, und aus  $g \cdot dy = v^2 \cdot \frac{d\psi}{\psi} = - \frac{g \cdot v \cdot dv}{g + cf(v)}$  folgt:

$$\left. \begin{aligned} y &= Q(v) - Q(v_0), \text{ wobei } Q(v) = \int_v^{1200} \frac{v \cdot dv}{g + cf(v)} \\ \text{und} \quad Q(v_0) &= \int_{v_0}^{1200} \frac{v \cdot dv}{g + cf(v)}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

b) Schuß schief abwärts. Der Koordinatenanfang sei jetzt wiederum in den Abgangspunkt verlegt, die  $y$ -Achse jedoch vertikal abwärts positiv gerichtet. Die einzige Änderung gegenüber dem vorhergehenden Fall A ist dann die, daß statt  $+g + cf(v)$  jetzt  $-g + cf(v)$  zu nehmen ist. Dem entsprechend sind die Funktionen  $M, G, N, P, Q$  jetzt mit  $M_1, G_1, N_1, P_1, Q_1$  bezeichnet.

Zu dem vorstehenden vom Verfasser aufgestellten System von Gleichungen und Funktionen wurden von den ehemaligen Assistenten Hptm. Bensberg und Oblt. Becker auf Grund des einheitlichen Luftwiderstandsgesetzes von Siacci die Zahlenwerte bis zum Ende der Siaccischen Tabelle ( $v = 1200$  m/sec) mit Hilfe des Integralkalculus berechnet und in den Diagrammen I und II ( $I_a$  bis  $I_d$  und  $II_a$  bis  $II_d$ ) graphisch dargestellt. Diese Diagramme liefern die Werte von  $G, P, M, Q, G_1, P_1, M_1, Q_1$  für  $c = 6; 3; 1; 0,5; 0,2; 0,1$ ; speziell die Werte für  $M$  und  $Q$  auch noch für  $c = 5; 4; 2$ . Letztere Funktionen  $M$  und  $Q$  sind auch in den Tabellen 15 des Anhangs gegeben. Die Interpolation für zwischenliegende Werte  $c$  ist nicht unter allen Umständen möglich; man erhält aber wenigstens mit den in den Diagrammen enthaltenen Kurven zwei Grenzen für die Flugbahn.

## Zusammenstellung.

I A. Schuß lotrecht aufwärts;  
Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ ;  $y$  nach  
oben positiv gerechnet.

Ganze Steigzeit:

$$t_1 = M(0) - M(v_0),$$

ganze Steighöhe:

$$Y = Q(0) - Q(v_0),$$

II A. Nahezu lotrechter Schuß  
aufwärts; Anfangsgeschwindig-  
keit  $v_0$ .

Flugzeit:

$$t = M(v) - M(v_0),$$

Bahnneigung:

$$\psi = \frac{\psi_0}{G(v_0)} \cdot G(v),$$

Abszisse:

$$= \frac{\psi_0}{G(v_0)} \cdot [P(v) - P(v_0)],$$

Ordinate:

$$y = Q(v) - Q(v_0).$$

I B. Schuß lotrecht abwärts aus  
der Höhe  $Y$ ; Anfangsgeschwindig-  
keit  $v_0$ ;  $y$  nach unten positiv.

Auffallgeschwindigkeit  $v_1$ :

$$Y = Q_1(v_0) - Q_1(v_1),$$

ganze Schußzeit:

$$t_2 = M_1(v_0) - M_1(v_1).$$

II B. Nahezu lotrechter Schuß  
abwärts; Anfangsgeschwindig-  
keit  $v_0$ .

Flugzeit:

$$t = M_1(v) - M_1(v_0),$$

Bahnneigung:

$$\psi = \frac{\psi_0}{G_1(v_0)} \cdot G_1(v),$$

Abszisse:

$$x = \frac{\psi_0}{G_1(v_0)} \cdot [P_1(v) - P_1(v_0)],$$

Ordinate:

$$y = Q_1(v) - Q_1(v_0).$$

Schlüssel der Bezeichnungen:  $x, y$  (in m) die Koordinaten des Flugbahn-  
punktes, der nach  $t$  sec erreicht wird;  $v$  (m/sec) die Geschwindigkeit;  $\psi$  die  
Neigung der Bahntangente gegen die Vertikale in diesem Punkte;  $\psi_0$  die Ver-  
tikalneigung der Anfangstangente der Bahn;  $cf(v)$  die Verzögerung durch den  
Luftwiderstand; dabei ist das einheitliche Gesetz von Siacci (Tabelle 6) zu-  
grunde gelegt; d. h. es ist

$$f(v) = 0,2002 \cdot v - 48,05 + \sqrt{(0,1648 \cdot v - 47,95)^2 + 9,6} + \frac{0,0442 v (v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}};$$

$c = \frac{\delta \cdot (2R)^2 \cdot 865 \cdot i}{1,206 \cdot P}$ ;  $\delta$  das mittlere Tagesluftgewicht bei dem Geschoßflug ( $\text{kg/m}^3$ );  
 $2R$  das Kaliber in m;  $P$  das Geschoßgewicht in kg; der Formkoeffizient  $i$  soll  
nach Siacci = 1 sein für die früheren Kruppschen Normalgeschosse mit ogivaler  
Spitze von 2 Kalibern Abrundungsradius.

Ein Zahlenbeispiel für den lotrechten Schuß aufwärts ist im Anhang bei  
den Diagrammen gegeben.

## C. Bombenabwurf.

Ein Flugzeug bewege sich bei Windstille in der Höhe  $Y$  (m) über  
dem Erdboden in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit  
 $v_0$  bezüglich des Erdbodens. In einem bestimmten Augenblick, näm-  
lich wenn die mitgeführte Bombe in einem bestimmten Punkt  $A$  an-

gekommen ist, der lotrecht über dem Punkt  $A_0$  des Erdbodens sich befindet, läßt man die (mit ihrer Längsachse horizontal gelagerte) Bombe ohne Anfangsgeschwindigkeit bezüglich des Flugzeugs fallen. Die Bombe wird alsdann von dem Punkt  $A$  aus nicht lotrecht längs  $AA_0$  bezüglich des Erdbodens herabfallen, sondern sie wird, da sie im Moment des Loslassens die horizontale Geschwindigkeit  $v_0$  des Flugzeugs besitzt, eine krummlinige Bahn beschreiben, wobei die Anfangstangente horizontal und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ist.  $A$  sei der Koordinatenanfang eines Koordinatensystems der  $x, y$ ; die  $x$ -Achse horizontal und positiv in der Fahrtrichtung; die  $y$ -Achse vertikal und positiv nach unten.

Wenn es gilt, ein Ziel  $Z$  zu treffen, das in der Richtung der positiven  $x$ -Achse auf dem horizontalen Erdboden sich befindet, so handelt es sich um die Kenntnis zweier Größen  $X$  und  $T$ . Erstens um die Wurfweite  $X$  auf dem Erdboden oder um die Entfernung des Ziels  $Z$  vom Fußpunkt  $A_0$  der Stelle  $A$ , an der sich die Bombe im Augenblick des Loslassens befand. Denn man wird die Bombe natürlich nicht dann freilassen, wenn sie sich lotrecht über dem Ziel  $Z$  befindet, sondern vorher; die Visierlinie muß vor dem Fallenlassen unter einem Winkel  $\alpha$  oder  $ZA A_0$  gegen die Vertikale eingestellt sein, der sich ergibt aus  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{Y}$ . Die Bombe wird freigelassen in dem Augenblick, in dem die so eingestellte Visierlinie gerade durch das Ziel  $Z$  geht. Außerdem interessiert aber noch die Kenntnis der Fallzeit  $T$ ; denn wenn in der Flugrichtung Wind mit der Geschwindigkeit  $w$  (m/sec) weht, so wird die Wurfweite  $X$  um den Betrag  $w \cdot T$  bei Rückenwind vergrößert, bei Gegenwind verkleinert.

Zur Berechnung von  $X$  und  $T$ , allgemeiner zur Berechnung der Bahnelemente  $x$  und  $t$  in Funktion von  $y$ , wird man am besten stückweise Berechnung der Bahn durchführen, etwa nach der Methode von Veithen-Kutta (§ 36) oder nach der Methode von Frh. v. Zedlitz-Stübler (§ 38). Falls es sich nur um eine rohe Überslagsberechnung handelt, genügt es meistens, die (nicht streng zutreffende) Voraussetzung zu verwenden, daß die beiden Differentialgleichungen (1) und (2) von § 17 für die Bewegung der Bombe — (in horizontaler Richtung allein unter dem Einfluß des Luftwiderstands, in vertikaler Richtung unter dem Einfluß von Luftwiderstand und Schwere) — voneinander unabhängig seien. Die betreffende Annahme läuft darauf hinaus, daß  $cf(v) \cdot \cos \vartheta = cf(v \cos \vartheta)$  und  $cf(v) \cdot \sin \vartheta = cf(v \sin \vartheta)$  vorausgesetzt wird, was genau nur für das lineare Gesetz  $cf(v) = c \cdot v$  der Fall ist. Wenn man das quadratische Luftwiderstandsgesetz verwendet und zugleich einen Korrektions-

faktor anbringt, so erhält man leicht die folgenden Gleichungen, wovon die erste aus der als bekannt angenommenen Flughöhe  $Y$  die Gesamtfallzeit  $T$ , alsdann die zweite die Wurfweite  $X$  zu berechnen gestattet:

$$c \cdot 0,4343 \cdot Y = \log \text{vulg } \mathcal{C} \circ f(\sqrt{g c} T), \quad (28)$$

$$X = \frac{1,85}{c} \cdot \log \text{vulg } (1 + c v_0 T). \quad (29)$$

Hier bedeutet:  $v_0$  (m/sec) die Flugzeuggeschwindigkeit;  $2R$  (m) das Kaliber der Bombe;  $P$  (kg) deren Gewicht;  $i$  deren Formkoeffizient;  $\delta$  (kg/m<sup>3</sup>) das durchschnittliche Luftgewicht;  $Y$  (m) die Höhe des Flugzeugs über dem Boden;  $X$  (m) die Wurfweite;  $T$  (sec) die Fallzeit;  $c = \frac{0,014 \cdot R^2 \pi \cdot \delta \cdot i \cdot g}{1,206 \cdot P}$ ; für  $\log \mathcal{C} \circ f$  vgl. die Tabelle 14 im Anhang.

Beispiele:

1. mit  $c = 2,92 \cdot 10^{-4}$ ;  $Y = 3440$  m;  $v_0 = 30$  m/sec wird  $T = 31,2$  sec;  $X = 660$  m;
2. mit  $c = 1,96 \cdot 10^{-4}$ ;  $Y = 3150$  m;  $v_0 = 30$  m/sec wird  $T = 28,2$  sec;  $X = 680$  m.

## § 40. Einiges über das Fernschießen.

(Bearbeitet von O. von Eberhard.)

Als Fernschießen soll eine Feuertätigkeit dann bezeichnet werden, wenn die dabei zur Verwendung kommenden Flugbahnen zum größeren Teil in Höhen verlaufen, wo die Luftdichte nur noch so gering ist, daß der in diesen Höhen befindliche Teil der Flugbahn sich mit seinen Eigenschaften der Flugbahn des luftleeren Raumes nähert.

Wenn es auch den Anschein haben könnte, daß solche Flugbahnen sich von den gewöhnlich in der Ballistik behandelten nur quantitativ unterscheiden, so ist der Unterschied doch in vielen Beziehungen ein so wesentlicher, daß ihre gesonderte Betrachtung notwendig wird. Der Hauptunterschied liegt in dem Verhalten der Fernflugbahnen gegenüber den Tageseinflüssen (vgl. § 15). Der Luftwiderstand wird, wie im Abschnitt 2 dargelegt wurde, stets als proportional der Luftdichte angenommen, und die Schießergebnisse der Fernflugbahnen lassen, wie gleich bemerkt sein möge, den Schluß zu, daß diese Annahme mit großer Annäherung auch für Luftverdünnungen bis zu 1 g/m<sup>3</sup> zutrifft.

Die Luftdichte ist direkt proportional dem Luftdruck und umgekehrt proportional der absoluten Temperatur<sup>1)</sup>. Es kann also bei niedrigem Luftdruck und niedriger Temperatur dieselbe Luftdichte vorhanden sein, wie bei hohem Luftdruck und hoher Temperatur.

<sup>1)</sup> Unter Vernachlässigung des Gehaltes der Luft an Wasserdampf, bzw. unter Vernachlässigung des Umstandes, daß die in 1 obm Luft enthaltene Menge Wasserdampf in den verschiedenen Höhen nicht dem dort jeweils herrschenden Luftdruck proportional ist.

Bei Flugbahnen mit geringen Scheitelhöhen, wie sie bei den normalen Flachbahnen der Infanterie- und Feldkanonengeschosse vorliegen, wird bei gleichem Bodenluftgewicht nahezu die gleiche Flugbahn erhalten, gleichgültig, ob das Bodenluftgewicht durch niedrigen Druck und gleichzeitig niedrige Temperatur, oder durch hohen Druck und hohe Temperatur bedingt wird.

Beide Fälle gleichen Bodenluftgewichts weisen aber einen grundlegenden Unterschied auf, insofern als die Luftgewichte am Boden zwar gleich sind, in mittleren Höhen über dem Boden jedoch immer weiter auseinanderstreben, um sich erst in ganz großen Höhen wieder einander zu nähern. Die Folge ist, daß man schon beim Bogenschuß der Feldartillerie und noch mehr bei den (Flughöhen von einigen Kilometern erreichenden) Bahnen der schweren Artillerie bei gleichem Bodenluftgewicht je nach der Entstehung dieses Bodenluftgewichts nicht mehr gleich weit schießt, was Anlaß dazu gegeben hat, ein fiktives Luftgewicht, „das ballistische Luftgewicht“, einzuführen. Bei den Fernflugbahnen ist nun der Unterschied gegenüber den Flachbahnen so groß, daß ihr typisches Verhalten ein ganz anderes wird. Zwei Fernbahnen sind nämlich nahezu gleich, wenn *ceteris paribus* der Barometerstand am Boden der gleiche ist, gleichgültig, welche Temperatur am Boden herrscht. Das Zuviel an Luftdichte in der Nähe des Bodens bei der einen Flugbahn gegenüber der anderen wird gerade kompensiert durch das Zuwenig an Luftdichte gegenüber der anderen, welches in diesem Falle in den oberen Schichten der Atmosphäre statthat. In der Tat wird in beiden Fällen vom Geschöß die gleiche Luftmasse im Verlauf des ganzen Flugbahnkanals verdrängt. Ein weiterer Unterschied der Fernflugbahnen gegenüber den gewöhnlichen ist der, daß der Windeinfluß ein viel geringerer ist, als unter gewöhnlichen Verhältnissen. Auch dies ist leicht einzusehen, denn die Geschößgeschwindigkeit ist im Verhältnis zur Windgeschwindigkeit so groß, daß der prozentuale Einfluß viel kleiner werden muß.

Schließlich ist der Einfluß der Erdrotation auf die seitliche Lage sehr beträchtlich (vgl. § 53). Der Einfluß auf die Schußweite ist ebenfalls nicht mehr klein, tritt jedoch praktisch zurück, weil er im Verhältnis zur Geschößstreuung klein bleibt.

Die Flugbahn selbst weist insofern Änderungen gegenüber den normalen Verhältnissen auf, als die größte Schußweite bei Abgangswinkeln von etwa  $55^\circ$  erreicht wird, als ferner die Bahn im oberen Teile der Parabel des luftleeren Raumes ähnlich wird. Der Punkt kleinster Geschößgeschwindigkeit, größter Bahnkrümmung liegt nahe dem Gipfel. Im absteigenden Ast nimmt die Geschwindigkeit zu bis zu einem Maximum, wo die Komponente der Erdbeschleunigung

längs der Bahntangente gleich der Luftwiderstandsverzögerung wird. Die gegen den Boden hin wachsende Luftdichte bewirkt dann aber eine nochmalige Verzögerung des Geschosses.

Praktisch liegen die betreffenden Grenzgeschwindigkeiten, z. B. bei einem 21-cm-Geschoß mit schlanker Spitze und etwa 120 kg Gewicht so hoch (über 800 m/sec), daß die Geschosse mit einer die Schallgeschwindigkeit weit übersteigenden Endgeschwindigkeit und bei Abgangswinkeln von  $55^\circ$  mit Auftreffwinkeln von etwa  $60^\circ$  herabkommen. Sie kündigen sich also in der Nähe des Auftreffortes nicht durch ein vorheriges Sausen oder einen vor dem Geschöß eintreffenden Kopfwellenknall an, auch der Abschußknall wird erst viel später eintreffen können, sondern sie schlagen unvermittelt ein, während die Knalle erst einige Zeit nach der etwaigen Geschößdetonation in der Nähe des Auftreffpunktes hörbar werden können.

Daß die Flugbahn größter Schußweite bei etwa  $55^\circ$  liegt, ist leicht zu verstehen. Wenn man weit schießen will, sucht man die dichte Luftschicht in der Nähe des Erdbodens möglichst senkrecht zu durchstoßen, damit das Geschöß möglichst wenig Bewegungsenergie an das Luftmeer abgibt. Je steiler man schießt, um so geringer ist also der Energieverlust. Je steiler man aber in der praktischen Luftleere ankommt, um so kleiner wird die Schußweite, deren Maximum im luftleeren Raume ja bei  $45^\circ$  liegt. Das Maximum mit Rücksicht auf beide Einflüsse muß also zwischen etwa  $44^\circ$  bei homogener Atmosphäre und  $90^\circ$  liegen. Es liegt in der Tat bei  $55^\circ$ . Anlaß zum Studium dieser Verhältnisse bot ein Schuß, der am 21. 10. 1914 in Meppen abgegeben wurde. Er sollte — nach der gewöhnlich verwendeten Siaccischen Methode in einem Stück berechnet — 38 km Schußweite ergeben, während das Geschöß zur allgemeinen Überraschung 49 km flog. Die daraufhin angestellten Untersuchungen zeigten bald, daß bei richtiger Berücksichtigung der Abnahme der Luftdichte mit der Höhe der Ertragsbereich eines großkalibrigen Geschützes mit großer Anfangsgeschwindigkeit in bis dahin ungeahnter Weise gesteigert werden konnte. Die Beschränkung lag schließlich, abgesehen von der Lebensdauer des Rohres, nur in den Grenzen, welche der Anfangsgeschwindigkeit und der Kalibersteigerung gesetzt waren. Auf diese beiden in erster Linie innerballistischen Fragen kann hier nicht eingegangen werden.

Vielfach ist in der Literatur die irrige Ansicht ausgesprochen worden, das Geschöß fliege bei Fernbahnen in seinem oberen Teil im luftleeren Raum. Das ist vom Standpunkte des Meteorologen aus natürlich nicht richtig und vom Standpunkte des Ballistikers zum Glück nicht richtig. Denn wenn der Raum in der Gegend des Flugbahngipfels luftleer wäre, würde das Geschöß der richtenden Kraft

des Luftwiderstandsmoments auf den Geschoßkreisel entbehren. Die Geschoßachse würde in diesem am stärksten gekrümmten Teile der Flugbahn der Bahntangente nicht mehr folgen, sondern eine Poinssotsche Präzessionsbewegung mit kleiner Amplitude um die nach schräg aufwärts gerichtete Impulsachse beginnen, d. h. sie würde bei den hier vorliegenden Verhältnissen in denjenigen Teilen des absteigenden Astes, wo das Luftwiderstandsmoment wieder beträchtliche Werte erreicht, mit so großem Winkel gegen die Bahntangente ankommen, daß wahrscheinlich ein Querschläger eintreten würde. Zum mindesten aber würde der Formwert im absteigenden Aste sehr verschlechtert und die Flugzeit gegenüber der errechneten wesentlich vergrößert werden. Da dies bei passend gewählten Verhältnissen nicht eintritt, ist bewiesen, daß der Luftwiderstand auch in den obersten Schichten genügend Richtkraft für die Impulsachse besitzt.

Nachdem so die Verhältnisse qualitativ beleuchtet sind, wird es von Interesse für den Leser sein, wenn er sieht, wie eine Fernflugbahn praktisch berechnet wird. Grundsätzlich ist natürlich jedes rechnerische Verfahren zulässig, bei welchem man die Flugbahn in Teilbogen zerlegt und auf den einzelnen Bogen der Abnahme des Luftgewichts mit der Höhe Rechnung trägt, ebenso geeignet ist natürlich ein graphisches Verfahren, z. B. das von Cranz und Rothe. Es soll hier nur als Beispiel gezeigt werden, wie die Rechnung mittels der bequemen Tabellen von Fasella durchgeführt werden kann.

Man benützt zur Berechnung irgendeine Normalluftgewichtstabelle, welche mittleren Verhältnissen entspricht; beispielsweise ist hier angenommen, daß folgende Verhältnisse normal seien:

am Boden . . . . .	$\delta_0$	= 1,2450 kg/m <sup>3</sup> ,
in 2000 m Höhe . . . .	$\delta_{2000}$	= 1,0123 "
" 6000 " " . . . .	$\delta_{6000}$	= 0,6522 "
" 10000 " " . . . .	$\delta_{10000}$	= 0,4040 "
" 14000 " " . . . .	$\delta_{14000}$	= 0,2287 "
" 18000 " " . . . .	$\delta_{18000}$	= 0,1225 "
" 20500 " " . . . .	$\delta_{20500}$	= 0,0844 "

Die Flugbahn zerlegt man zweckmäßig in Stufen gleicher Höhe. Wie hoch man die einzelnen Stufen wählt, hängt von der Genauigkeit ab, welche man erstrebt. Über die erzielte Genauigkeit erhält man ein Bild, wenn man die Berechnung nochmals mit doppelter und mit halber Stufenhöhe wiederholt. Die Abnahme der Differenzen der Endresultate gibt ein gutes Kriterium der Genauigkeit. Im allgemeinen genügt es, mit Stufen von 4000 m Höhe zu rechnen und das Luftgewicht jeder Stufe gleich dem in der Mitte der Stufe herrschenden zu wählen.

In der Bezeichnung von Fasella ist

$$c_0' = \frac{P}{(2R)^2 1000}; \quad \begin{array}{l} P \text{ in kg,} \\ R \text{ " m.} \end{array}$$

Ferner kommt in der Siacci-III-Lösung, die den Fasellaschen Tabellen zugrunde liegt, der Korrektionsfaktor  $\beta$  vor. Um für dieses  $\beta$  bei der Berechnung in einzelnen Bogen geeignete Werte zu finden, diene folgende Überlegung. Wir ersetzen das einheitliche Luftwiderstandsgesetz von Siacci III für einen Augenblick durch die Zonengesetze:

$$\begin{array}{llll} v > & 1000 \text{ m:} & f(v) = & m_1 v^{1,3}, \\ v = 800 \text{ bis } 1000 & \text{"} & & = m_2 v^{1,55}, \\ 550 & \text{"} & 800 & \text{"} & = m_3 v^{1,7}, \\ 419 & \text{"} & 550 & \text{"} & = m_4 v^2, \\ 375 & \text{"} & 419 & \text{"} & = m_5 v^3, \\ 295 & \text{"} & 375 & \text{"} & = m_6 v^5, \\ 240 & \text{"} & 295 & \text{"} & = m_7 v^5, \\ 0 & \text{"} & 240 & \text{"} & = m_8 v^3. \end{array}$$

Allgemein also  $mv^k$ .

Die genaue Hauptgleichung lautet mit dem Fasellaschen  $c'$ :

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = g c_v' \cdot \frac{d\left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)}{\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \cdot m \cdot \left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)^k \cos \vartheta}.$$

Um diese Gleichung integrabel zu machen, wird sie durch folgende ungenaue ersetzt:

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = g c_v' \cdot \frac{d\left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)}{\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi} \cdot m \cdot \left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)^k \beta \cos^2 \varphi}.$$

Das heißt, es wird gesetzt:

$$\left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)^k \beta \cos^2 \varphi = \left(\frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}\right)^k \cos \vartheta,$$

also

$$\beta = \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta}\right)^{k-1} \frac{1}{\cos \varphi} = \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta}\right)^k \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Statt dieser Variablen  $\beta$  in der genauen Hauptgleichung wird nun ein angenähertes  $\beta_m$  gewählt, und zwar ein konstanter Mittelwert aus dem Anfangswert von  $\beta$  für  $\vartheta = \varphi$ :

$$\beta = \frac{1}{\cos \varphi}$$

und dem Endwert von  $\beta$  für  $\vartheta = \vartheta_e$ :

$$\beta = \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_e}\right)^k \frac{1}{\cos \varphi};$$



also

$$\beta_m = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta_e} \right)^n \right].$$

Außerdem setzt man  $c_u' = c_0' \cdot \frac{1,206}{v_{ym}}$  wobei  $\delta_{ym}$  das Luftgewicht in der Mitte der Stufe ist. Trägt man  $n : k - 1$  als Funktion von  $v$  auf, so erhält man einen unstetigen, durch Stufen dargestellten Verlauf. Um Unstetigkeiten bei der Bestimmung von  $\beta$  zu vermeiden, und mit Rücksicht darauf, daß bei Fasella das einheitliche Luftwiderstandsgesetz Siacci III verwendet ist, sei die Stufenkurve  $n$  durch nebenstehende stetige Kurve ersetzt (Abb. 57).

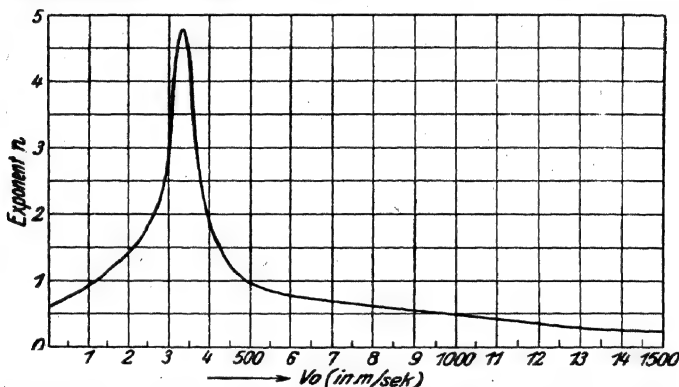


Abb. 57.

Zur Rechnung dienen die Fasellaschen Tabellen I, II und VI. Als Beispiel wurde die Flugbahn für

$$\begin{aligned} 2R &= 0,355 \text{ m,} \\ v_0 &= 1150 \text{ m,} \\ P &= 340 \text{ kg,} \\ \varphi &= 50^\circ, \\ i &= 0,37 \end{aligned}$$

gewählt. Also

$$c' = \frac{340}{(0,355)^3 \cdot 1000 \cdot 0,37} \cdot \frac{1,206}{\beta \delta_{ym}}.$$

In  $\beta$  kommt  $\vartheta$  und wegen  $n$  auch  $v$  vor. Bei Beginn der Rechnung eines Bahn Bogens muß deshalb die Endgeschwindigkeit des betreffenden Bahn Bogens  $v$  und der Neigungswinkel  $\vartheta$  geschätzt werden. Bei Berechnung der 1. Stufe wurde  $v = 978$ ,  $\vartheta = 48^\circ 15'$  angenommen. Der Koeffizient  $n$  für 978 ist  $= 0,5$ , also

$$\beta = \frac{1}{\cos 50^\circ} \cdot \frac{\left( \frac{\cos 50^\circ}{\cos 48^\circ 16'} \right)^{0,5} + 1}{2} = 1,5420.$$

## Berechnung der ersten Stufe.

$v_0$ . . . . .	1150			
$\varphi$ . . . . .	50°			
$y$ . . . . .	4000			
$\delta_{y_m} = \delta_{2000}$ . . . . .	1,0123			
$\log 1,206$ . . . . .	0,08135			
$\log (\delta_{y_m})$ . . . . .	0,00531			
$\log \frac{1,206}{\delta_{y_m}}$ . . . . .	0,07604			
$\log c'_0$ . . . . .	0,86282			
$\log \left( c'_0 \cdot \frac{1,206}{\delta_{y_m}} \right)$ . . . . .	0,93886		0,93886	
$v$ . . . . .	978		947	in der ersten Spalte ge- schätzt, dann berechnet
$\theta_e$ . . . . .	48° 16'		48° 12'	
also $\beta$ . . . . .	1,5420		1,5413	
$\log \beta$ . . . . .	0,18809		0,18787	
$\log \left( \frac{c'_0 \cdot \frac{1,206}{\delta_{y_m}}}{\beta} \right) = \log (c'_y)$ . . . . .	0,75077	0,75077	0,75099	0,75099
$x$ (geschätzt) . . . . .	3460	3457	3458	3457,25
$\log x$ . . . . .	3,53908	3,53870	3,53882	3,53873
also $\log \frac{x}{c'}$ . . . . .	2,78831	2,78793	2,78783	2,78774
$\frac{x}{c'}$ . . . . .	614,2	613,7	613,5	613,4
daraus $f$ nach Fasella . . . . .	0,005098	0,005093	0,005091	0,005090
$\log (c'_y)$ (s. o.) . . . . .	0,75077	0,75077	0,75099	0,75099
$\log x$ (s. o.) . . . . .	3,53908	3,53870	3,53882	3,53873
$\log f$ . . . . .	7,70740	7,70697	7,70680	7,70672
$\log (c' x f)$ . . . . .	1,99725	1,99644	1,99661	1,99644
$\log (2 \cos^2 \varphi)$ . . . . .	9,91717	9,91717	9,91717	9,91717
$\log \left( \frac{c' x f}{2 \cos^2 \varphi} \right)$ . . . . .	2,08008	2,07927	2,07944	2,07927
$\frac{c' x f}{2 \cos^2 \varphi}$ . . . . .	120	120	120	120
$\log (\lg \varphi)$ . . . . .	0,07619	0,07619	0,07619	0,07619
$\log (x \lg \varphi)$ . . . . .	3,61527	3,61489	3,61501	3,61492
$x \lg \varphi$ . . . . .	4124	4120	4121	4120

(Fortsetzung der Berechnung der ersten Stufe.)

	4004	4000	4001	4000
$x \operatorname{tg} \varphi - \frac{c' x f}{2 \cos^2 \varphi} = y$ . . . . .				
$f_4$ . . . . .		0,01073		0,01073
$\log(f_4)$ . . . . .		$\bar{8},03060$		$\bar{8},03060$
$\log c'$ . . . . .		0,75077		0,75099
$\log(c' f_4)$ . . . . .		$\bar{8},78137$		$\bar{8},78159$
$\log(2 \cos^2 \varphi)$ . . . . .		$\bar{9},91717$		$\bar{9},91717$
$\log\left(\frac{c' f_4}{2 \cos^2 \varphi}\right)$ . . . . .		$\bar{8},86420$		$\bar{8},86442$
$\frac{c' f_4}{2 \cos^2 \varphi}$ . . . . .		0,07315		0,07318
$\operatorname{tg} \varphi$ . . . . .		1,19175		1,19175
$\operatorname{tg} \varphi - \frac{c' f_4}{2 \cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \vartheta$ . . . . .		1,11860		1,11857
$\vartheta$ . . . . .		$48^\circ 12'$		$48^\circ 12'$
$u$ (nach Fasella, Tab. I) . . . . .		981,65		981,73
$\log u$ . . . . .		2,99195		2,99199
$\log \cos \varphi$ . . . . .		$\bar{9},80807$		$\bar{9},80807$
$\log(u \cos \varphi)$ . . . . .		2,80002		2,80006
$\log \cos \vartheta$ . . . . .		$\bar{9},82382$		$\bar{9},82382$
$\log\left(\frac{u \cos \varphi}{\cos \vartheta}\right) = \log v$ . . . . .		2,97620		2,97624
$v$ . . . . .		947		947

## Resultat der Berechnung.

Stufe		$x$	$\Sigma y$	$\Sigma x$		
	4000	3457	4000	3457	947	$48^\circ 12'$
	4000	3743	8000	7200	799	$45^\circ 25'$
3	4000	4234	12000	11434	683	$41^\circ 3'$
4	4000	5188	16000	16622	585	$38^\circ 42'$
5	4000	8104	20000	24726	488	$17^\circ 26'$
6	1071	6717	21071	31443	455	0
6	-1071	6646	20000	38089	468	$-18^\circ 2'$
5	-4000	7669	16000	45758	527	$-35^\circ 49'$
4	-4000	4690	12000	50448	569	$-44^\circ 42'$
3	-4000	3621	8000	54069	588	$-50^\circ 49'$
2	-4000	2981	4000	57050	581	$-55^\circ 45'$
1	-4000	2501	0	59551	547	$-60^\circ 14'$

Die Abszisse für die Ordinate  $y = 4000$  m muß geschätzt werden, sie wird mit Hilfe der Formel

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{c' x f}{2 \cos^2 \varphi}$$

durch Probieren gefunden, wobei  $f$  (abhängig von  $\frac{x}{c}$ ) der Tabelle II von Fasella entnommen wird. Mit dem gefundenen  $x$  wird  $v$  und  $\vartheta$  berechnet. Das Resultat der 1. Rechnung beträgt für

$$x = 3457, \quad v = 947, \quad \vartheta = 48^\circ 12'.$$

Für die rechnerisch ermittelten Werte  $v$  und  $\vartheta$  wird  $\beta$  neu bestimmt und die Rechnung wiederholt. Die 2. Rechnung ändert das Resultat der 1. nicht.

947 m ist nun die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und  $48^\circ 12'$  ist der Abgangswinkel  $\varphi$  für die 2. Bahnstufe usw.

Die Berechnung der 1. Stufe sowie das Resultat der Berechnung der ganzen Bahn ist oben wiedergegeben. Es wird, wenn man nicht berücksichtigt, daß der  $c_0'$ -Wert infolge der wachsenden Geschoßpendelungen kleiner wird, die Gesamtschußweite 59551 m, der Fallwinkel  $60^\circ 14'$ ;  $v_e = 455$  m/sec  $\sim v_{\min}$ ;  $v_{\max} \sim 588$  m/sec;  $v_e = 547$  m/sec.

#### Achter Abschnitt.

### Über die Methode der „Normalbahnen“ von C. Cranz und ihre Anwendung zur Prüfung der verschiedenen Lösungsmethoden auf deren Genauigkeitsgrad.

In den vorhergehenden Abschnitten 4 bis 7 wurden zahlreiche Methoden zur Lösung des äußerballistischen Problems besprochen. Alle diese Methoden können mit einem doppelten Fehler behaftet sein. Der erste Fehler, der der Kürze halber der Integrationsfehler oder der rein mathematische Fehler heißen möge, rührt daher, daß die Differentialgleichungen der Geschoßbewegung nur mit irgendeinem Näherungsverfahren integriert werden; und zwar auch dann nur mit einem Näherungsverfahren, wenn von vornherein vorausgesetzt werden soll, daß die Geschoßachse dauernd in der Bahntangente bleibt, also das Geschoß wie ein Massenpunkt sich bewegt, wenn ferner von der Änderung des Luftgewichts  $\delta$  und damit des ballistischen Koeffizienten  $c$  mit der Höhe und von sekundären Einflüssen, wie z. B. Erdrotation, Geschoßrotation, Abnahme von  $g$  mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt, Erdkrümmung usw. abgesehen wird. Dieser durch das näherungsweise Integrationsverfahren entstehende Fehler kann der Größe nach ermittelt werden. Der zweite Fehler hat seine

Ursache darin, daß den einzelnen Formel- und Tabellensystemen die verschiedenartigsten Luftwiderstandsgesetze zugrunde gelegt sind, aber das richtige Luftwiderstandsgesetz von der Aeromechanik noch nicht festgestellt werden konnte; ferner darin, daß das Langgeschloß mit einer Rotation um die Längsachse und vielfach auch mit einer solchen um eine Querachse seinen Flug in der Luft beginnt und weiterhin Pendelungen von veränderlicher Größe um den Schwerpunkt ausführt usw. Dieser zweite Fehler, der kurz der physikalische Fehler genannt werden möge, kann, selbst wenn man wenigstens vorläufig als das richtige Luftwiderstandsgesetz das in Tabellenform vorliegende Gesetz von O. v. Eberhard ansehen will, zur Zeit noch nicht in allen seinen Einzelheiten auf rechnerischem Wege genügend genau festgestellt werden. Denn bei den Geschloßpendelungen kommt nicht nur die Kreiselwirkung, sondern auch der später zu besprechende Magnus-Effekt und Poisson-Effekt in Betracht, und über die Anfangsstöße, die das Geschloß in der Nähe der Mündung erfährt, ist wenig Sicheres bekannt. Es bleibt also zur quantitativen Ermittlung dieses zweiten Fehlers nur übrig, einwandfreie Schießversuche zu Hilfe zu nehmen und deren Ergebnisse zu vergleichen mit den Rechnungsergebnissen eines solchen rechnerischen Lösungsverfahrens, bei dem man, unter Berücksichtigung der Luftgewichtsabnahme, den Integrationsfehler quantitativ ermittelt hat.

## § 41. Der rein mathematische Fehler und der physikalische Fehler der Lösungsmethoden.

### A. Der rein mathematische Fehler.

Die erwähnte Fehlerursache bestand im folgenden: Es wurden entweder (vgl. 4. Abschnitt) zwar die ursprünglichen Differentialgleichungen der Geschloßbewegung, also die Gleichung (1) und (2) von § 17, oder die daraus hervorgehende Hodographengleichung (3), in geschlossener Form integriert, indem ein dementsprechendes einfaches Potenzgesetz für den Luftwiderstand angenommen wurde; aber die weiteren Integrationen wurden nur mit einem Näherungsverfahren bewerkstelligt. Oder wurden (vgl. 6. Abschnitt) Taylorsche Reihenentwicklungen angewendet, von denen jedoch nur 3 bis 4 Glieder benützt werden konnten. Oder wurde (vgl. 7. Abschnitt) die Flugbahn in zahlreichen, endlich kleinen Stücken aufgebaut, aber mit irgendeinem rechnerischen oder graphischen Annäherungsverfahren; und dabei bieten alle diese Verfahren für die ballistische Praxis den Nachteil, daß, wenn es sich um eine einzelne Aufgabe handelt, bei der z. B.  $v_0$  oder  $\varphi$  oder  $i$  gesucht wird, ein äußerst mühsames Probieren erforderlich ist, mit dem auch wieder Fehler verbunden sein

können. Oder endlich wurde, wie das bei den (für die praktischen Aufgaben der Ballistik noch immer besonders wichtigen) Methoden des 5. Abschnitts gezeigt wurde, überhaupt nicht die richtige Hodographengleichung

$$d\vartheta = \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{v \cdot c f(v)} \quad \text{oder} \quad \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{v \cos \vartheta \cdot c f\left(\frac{v \cos \vartheta}{[\cos \vartheta]}\right) \cdot [(\cos \vartheta)]} \quad \text{zu-}$$

grunde gelegt, sondern diese richtige Differentialgleichung wurde durch eine unrichtige ersetzt, die ohne weiteres die Trennung der Variablen zuläßt, und dies hatte zur Folge, daß die übrigbleibenden Integrationen sich für irgendein Luftwiderstandsgesetz, sogar für ein solches in Tabellenform, verhältnismäßig einfach bewerkstelligen lassen. Die Ersatzgleichung wurde dadurch hergestellt, daß auf der rechten Seite der letzten Gleichung die beiden durch eckige Klammern hervorgehobenen  $\cos \vartheta$  je durch einen entlang der ganzen Bahn oder entlang des betrachteten Bahnteils konstanten Mittelwert  $\sigma$  bzw.  $\gamma$  ersetzt wurden, so daß man hat

$$\frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = \frac{g \cdot d(v \cos \vartheta)}{v \cos \vartheta \cdot c f\left(\frac{v \cos \vartheta}{\sigma}\right) \cdot \gamma} = \frac{g}{\gamma c} \cdot \frac{du}{u \cdot f(u)}, \quad \text{wo } u = \frac{v \cos \vartheta}{\sigma}$$

ist. Da die Größen  $\sigma$  und  $\gamma$ , die tatsächlich längs der Bahn oder des Bahnteils mehr oder weniger variabel sind, als konstant angenommen werden, entsteht ein Fehler. Die verschiedenen Methoden des Abschnitts 5 unterscheiden sich dabei, abgesehen von den Annahmen über den Luftwiderstand, besonders durch die Wahl von  $\sigma$  und  $\gamma$ ; Borda nahm  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = \sec \varphi$ . J. Didion, F. Siacci und N. v. Wuich wählten zur Berechnung der ganzen Bahn in einem einzigen Bogen  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ , wo  $\alpha$  ein Mittelwert von  $\sec \vartheta$  im Anfangs-

punkt und im Scheitel ist, nämlich  $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}$ ; oder wählten sie, und ebenso N. Mayevski, zur Berechnung der Bahn in zwei Bögen: für den aufsteigenden Ast  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ , wo  $\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}$ , und, nach einer vorläufigen Berechnung des spitzen Auffallwinkels  $\omega$ , für den absteigenden Ast  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ , wo  $\alpha = \frac{\xi(\omega)}{\operatorname{tg} \omega}$ . Zur genaueren Berechnung der Bahn in einem einzigen Stück nahmen Didion,

Mayevski und v. Wuich  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ , wo  $\alpha = \frac{\xi\left(\frac{\varphi + \omega}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi + \omega}{2}}$  ist und wo-

bei vorher ein Überschlagswert von  $\omega$  zu ermitteln ist. St. Robert und Hélié schlugen vor, statt dessen für  $\alpha$  das arithmetische bzw. das geometrische Mittel von  $\sec \vartheta$  im Abgangspunkt und im Gipfel zu nehmen, also St. Robert:  $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sec \varphi)$ , Hélié:  $\alpha = \sqrt{\sec \varphi}$ . Bei

dem älteren Verfahren von F. Krupp (W. Groß) wurde einfach gesetzt  $\sigma = \gamma = 1$ . In seinen späteren Verfahren von 1888 und 1896 nahm F. Siacci:  $\sigma = \cos \varphi$  und  $\gamma = \beta \cdot \cos^2 \varphi$ , wobei er aus einem gewissen Integralwert (vgl. § 27) und mit einer Näherungsannahme den Wert von  $\beta$  in Funktion von  $X$  und  $\varphi$  erhielt; ebenso verfuhr E. Vallier; jedoch bestimmte dieser den Wert von  $\beta$  durch eine Abschätzung des Restglieds der Taylorsche Entwicklung (vgl. § 28). Wieder anders verfuhr P. Charbonnier (vgl. § 29). Alle diese Näherungsverfahren bedingen einen gewissen Fehler in der Flugbahnberechnung.

Was nun die Untersuchungsmethode zur Fehlerbestimmung anlangt, so hat schon 1872 St. Robert mit Zuhilfenahme eines Satzes von Cauchy über die approximative Lösung von Differentialgleichungen (s. Lit.-Note) an einem Zahlenbeispiel eine solche Bestimmung durchzuführen gesucht; er fand, daß ein ganz erheblicher Aufwand an Mühe und Zeit erforderlich ist, um auf diese Weise wenigstens eine obere Grenze für den Fehler zu gewinnen. Ein nur unwesentlich geringerer Aufwand ergab sich bei Anwendung eines ähnlichen neueren Satzes von C. Runge in einem 1907 im ballistischen Laboratorium durchgeführten Beispiel. Bei dem schrittweisen Verfahren von Veithen-Kutta (vgl. § 36) läßt sich eine obere Grenze leicht dadurch erhalten, daß von Zeit zu Zeit zwei Schritte durch einen einzigen Schritt ersetzt werden. Und bei allen Versuchen, bei denen die Flugbahnelemente mittels Taylorscher Reihenentwicklungen gewonnen werden, liegt es nahe, zwei Grenzen für den jeweils entstandenen Fehler zu gewinnen. In der Tat haben O. Wiener und R. Sängewald, ebenso A. v. Brunn (vgl. § 37) strenge Fehlerberechnungen für ihre Methoden durchgeführt. Auch andere Ballistiker, wie z. B. Charbonnier, Parodi, Cavalli u. a. haben teilweise Fehlerabschätzungen vorgenommen. Th. Vahlen (Ballistik 1922, S. 70 u. folg.) bespricht die verschiedenen Lösungsmethoden des Abschnitts 5; dabei leitet er die Methoden von Borda und von Charbonnier in etwas einfacherer Weise ab, indem er eine obere und eine untere Grenze für  $t$ ,  $tg \vartheta$  und  $xtg \varphi - y$  aufsucht. Er sucht auch ein schärferes Verfahren aufzustellen, um die Grenzen genauer festzulegen; dabei muß er jedoch die Bahn in mehrere Teilbögen zerlegen, und er betont selbst, daß „um die Fehler bis auf 1 bis 2% herabzudrücken, selbst bei rasanten Bögen ein ziemlicher Aufwand an Rechnung nötig ist“.

In dem Bestreben, ein einfaches Mittel zur Prüfung der Genauigkeit einer neu auftauchenden Lösungsmethode an der Hand zu haben, hat der Verfasser 1909 (s. Lit.-Note) das folgende planimetrische Verfahren zur Berechnung von Flachbahnen und

Steilbahnen entwickelt, das gestattet, die wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung von  $x$ ,  $y$ ,  $t$ ,  $v$  quantitativ zu ermitteln und weit unter der wahrscheinlichen Streuung zu halten; dieses Verfahren wurde sodann dazu angewendet, um eine größere Anzahl von Musterbahnen von bekannter Genauigkeit (im folgenden kurz „Normalbahnen“ genannt) zu berechnen, die dazu dienen können, um irgendeine Lösungsmethode auf ihre Genauigkeit zu prüfen.

Da es sich hier nicht um das Luftwiderstandsgesetz, überhaupt nicht um die physikalischen Fehler, sondern um die Integrationsfehler handelt, so konnte das Zonengesetz von Mayevski zugrunde gelegt werden, das auch F. Siacchi bei seinem Verfahren von 1880 benützt hat. Danach ist die Verzögerung  $cf(v)$  durch den Luftwiderstand gleich  $c \cdot v^n$ , wobei  $c = \frac{R^2 \pi \cdot \delta \cdot i \cdot g}{P \cdot 1,206} \cdot m$  ist;  $2R$  das Kaliber ( $m$ );  $P$  das Geschossgewicht ( $kg$ );  $\delta$  das Luftgewicht ( $kg/m^3$ );  $i$  der Formkoeffizient;  $g = 9,81$ ; und es ist angenommen:

für $v = 419$ und mehr	$v = 419$ bis $375$	$v = 375$ bis $295$	$v = 295$ bis $240$	$v = 240$ m/sec u. weniger
$m = 0,0394$	$m = 0,09404$ (4)	$m = 0,06709$ (9)	$m = 0,05834$ (4)	$m = 0,014$
$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 3$	$n = 2$

Damit läßt sich von einer Zone zur andern, mittels der in § 18 gegebenen Ausdrücke, die Geschwindigkeit  $v$  in Funktion des Neigungswinkels  $\vartheta$  der Bahntangente berechnen; man hat nur bei jedem Zonenübergang dafür zu sorgen, daß die Wertepaare aneinander anschließen. Kennt man so  $v = F(\vartheta)$ , so werden die Integrationen

$$x = -\frac{1}{g} \int v^2 \cdot d\vartheta; \quad y = -\frac{1}{g} \int v^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta; \quad t = -\frac{1}{g} \int v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta$$

mit Hilfe eines Kugelrollplanimeters bewerkstelligt, dessen Angaben zuvor durch Umfahren von entsprechend großen Kreisflächen oder Rechtecksflächen von bekanntem Flächeninhalt ausjustiert sind. So wurden 1909 unter Annahme verschiedener Kaliber und Geschossgewichte und verschiedener Abgangswinkel  $\varphi$  (zwischen  $20^\circ$  und  $70^\circ$ . von den Hörern Oblt. Blumenthal, Oblt. Busch, Oblt. Freih.) von Göler, Lt. Plaskuda, Oblt. Schatte, Oblt. Schultz sechs verschiedene Flugbahnen berechnet. Wie dies geschah, möge an einem Beispiel gezeigt werden, das Oblt. Schatte durchgeführt hat: Es sei die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 465$  m/sec; der Abgangswinkel  $\varphi = 34 \frac{10}{18} \text{ Grad} = 34^\circ 37,5'$ ; das Geschossgewicht  $P = 6,85$  kg; das Kaliber  $2R = 0,077$  m; der Formkoeffizient  $i$  werde als konstant = 1 und das durchschnittliche Luftgewicht  $\delta$  als konstant =  $1,200$  kg/m<sup>3</sup> angenommen. Da  $v_0 = 465$ , so kommt zunächst die erste Zone in



Betracht, innerhalb der  $m = 0,0394$  und  $n = 2$  ist. Somit ist hier  $c = \frac{0,077^2 \cdot \pi \cdot 9,81 \cdot 1,200}{4 \cdot 6,85 \cdot 1,206} \cdot 0,0394$ ;  $\log c = 0,41738 - 4$ . Damit wird die

Beziehung zwischen  $v$  und  $\vartheta$ :  $\frac{1}{v^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2c}{g} [\xi(\varphi) - \xi(\vartheta)]$ . Für das Ende der ersten Zone, also für  $v = 419$ , erhält man daraus durch wiederholtes Eingabeln den Tangentenwinkel  $\vartheta = 33^\circ 46'$ . Man hat damit das Ende der ersten und zugleich den Anfang der zweiten Zone. Diese letztere reicht von  $v = 419$  bis  $v = 375$ . Hierbei sind  $v$  und  $\vartheta$  durch die Beziehung verknüpft:

$$\frac{1}{v^2 \cos^2 \vartheta} = -\frac{3c}{g} \left( \operatorname{tg} \vartheta + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \vartheta \right) + B,$$

wobei jetzt

$$c = \frac{0,077^2 \cdot \pi \cdot 9,81 \cdot 1,200}{4 \cdot 6,85 \cdot 1,206} \cdot 0,09404; \quad \log c = 0,79519 - 7$$

ist und  $B$  daraus sich ergibt, daß für  $\vartheta = 33^\circ 46'$   $v = 419$  sein muß; danach ist  $B = 0,0170269$ .<sup>(6)</sup> Speziell für  $v = 375$  wird  $\vartheta = 32^\circ 35'$ . Dies ist der Anfang für die dritte Zone usw. Auf diese Weise erhält man für jeden beliebigen Wert von  $\vartheta$  den Wert von  $v$  „genau“, d. h. die dabei auftretenden Fehler sind nicht größer als diejenigen, die in den benützten logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, der  $\xi(\vartheta)$ -Tabelle (Anhang Tabelle Nr. 8b) usw. liegen.

Nun wurde für eine große Anzahl von Winkeln  $\vartheta$  die Funktion  $\frac{v^2}{g} \cdot \operatorname{tg} \vartheta$  in sehr großem Maßstab in mehreren Teilen graphisch aufgetragen,  $\vartheta$  als Abszisse,  $\frac{v^2}{g} \cdot \operatorname{tg} \vartheta$  als Ordinate, und die Kurvenfläche

$-\int \frac{v^2}{g} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta$  oder  $y$  mit einem Kugelrollplanimeter planimetriert.

Dies geschah hier bei dem Beispiel in vier Teilen. In den drei ersten stellte  $1 \text{ cm}^2$  der Zeichnungsfläche  $1,1636 \text{ m}$ , im letzten Teil  $1 \text{ cm}^2$   $3,4907 \text{ m}$  vor. Der krummlinig begrenzte Teil jedes Kurvenflächenstücks wurde 10 mal mit dem Planimeter befahren. Die Planimetrierung wurde zunächst nur bis in die Nähe des im Mündungshorizont gelegenen Auffallpunkts fortgesetzt, nämlich bis  $\vartheta = -49,5^\circ$ ; hierfür war die Flugbahnordinate  $y$  noch  $+34,1 \text{ m}$ ; weiterhin bis  $y = 0$ , wofür  $x$  gleich der Schußweite  $X$  im Mündungshorizont ist. Da man den wahrscheinlichen Fehler der Planimetrierung bei Verwendung des betreffenden ausjustierten Instruments in Prozenten der jedesmal befahrenen Fläche mittels eines ungefähr gleich große Kreises oder Quadrats ermitteln kann, so kennt man für die einzelnen planimetrierten krummlinig begrenzten Flächenstücke je den wahrscheinlichen Fehler  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ . Der wahrscheinliche Fehler für die Summe der Flächenstücke ist dann  $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots} = \omega$ . Und da jedes

Flächenstück 10 mal umfahren wurde, so ist der wahrscheinliche Fehler des Endresultats, z. B. des Resultats bis zu der betreffenden Stelle der Bahn (und analog für  $x$  und  $t$ ) gleich  $\frac{\omega}{\sqrt{10}}$ . Für das benutzte Planimeter ergab sich der mittlere quadratische Fehler der Einzelmessung zu  $\pm 0,13\%$ . Danach hatte in dem Beispiel der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung von  $y$  bis  $\vartheta = +18^\circ 17'$  den Betrag  $\pm 0,739$  m, bis  $\vartheta = 0$  (Gipfel) den Betrag  $\pm 0,803$  m, bis nahe dem Endpunkt, nämlich für  $\vartheta = -49,5^\circ$  den Betrag  $\pm 1,71$  m.

Ebenso wurde  $\frac{v^2}{g}$  als Funktion von  $\vartheta$  aufgetragen, das Integral  $-\int \frac{v^2}{g} \cdot d\vartheta = x$  wurde mechanisch ausgewertet bis  $\vartheta = -49,5^\circ$  und weiterhin bis zum Mündungshorizont. Die Planimetrierung erfolgte in 5 Teilen; in den drei ersten Teilen bedeutete  $1 \text{ cm}^2$  der Zeichenfläche  $0,58178$  m; im 4. Teil  $1 \text{ cm}^2 = 1,16355$  m; im 5. Teil  $1 \text{ cm}^2 = 3,49070$  m. Bis  $\vartheta = +18^\circ 17'$  war  $x = 2765,7 \text{ m} \pm 0,288 \text{ m}$ ; bis  $\vartheta = 0$  (Gipfel) war  $x = x_s = 4308,0 \text{ m} \pm 0,370 \text{ m}$ ; bis  $\vartheta = -49,5^\circ$  war  $x = 7634,8 \text{ m} \pm 0,743 \text{ m}$ .

Analog wurde bezüglich  $t = -\frac{1}{g} \int v \cdot \sec \vartheta \cdot d\vartheta$  verfahren. Bis  $\vartheta = +18^\circ 17'$  war  $t = 10,001 \pm 0,00227 \text{ sec}$ ; bis  $\vartheta = 0$  war  $t = t_s = 17,2117 \pm 0,00235 \text{ sec}$ ; bis  $\vartheta = -49,5^\circ$  war  $t = 37,0407 \pm 0,00381 \text{ sec}$ . Damit war die Berechnung dieser Flugbahn durchgeführt. Und da die wahrscheinlichen Grenzen für die Fehler von  $x$ ,  $y$ ,  $t$  bekannt und genügend klein waren und da  $v$  in Funktion von  $\vartheta$  „genau“ (im obigen Sinne) ermittelt war (nämlich z. B. für  $\vartheta = 0^\circ$ ,  $v = 199,13 \pm 0,00$  und für  $\vartheta = -49,5^\circ$ ,  $v = 214,06 \pm 0,00$ ), so konnte die Flugbahn als eine Normalbahn angesehen und verwendet werden.

Die sechs Flugbahnen, die, in dieser Weise als Normalbahnen berechnet, vorlagen, wurden nun je bei denselben Anfangsdaten  $v_0$ ,  $\varphi$ ,  $2R$ ,  $P$ ,  $i$ ,  $\delta$  und bei Zugrundelegung desselben Mayevskischen Luftwiderstandsgesetzes nach 12 verschiedenen Näherungsmethoden des 5. Abschnitts berechnet, die gestatten sollen, eine Flugbahn direkt in einem einzigen Bogen, höchstens in zwei Bögen zu gewinnen. Die nach diesen 12 verschiedenen Methoden erhaltenen Zahlenwerte für die Schußweiten  $X$ , die Gipfelhöhen  $y_s$ , die Endgeschwindigkeiten  $v_s$ , die Auffallwinkel  $\omega$  und die Gesamtflugzeiten  $T$  wurden alsdann verglichen mit den entsprechenden Zahlen für die betreffende Normalbahn; und die Unterschiede wurden ausgedrückt in Prozenten bezüglich der betreffenden Normalbahn. Dabei ergaben sich Fehler z. B. in der Gipfelhöhe  $y_s$  bis  $87\%$ , Fehler in der Schußweite  $X$  schon bei einem Abgangswinkel  $\varphi = 45^\circ$  bis  $29\%$ . Geringer waren die

Fehler bezüglich der Auffallwinkel  $\omega$ , der Flugzeiten  $T$  und der Auffallgeschwindigkeiten  $v_0$ . (Näheres über diese sechs im Jahre 1909 berechneten und zur Kontrolle verwendeten Normalbahnen findet man in den Auflagen dieses Bandes I von 1910, 1917, 1918.) Danach können die Fehler, die allein von dem Integrationsverfahren herrühren, je nach der gewählten Näherungsmethode sehr große Beträge annehmen. Durchschnittlich überwog das von E. Vallier (Frankreich) angegebene Verfahren zur Ausgleichung des Integrationsfehlers hinsichtlich der Genauigkeit über die 11 anderen Methoden, die mittels der 6 Normalbahnen von 1909 untersucht wurden. Darauf folgte das in Österreich benützte Verfahren von N. v. Wuich, das eine leichte Modifikation der Didionschen Methode bildet. Ganz unbrauchbar zeigte sich das von W. Groß benützte Verfahren ( $\sigma = \gamma = 1$ ), bezüglich dessen schon P. Charbonnier richtig gefolgert hatte, daß es zu große Schußweiten liefern müsse. Daß bei Anwendung des Vallierschen Verfahrens selbst auf sehr steile Bahnen der entstehende Fehler unter Umständen noch in mäßigen Grenzen bleiben kann, zeigen die folgenden Beispiele: a) für  $\varphi = 80^\circ$ ;  $v_0 = 500$  m/sec;  $2R = 3,7$  cm;  $P = 680$  g;  $i = 1$ ;  $\delta_0 = 1,206$  wurde die Flugbahn unter Berücksichtigung der Luftdichtenänderung, wie oben angegeben, planimetrisch berechnet; es fand sich  $y_s = 3571,2$  m;  $v_s = 34,51$  m/sec. Dagegen bei (einmaliger) Anwendung der ersten Vallierschen Formel für  $\beta$ , durch die gleichfalls die Änderung der Luftdichte mit der Höhe Berücksichtigung findet, ergab sich  $y_s = 4164$  m (Fehler  $16\%$ ),  $v_s = 34,4$  m/sec (Fehler ca.  $0,3\%$ ); b) bei  $\varphi = 75^\circ$  und sonst gleichen Annahmen lieferte die Normallösung:  $x_s = 1518,1$  m;  $y_s = 3439,5$  m; dagegen die (einmalige) Anwendung der Vallierschen Formel:  $x_s = 1742$  m;  $y_s = 4138$  m. Übrigens wird man die Formel für  $\beta$  in der Praxis höchstens bis zu Abgangswinkeln von etwa  $\varphi = 50^\circ$  benützen, wenn man sichergehen will.

Weitere 9 Normalbahnen sind sodann später (1912) nach demselben planimetrischen Verfahren von Dr. Herm. Cranz sehr sorgfältig berechnet worden; nämlich für die Abgangswinkel  $\varphi = 20^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $70^\circ$  und dabei jedesmal für die Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0 = 900$ ,  $650$  und  $400$  m/sec. Die übrigen Annahmen waren bei diesen sämtlichen Berechnungen grundsätzlich die gleichen, nämlich: Kaliber  $2R = 0,077$  m; Geschoßgewicht  $P = 6,9$  kg, durchschnittliches Luftgewicht  $\delta$  konst.  $= 1,200$  kg/m<sup>3</sup>; Formkoeffizient  $i$  konst.  $= 1$ . Und für die Luftwiderstandsfunktion wurden wiederum durchweg die Mayevskischen Zonen-Potenzgesetze zugrunde gelegt, wobei der Einfachheit halber angenommen wurde, daß noch bis  $v = 900$  m/sec das quadratische Gesetz mit dem Faktor  $m = 0,039$  gelte. Aus Raummangel konnten die von H. Cranz berechneten Zahlenwerte

dieser 9 Normalbahnen hier nicht vollständig und nicht bis zu allen ursprünglichen Dezimalstellen aufgenommen werden. Immerhin enthalten die im folgenden mitgeteilten Tabellenauszüge so viel von den berechneten Zahlen, daß eine Verwendung dieser Normalbahnen zur Kontrolle irgendeiner Lösungsmethode ohne weiteres möglich ist. Der wahrscheinliche Fehler in der Ermittlung von  $x$ ,  $y$ ,  $t$  ist bei diesen 9 Normalbahnen von Zeit zu Zeit angegeben; derjenige von  $v$  ist theoretisch Null. Selbstverständlich ist bei Verwendung dieser Normalbahnen zur Prüfung der Genauigkeit irgendeiner älteren oder neueren Lösungsmethode vorausgesetzt, daß sich bei der zu untersuchenden Methode das System der Mayevskischen Zonen-Potenzgesetze benutzen läßt.

Es möge mit dem Vorstehenden und mit den Tabellen der 9 neueren Normalbahnen eine Anregung dazu gegeben werden, die Kontrollberechnungen, die von einigen Ballistikern, insbesondere von Fr. von Zedlitz, sowie vom Verfasser mittels der 6 Normalbahnen von 1909 angestellt worden waren, an der Hand der neueren Tabellen zu vervollständigen und auf weitere Lösungsmethoden auszuweiten. Damit soll jedoch nicht behauptet werden, daß für die Güte und praktische Brauchbarkeit eines Lösungsverfahrens lediglich die Kleinheit des Integrationsfehlers ausschlaggebend sein dürfe. — Wenn dies der Fall wäre, müßten in der Ballistik fast nur noch die Methoden des 7. Abschnitts, also diejenigen Methoden Verwendung finden, bei denen eine Flugbahn in zahlreichen kleinen Stücken aufgebaut wird. Vielmehr spielt auch die Frage eine große Rolle, ob das betreffende Verfahren in einfacher Weise, ohne großen Aufwand an Zeit und Mühe, zu dem gesuchten Resultat führt und ob auch solche Aufgaben, bei denen die Elemente des Abgangspunkts zum Teil gesucht sind (z. B. gegeben  $v_0$ ,  $X$ , Gesch. gesucht  $\varphi$ ; oder gegeben  $\varphi$ ,  $X$ ,  $T$ ; gesucht  $v_0$  u. dgl.) in gleich einfacher Weise zu lösen sind, wie diejenige Aufgabe, bei der die sämtlichen Anfangselemente der Bahn gegeben vorliegen.

### B. Der physikalische Fehler.

Schon Eingangs wurde angeführt, daß dieser Fehler vorerst nur durch Vergleichung mit einwandfreien Schießversuchen ermittelt werden kann und daß er sich aus zahlreichen Einzelteilen zusammensetzt, deren Beträge sich bei dem heutigen Stand der Ballistik nicht sämtlich und zum Teil nur recht unsicher rechnerisch ermitteln lassen. Einen kleinen Teil dieses physikalischen Fehlers hat der Verfasser 1909 zu untersuchen begonnen, nämlich denjenigen, der sich auf die Wahl der Luftwiderstandsfunktion bezieht. 4 Flugbahnen, mit Abgangswinkeln zwischen  $6^\circ$  und  $36^\circ$  lagen durch Schießversuche vor. Diese

## Normalflughbahnen.

Bahn Nr. 1:  $v_0 = 900$  m/sec;  $\varphi = 20^\circ$ ;  $2R = 0,077$  m;  $P = 6,9$  kg;  $\delta = 1,200$  kg/cbm;  $i = 1$ .

$\phi$ ( $^\circ$ )	$\phi$ ( $''$ )	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)	$\phi$ ( $^\circ$ )	$\phi$ ( $''$ )	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)
20	0	0	0,00	0,00	0,00	- 1	0	0	553,65	1317,51	13,9408
19	51	0	849,9	73,93	0,2482	- 2	30	0	5709,11	1312,08	14,6311
19	38	0	790,3	167,13	0,5843	- 4	0	0	5880,58	1302,49	15,3100
19	11	0	698,1	321,50	1,2143	- 6	0	0	6100,00	1282,99	16,2024
18	15	13	578,7	543,44	2,3202	- 8	0	0	6315,38	1256,38	17,0835
17	40	0	528,7	649,24	2,9268	- 12	0	0	6722,54	1183,89	18,9225
17	0	0	485,0	741,14	3,5507	- 16	0	0	7114,74	1087,59	20,5438
15	0	0	399,5	939,72	5,1774	- 20	0	0	7491,37	960,09	22,2734
13	20	0	358,8	1051,69	6,3319	- 25	0	0	7951,54	763,22	24,4707
12	0	0	337,8	1112,01	7,1768	- 28	0	0	8324,93	631,06	25,8208
11	0	0	325,9	1150,94	7,7780	- 31	0	0	8497,77	476,12	27,2153
10	0	0	316,2	1183,26	8,3602	- 35	30	0	8909,78	203,13	29,3949
9	0	0	307,9	1211,62	8,9217	- 38	0	0	—	30,16	—
8	0	0	300,8	1237,42	9,4689	- 38	22	35	9181,337	0,000	30,86659
6	0	0	289,2	1274,68	10,5227				( $\pm 0,642$ )	( $\pm 0,246$ )	( $\pm 0,0007$ )
4	0	0	279,2	1297,77	11,5347				(Absteigender Ast der Flugbahn)		
0	0	0	263,7	1318,60	13,4745						
			( $\pm 0,56$ )	( $\pm 0,19$ )	( $\pm 0,0005$ )						
			(Aufsteigender Ast der Flugbahn)								

Bahn Nr. 2:  $v_0 = 900$  m/sec;  $\varphi = 45^\circ$ ;  $2R = 0,077$  m;  $P = 6,9$  kg;  $\delta = 1,200$  kg/obm;  $i = 1$ .

$\phi$ ( $^\circ$ )	$\phi$ ( $''$ )	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$z$ (sec)	$\delta$ ( $^\circ$ )	$\phi$ ( $''$ )	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$z$ (sec)
45	0	900,0	0,00	0,00	0,00	-10	0	168,4	6608,77	3982,08	26,7485
44	50	897,7	218,63	216,88	0,3606	-18	0	167,8	7002,80	3881,51	29,2076
44	35	745,6	486,75	482,61	0,8554	-26	0	170,5	7415,96	3720,74	31,8018
44	20	688,7	724,80	714,47	1,9978	-33	0	175,6	7789,96	3510,56	34,2763
44	0	620,8	965,88	962,47	1,8336	-40	0	183,7	8181,15	3208,59	37,0532
43	15	524,9	1398,87	1371,82	2,8872	-46	0	193,1	8559,40	2852,61	( $\pm 0,0024$ )
42	20	451,3	1807,98	1720,76	3,9576	-52	0	205,2	8979,64	2363,47	39,8006
40	15	360,1	2361,78	2222,33	5,9245	-57	0	217,3	9372,40	1807,43	43,0532
			( $\pm 0,42$ )	( $\pm 1,02$ )	( $\pm 0,0007$ )	-60	0	226,4	9689,57	1375,71	46,2967
39	15	336,8	2577,86	2401,74	6,7289	-64	10	240,0	10083,09	—	48,5727
38	0	316,0	2814,44	2590,52	7,6570	-66	47	249,31	10315,18	+ 0,04	52,2788
37	0	303,1	2985,05	2722,15	8,3503					( $\pm 1,46$ )	55,0285
34	0	274,8	3496,98	3037,18	10,2380						( $\pm 0,0027$ )
30	30	251,2	3853,50	3310,51	12,1726						
25	0	225,3	4411,64	3605,33	14,7965						
20	0	208,4	4826,08	3777,75	16,8786						
10	0	186,2	5518,57	3955,77	20,4988						
0	0	173,91	6034,54	4026,10	23,7003						
			( $\pm 1,16$ )	( $\pm 1,37$ )	( $\pm 0,0020$ )						

(Aufsteigender Ast der Flugbahn)

(Absteigender Ast der Flugbahn)

Bahn Nr. 3:  $v_0 = 900 \text{ m/sec}$ ;  $\varphi = 70^\circ$ ;  $2R = 0,077 \text{ m}$ ;  $P = 6,9 \text{ kg}$ ;  $\delta = 1,200 \text{ kg/obm}$ ;  $i = 1$ .

$\varphi$ ( $^\circ$ )	$\varphi'$ ( $''$ )	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)	$\varphi$ ( $^\circ$ )	$\varphi'$ ( $''$ )	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)
70	0	0	0,00	0,00	0,00	-15	0	0	3809,59	6397,56	32,7049
69	50	0	208,06	562,20	0,7152	-30	0	0	4026,72	6295,18	35,3444
69	30	0	498,84	1284,25	1,8650	-45	0	0	4307,84	6068,16	38,7963
69	2	0	498,7	1980,42	3,1251				( $\pm 1,40$ )	( $\pm 7,0$ )	( $\pm 0,0066$ )
68	20	0	404,5	2542,21	4,5821	-54	0	0	4541,76	5793,42	41,7902
67	45	0	359,3	2980,42	5,6842	-59	0	0	4707,20	5542,62	44,0263
67	0	0	324,3	3348,88	6,3217	-65	0	0	4969,67	5061,07	47,5614
			( $\pm 0,70$ )	( $\pm 5,2$ )	( $\pm 0,0019$ )	-70	45	0	5309,02	4210,77	52,5690
66	0	40,86	1466,94	3735,31	8,1849	-75	30	0	5699,21	2904,35	58,8248
65	0	0	1612,56	4050,39	9,4147	-80	49	25	6283,122	0,04	70,6204
63	30	0	1791,76	4428,80	11,0083				( $\pm 1,50$ )	( $\pm 8,06$ )	( $\pm 0,0067$ )
61	0	0	2033,77	4886,81	13,2251						
55	30	0	2400,12	5470,77	16,8652						
50	0	0	2655,42	5829,61	19,4550						
42	0	0	2913,43	6089,51	22,2235						
36	0	0	3053,58	6197,50	23,8161						
27	0	0	3226,55	6295,34	25,8666						
15	0	0	3411,48	6371,39	28,0149						
0	0	0	3618,93	6424,44	30,3998						
			( $\pm 1,03$ )	( $\pm 6,35$ )	( $\pm 0,0053$ )						

(Absteigender Ast der Flugbahn)

(Aufsteigender Ast der Flugbahn)





Bahn Nr. 6:  $v_0 = 650 \text{ m/sec}$ ;  $\varphi = 70^\circ$ ;  $2R = 0,077 \text{ m}$ ;  $P = 6,9 \text{ kg}$ ;  $\delta = 1,200 \text{ kg/obm}$ ;  $t = 1$ .

$\phi$ (°)	$\phi'$	$\phi''$	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)	$\phi$ (°)	$\phi'$	$\phi''$	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)
70	0	0	650,0	0,00	0,00	0,00	-25	0	0	89,7	3066,30	5189,92	32,8129
69	45	0	567,6	160,95	448,66	0,7863	-45	0	0	110,4	3413,91	4988,93	37,1858
69	08	0	449,2	447,11	1208,00	2,3687					( $\pm 0,64$ )	( $\pm 1,01$ )	( $\pm 0,0084$ )
68	0	0	348,9	748,27	1992,80	4,4932	-57	0	0	188,7	8733,32	4530,35	41,8465
75	0	0	264,06	1225,10	3092,71	8,5225	-67	0	0	174,9	4157,64	3780,91	47,3212
				( $\pm 0,41$ )			-74	0	0	216,9	4636,02	2853,11	54,7096
58	30	0	190,2	1704,53	4135,69	13,9779	-79	28	33	258,48	5170,35	+ 0,072	65,1648
					( $\pm 0,66$ )	( $\pm 0,0022$ )					( $\pm 0,78$ )	( $\pm 1,25$ )	( $\pm 0,0088$ )
49	0	0	141,0	2072,68	4764,04	18,6744							
85	0	0	107,8	2882,81	5094,61	22,7965							
20	0	0	91,4	2581,36	5226,00	25,7552							
0	0	0	88,78	2746,39	5269,437	28,8881							
				( $\pm 0,61$ )	( $\pm 0,87$ )	( $\pm 0,0031$ )							

(Absteigender Ast der Flugbahn)

(Aufsteigender Ast der Flugbahn)

Bahn Nr. 7:  $v_0 = 400$  m/sec;  $\varphi = 20^\circ$ ;  $2R = 0,077$  m;  $P = 6,9$  kg;  $\delta = 1,200$  kg/cbm;  $i = 1$ .

$\phi$ ( $^\circ$ ' '')	$v$ (m/sec)	$z$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)	$\phi$ ( $^\circ$ ' '')	$v$ (m/sec)	$z$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)
20 0 0	400,0	0,00	0,00	0,00	- 1 53 25,46	240,0	3257,07	624,88	11,8960
19 40 0	389,7	92,41	83,34	0,2487	- 4 0 0	235,8	3469,19	618,99	12,2899
19 20 0	380,3	180,22	64,54	0,4909	- 9 0 0	227,9	3946,24	559,87	14,3645
19 07 43,03	375,0	281,99	82,57	0,6867	- 14 0 0	222,3	4396,09	467,98	16,4046
18 30 0	360,7	388,05	133,93	1,0708	- 17 0 0	220,0	4657,85	395,62	17,6860
17 45 0	347,0	550,58	188,60	1,5680	- 20 0 0	218,4	4914,08	309,74	18,8678
17 0 0	335,8	705,97	287,10	2,0446	- 22 0 0	217,6	5082,91	245,16	19,6989
16 0 0	323,6	899,07	294,82	2,6546	- 24 0 0	217,2	5252,14	179,69	20,5889
15 0 0	319,6	1079,11	344,45	3,2441	- 26 0 0	217,0	5420,74	95,55	21,8871
14 0 0	305,1	1249,81	387,95	3,8128	- 28 0 0	217,12	5592,08	9,27	22,2566
12 35 07,05	295,0	1476,08	441,82	4,5876	- 28 12 45	217,148	5603,77	+0,004	22,3404
10 0 0	280,1	1856,51	517,88	5,9847			( $\pm 0,2$ )	( $\pm 0,4$ )	( $\pm 0,0009$ )
7 0 0	266,4	2252,09	577,10	7,4072					
3 0 0	252,5	2726,99	619,91	9,2588					
0 0 0	244,5	3059,71	623,086	10,58172					
		( $\pm 0,124$ )	( $\pm 0,03$ )	( $\pm 0,0001$ )					

(Absteigender Ast der Flugbahn)

(Aufsteigender Ast der Flugbahn)

Bahn Nr. 8:  $v_0 = 400$  m/sec;  $\varphi = 45^\circ$ ;  $2R = 0,077$  m;  $P = 6,9$  kg;  $\delta = 1,200$  kg/cbm;  $t = 1$ .

$\delta$ ( $^\circ$ )	"	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)	$\delta$ ( $^\circ$ )	"	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)
45	0	400,00	0,00	0,00	0,00	-10	0	158,2	4425,72	2263,75	22,7970
43	30	347,9	365,55	358,24	1,9799	-23	0	160,0	5006,06	2092,88	26,6942
40	15	37,19	948,71	888,26	3,8395	-35	0	169,2	5580,644	1770,129	30,6371
35	0	250,8	1636,109	1426,950	7,04105				( $\pm 0,17$ )	( $\pm 0,25$ )	( $\pm 0,0005$ )
			( $\pm 0,12$ )	( $\pm 0,10$ )	( $\pm 0,0003$ )	-46	0	185,2	6191,16	1245,87	35,2034
26	0	208,9	2468,23	1921,51	11,2831	-58	0	213,65	—	+143,32	—
14	0	179,0	3260,25	2212,47	15,6668	-59	02	216,80	7119,25	+0,0033	42,1850
0	0	162,483	3971,125	2304,105	19,9887				( $\pm 0,18$ )	( $\pm 0,27$ )	( $\pm 0,0005$ )
			( $\pm 0,16$ )	( $\pm 0,24$ )	( $\pm 0,0004$ )						

Bahn Nr. 9:  $v_0 = 400$  m/sec;  $\varphi = 70^\circ$ ;  $2R = 0,077$  m;  $P = 6,9$  kg;  $\delta = 1,200$  kg/cbm;  $t = 1$ .

$\delta$ ( $^\circ$ )	"	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)	$\delta$ ( $^\circ$ )	"	$v$ (m/sec)	$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)
70	0	400,00	0,00	0,00	0,00	-15	0	80,6	2613,18	3824,85	28,0439
69	0	332,16	228,40	624,91	1,9322	-30	0	88,2	2801,01	3747,59	30,4996
67	15	279,1	514,79	1394,63	4,3610	-70	45	186,8	3943,48	1861,02	46,7294
65	08	35,73	240,00	777,07	1929,26	-74	0	210,4	4172,88	1128,48	50,5631
58	30	175,8	1261,99	2849,96	11,9412	-77	15	236,01	4460,08	+0,050	55,7549
			( $\pm 0,15$ )	( $\pm 1,04$ )	( $\pm 0,0008$ )				( $\pm 0,25$ )	( $\pm 1,59$ )	( $\pm 0,0022$ )
49	0	131,6	1651,70	3998,05	16,3067						
35	0	101,2	1978,54	3684,46	20,1696						
20	0	86,0	2207,59	3812,89	22,9562						
0	0	79,296	2443,982	3849,260	25,9061						
			( $\pm 0,20$ )	( $\pm 1,19$ )	( $\pm 0,0014$ )						

(Aufsteigender Ast der Flugbahn)

(Absteigender Ast der Flugbahn)

4 Flugbahnen wurden mit demjenigen Lösungssystem, das sich 1909 als das genaueste erwiesen hatte und bei dem der Integrationsfehler quantitativ ermittelt worden war, unter Berücksichtigung der Luftgewichtsänderung mit der Höhe und unter Berücksichtigung des Windes berechnet (Oblt. J. Schatte). Dabei wurden jedesmal folgende drei verschiedene Luftwiderstandsgesetze verwendet: a) das Zonengesetz von Chapel-Vallier-Hojel; b) das Zonengesetz von Mayevski-Sabudski; c) das einheitliche Gesetz von Siacci. Die 4 Flugbahnen ergaben

mit dem 1. Gesetz einen Schußweitenfehler von bzw.						— 1,2; — 1,8;
						— 1,2, — 2,5 %
"	"	2.	"	"	"	— 1,5; — 1,0;
						+ 0,4; — 0,7 %
"	"	3.	"	"	"	+ 1,5; + 1,1;
						+ 2,3; + 0,6 %

gegenüber den betreffenden Resultaten der Schießversuche: (das Tabellengesetz von O. v. Eberhard lag damals noch nicht vor).

Diese prozentualen Fehler sind also verhältnismäßig nicht sehr groß und im allgemeinen kleiner als die oben erwähnten Integrationsfehler. Aber es läßt sich nicht ohne weiteres feststellen, welche Fehlerbeträge, die den anderen physikalischen Einflüssen zur Last fallen, sich dabei gegenseitig aufgehoben haben. Daher ist diese Prüfung keineswegs einwandfrei und erschöpfend, und es kann nur vermutet werden, daß die Auswahl des mathematischen Rechnungsverfahrens einen etwas größeren Fehler mit sich bringen kann, als die Auswahl des Luftwiderstandsgesetzes (unter den früher aufgestellten und bisher als bewährt geltenden Gesetzen). Zur Feststellung der einzelnen Teile des physikalischen Fehlers wird man wohl am besten tun, die betreffende erschossene Flugbahn mit dem Gesetz von O. von Eberhard und etwa dem Verfahren von Veithen-Kutta (§ 36) zu berechnen, alsdann die Berechnung jedesmal zu wiederholen, mit Berücksichtigung des Windes und der Änderung von  $\delta$ , dann mit Rücksicht auf die Änderung von  $g$ , ferner auf die Erdrotation und endlich, wenn dies später allgemein üblich geworden ist, auf die Geschößrotation. Schließlich müßte man suchen, alle diese Einflüsse gleichzeitig zu berücksichtigen. Dem Ballistiker liegt hier eine reiche Fülle von ungelösten Aufgaben vor.

Nicht versäumt soll übrigens werden, auch an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß die photogrammetrisch aufgenommenen Geschößflugbahnen und die daraus erhaltenen Luftschußtafeln ein vorzügliches Material zur Genauigkeitsprüfung enthalten dürften. A. Nowakowski (Österreich) scheint der erste gewesen zu sein, der dies (1912) erkannt

und eine solche Prüfung begonnen hat. (Die Resultate von A. Nowakowski sind schon in der ersten Auflage von Band III erwähnt worden.) Neuerdings hat K. Becker zahlreiche erschossene Flak-Flugbahnen mit dem Eberhardschen Verfahren (§ 40) geprüft und gefunden, daß die errechneten Flugbahnen „sich im allgemeinen den erschossenen und auf Normalbedingungen reduzierten Punkten ausgezeichnet anpassen“.

## § 42. Über die Fehler, die speziell bei dem „Schwenken einer Flugbahn“ entstehen können.

Die verschiedenen Methoden, die in der Ballistik vorgeschlagen worden sind, um eine Flugbahn zu schwenken, haben folgenden Zweck: Aus der Schußtafel einer bestimmten Waffe und Geschosßart habe man entnommen, daß bei der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ein Punkt  $Z_1$  des Mündungshorizonts mit der Kartenentfernung  $w_1$  getroffen wird, wenn der Abgangswinkel  $\alpha$  angewendet wird, (vom Abgangsfehlerwinkel sei dabei abgesehen). Man wünscht allein aus diesen Angaben einen einfachen Schluß zu ziehen auf den Fall, daß zwar mit der gleichen Geschosßart und der gleichen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  geschossen wird, daß aber das Ziel  $Z$  nicht mehr im Mündungshorizont, die Visierlinie nach dem Ziel nicht mehr wagrecht liegt, sondern daß die Visierlinie um einen bestimmten Winkel  $E$  (Geländewinkel, Visierwinkel) gegen die Wagrechte geneigt ist. Wie groß ist die direkte Entfernung  $w$  des Treffpunkts  $Z$  auf dem schiefen Gelände, wenn der frühere Abgangswinkel als Aufsatzwinkel  $\alpha$  wieder verwendet wird; oder umgekehrt, welcher neue Aufsatzwinkel  $\alpha$  muß benutzt werden, damit ein auf dem schiefen Gelände gelegener Punkt  $Z$  getroffen wird, der die frühere direkte Entfernung  $w_1$  von der Mündung der Waffe hat? Die Methoden des Schwenkens, die im folgenden kurz besprochen werden, sind mehr oder weniger rohe Näherungsverfahren zur Lösung von äußerballistischen Aufgaben, und es handelt sich um die Größe der damit verbundenen mathematischen Fehler.

### 1. Das gewöhnliche Verfahren des Schwenkens einer Flugbahn.

Von diesem Verfahren war schon in § 4 (für den leeren Raum) und in § 32<sub>4</sub> (gelegentlich der Reihenentwicklungen) kurz die Rede. Das Verfahren besteht in folgendem.

Eine Flugbahn  $OS_1Z_1$  (s. Abb. 58) wird wie eine starre Kurve behandelt, die um den Geländewinkel  $E$  in die steile Lage  $OSZ$  gedreht werden könne. Umgekehrt, wenn ein Ziel  $Z$ , das unter dem Geländewinkel  $E$  erscheint, mit dem richtigen Abgangswinkel zur Horizontalen  $\varphi = E + \alpha$  getroffen wird, so nimmt man an, daß die Flug-

bahn  $OSZ$  berechnet werden dürfe, wie wenn eine Flachbahn  $OS_1Z_1$  mit dem Abgangswinkel  $\varphi - E$  oder  $\alpha$ , bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit usw., vorläge.

Die Größe des entstehenden Fehlers läßt sich an der Hand der obigen Tabelle für die 9 Normalbahnen leicht feststellen. Hier mögen die Ergebnisse einer Prüfung mitgeteilt werden, die schon 1909 im ballistischen Laboratorium angestellt wurde. Es wurden nach dem planimetrischen Verfahren zu 4 verschiedenen Steilbahnen  $OSZ$  mit 4 verschiedenen Abgangswinkeln desselben Geschosses die schiefen Schußweiten  $w$  oder  $OZ$  berechnet, die zu mehreren Geländewinkeln  $E$  gehören. Berechnete man alsdann je zu dem betreffenden Aufsatzwinkel  $\varphi - E$  als Abgangswinkel die Flachbahnschußweite  $w_1$  nach dem besten Verfahren von Abschnitt 5 (von E. Vallier) und verglich man die Schußweiten  $w_1$  und  $w$ , so erhielt man den Fehler  $\varepsilon$ , der im vorliegenden Fall mit der Anwendung dieser Methode des Schwenkens verbunden ist.

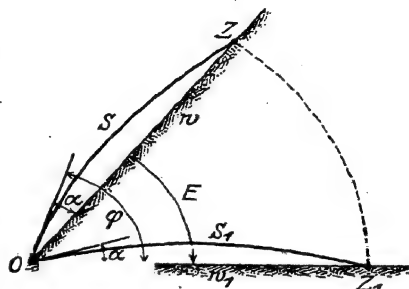


Abb. 58.

Nachstehende Tabelle läßt für die erwähnten Verhältnisse erkennen, daß bei Anwendung desselben Visiers auf steil ansteigendem Gelände weiter geschossen wird, als auf wagrechtem Gelände; oder, anders ausgedrückt, wenn wie üblich die Visiereinrichtung der Waffe für Ziele im Mündungshorizont geteilt ist, so hat man gegen ein gleichweit entferntes, aber stark erhöhtes Ziel nicht dieselbe Visierstellung anzuwenden, wie gegen ein Ziel in Höhe der Waffe, sondern eine kleinere Visierstellung.

Aus den in § 4 dargelegten Beziehungen ist bekannt, daß wir uns besonders bei diesen Beispielen im Gebiete des Weitschusses befinden und daß sich die betreffenden Verhältnisse vollständig umkehren können. Jedenfalls aber kann der Fehler, der durch das einfache Schwenken der Flugbahnen entsteht, absolut genommen sehr bedeutende Beträge annehmen.

## 2. Schwenken nach von Burgsdorff und Gouin.

Das Prinzip ist folgendes: Gegeben sei die Flachbahn  $OZ_1$  mit Abgangswinkel  $\alpha_1$  (s. Abb. 59). Hierzu kennt man die Endfallhöhe  $A_1Z_1 = f$  senkrecht zum Mündungshorizont im Auffallpunkt  $Z_1$ , sowie die Strecke  $OA_1 = a$ . Man denke sich nun  $OA_1Z_1$  als ein Gestänge mit den Scharnieren  $O$  und  $A_1$  oder als eine Angelrute  $OA_1$ .

	Gelände- winkel $E =$	Der Aufsatz- winkel $\alpha$ gegen- über dem schießen Gelände $\alpha = \varphi - E =$	Flachbahnschuß- weite $w_1$ mit Abgangswinkel $\alpha$ bei Annahme eines Gelände- winkels Null	Wahre Steilbahn- schußweite $w$ bei Geländewinkel $E$ und Aufsatz- winkel $\alpha$	Differenz zwischen $w$ und $w_1$ in $m$ $\varepsilon = w - w_1 =$	Fehler in Prozenten von $w_1$ $\%$
$\varphi = 80^\circ$	78°	2°	$w_1 = 1111 \text{ m}$	$w = 2847 \text{ m}$	1736	156
	76	4	1791	3585	1744	91
	74	6	2325	3713	1388	60
$\varphi = 75^\circ$	74	1	667	1525	858	129
	72	3	1480	2827	1347	91
	70	5	2069	3416	1347	65
	68	7	2554	3656	1102	43
$\varphi = 70^\circ$	68	2	1117	2094	977	88
	66	4	1791	2909,5	1118,5	62
	64	6	2326	3352	1026	44
	62	8	2770	3590	820	30
$\varphi = 65^\circ$	64	1	668	1140	472	71
	62	3	1480	2300	820	55
	60	5	2069	2918	849	41
	58	7	2554	3310	756	30
	56	9	2966	3565	599	20
	54	11	3319	3724	405	12

mit Schnur  $A_1 Z_1$ ; dieses System drehe man um den Abgangspunkt  $O$  als festen Drehpunkt in die Lage  $O A Z$ , so daß  $O A = O A_1 = a$  und  $A Z = A_1 Z_1 = f$  bleibt. Die Drehung wird so lange fortgesetzt,

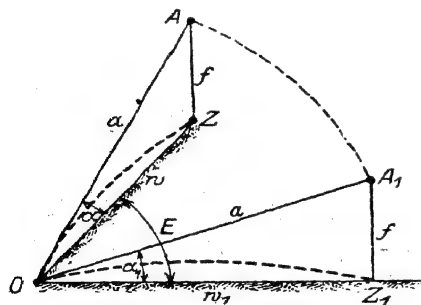


Abb. 59.

bis  $Z_1$  in das schiefe ansteigende Gelände  $O Z$  gelangt, dessen Geländewinkel  $Z O Z_1 = E$  gegeben ist. Dann soll  $O Z$  oder  $w$  die Schußweite auf dem schiefen Gelände für den Steilschuß sein, wenn man bezüglich des Horizonts durch  $O$  mit dem Abgangswinkel  $A O Z_1 = E + \alpha$  oder bezüglich des schiefen Geländes  $O Z$  mit dem Aufsatzwinkel  $\alpha$  schießt. Dieser Winkel  $\alpha$  und die Schußweite  $w$  sind mit eben dieser Drehung gegeben; man erhält diese

Größen entweder durch graphische Konstruktion oder durch Rechnung:

$$\sin \alpha = \sin \alpha_1 \cdot \cos E;$$

$$w = w_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \cos (E + \alpha) \cdot \operatorname{cosec} \alpha.$$

Bei der graphischen Konstruktion wird man berücksichtigen, daß bei der erwähnten Bewegung auch  $Z_1$  einen Kreis beschreibt. Man

denke sich vertikal unterhalb  $O$  einen Punkt  $O_1$  in der Entfernung  $OO_1 = A_1 Z_1 = AZ = f$ , so hat man ein bewegliches Parallelogramm  $OO_1 Z_1 A_1$  in der ersten Lage oder  $OO_1 ZA$  in der zweiten Lage. Die festen Drehpunkte sind  $O$  und  $O_1$ . Es bewegt sich somit  $Z_1$  auf einem Kreise  $Z_1 Z$  mit dem Mittelpunkt in  $O_1$  und dem Radius  $a$ . Diese Überlegung kann auch dazu führen, mittels eines Mechanismus, nämlich eines Gelenkparallelogramms, zu irgendeiner Zielentfernung  $OZ$  und irgendeinem Geländewinkel  $E$  den Aufsatzwinkel  $ZOA$  oder  $\alpha$  zu ermitteln. (Apparat hergestellt von der Firma Haker & Heidorn in Hamburg.)

Bei der Aufstellung dieses Prinzips wurde von der folgenden mechanischen Vorstellung ausgegangen: die Flachbahn  $OZ_1$  wird vom Geschöß in der Gesamtflugzeit  $T$  sec beschrieben, indem der Luftwiderstand und die Schwere gleichzeitig auf das Geschöß wirken. Dasselbe Ziel  $Z_1$  würde erreicht werden, wenn diese beiden Kräfte nacheinander zur Wirksamkeit kämen und je  $T$  sec das Geschöß beeinflussten. Dann würde das mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung  $OA_1$  geschleuderte Geschöß zuerst etwa nur dem Luftwiderstand, aber nicht der Schwere unterworfen sein und folglich in der Geraden  $OA_1$  bis  $A_1$  gelangen, alsdann unter der alleinigen Wirkung der Schwere (bzw. unter der Wirkung von Schwere und Luftwiderstand) von  $A_1$  und  $Z_1$  herabfallen. Diese Strecken  $OA_1 = a$  und  $A_1 Z_1 = f$  bleiben bei der Steilbahn  $OZ$  gleichgroß, da die Überlegung dieselbe ist, also wird beim Horizontalabgangswinkel  $AOZ_1$  der Punkt  $Z$  getroffen; der Unterschied zwischen Flachbahn und Steilbahn ist nur der, daß bei letzterer die Abnahme der Luftdichte mit der Höhe sich in etwas anderer Weise geltend macht als bei der Flachbahn.

Es ist klar, daß auch diese mechanische Vorstellung im Prinzip unstrang ist, d. h. selbst abgesehen von der Veränderlichkeit der Luftdichte. Denn die beiden Bewegungen längs  $a$  und längs  $f$  sind, wie sich in § 17 mit Verwendung eines schiefwinkligen Koordinatensystems deutlich zeigte, nicht voneinander unabhängig; ebenso wie die Geschößbewegungen längs der  $x$ - und  $y$ -Achse voneinander abhängen (außer für das spezielle Luftwiderstandsgesetz, bei dem der Luftwiderstand proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit gesetzt wird). Wäre diese Unabhängigkeit für endliche Flugstrecken vorhanden, so wäre die Lösung des ballistischen Problems eine sehr einfache. Der Satz vom Parallelogramm der Wege gilt aber für endliche Wegstrecken nur dann, wenn es sich um Kräfte handelt, die nach Größe und nach Richtung konstant sind. Das ist hier nicht der Fall; der Luftwiderstand ist vielmehr variabel. Diese Methode des Schwenkens stellt also nur ein Näherungsverfahren



ren vor, das mit einem Fehler behaftet ist. Zur Ermittlung dieses Fehlers können wiederum obige 4 Steilbahnen dienen; man kennt je  $E$ ,  $\alpha$ ,  $w$ , kann also  $\alpha_1$  und  $w_1$  zeichnen oder berechnen. Wenn man alsdann die zum Abgangswinkel  $\alpha_1$  und zu sonst gleichen Umständen gehörige richtige Flachbahnschußweite  $w_r$  beobachtet oder mit dem Vallierschen Verfahren berechnet, dessen Fehler hier vernachlässigt werden darf, so kann man die beiden Schußweiten  $w_1$  und  $w_r$  miteinander vergleichen, wovon die erste  $w_1$  als Flachbahnschußweite zum Abgangswinkel  $\alpha_1$  gehören soll, die andere  $w_r$  als Flachbahnschußweite zu  $\alpha_1$  wirklich gehört.

Im obigen Beispiel mit  $\varphi = 80^\circ$  war u. a.  $E = 78^\circ$  oder  $\alpha = 2^\circ$  gewählt. Daraus ergibt sich  $\alpha_1 = 9^\circ 39,8'$ ,  $f = 572,40$  m; hieraus  $w_1 = f \cdot \cotg \alpha_1 = 3361$ . Andererseits gehört zum gleichen Abgangswinkel  $\alpha_1 = 9^\circ 39,8'$  die wahre Flachbahnschußweite  $w_r = 3088$  m; Differenz 273 m. Will man diesen Fehler in Prozenten ausdrücken, so kann es zweifelhaft erscheinen, auf welche Schußweite die Prozente zu beziehen sind; nimmt man hierfür  $w_1$ , so beträgt der Fehler  $8,1\%$ . Für  $E = 76^\circ$  oder  $\alpha = 4^\circ$  wird  $w_1 = 4712$  m,  $w_r = 4169$  m, Fehler 543 m =  $11,5\%$ ; für  $E = 74^\circ$  oder  $\alpha = 6^\circ$ ,  $w_1 = 5459$ ,  $w_r = 4722$ , Fehler 737 m =  $13,5\%$ . Auch bei den anderen Beispielen zeigte es sich, daß der prozentuale Fehler der Methode mit  $\alpha$  ansteigt, jedoch durchweg erheblich kleiner ausfällt als derjenige, der bei dem gewöhnlichen Verfahren des Schwenkens entsteht.

### 3. Schwenken nach Percin.

Wenn das Ziel  $Z$  getroffen werden soll, das sich auf einem schiefen Gelände  $OZ$ , mit Geländewinkel  $ZOB = E$  in der Enternung  $w$  m befindet, so ist derjenige Aufsatzwinkel  $\alpha$  bezüglich des Geländes  $OZ$

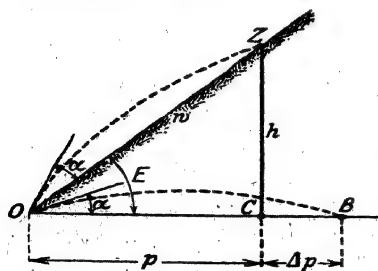


Abb. 60.

anzuwenden, der bei einer Flachbahn  $OB$  als Abgangswinkel zur Schußweite  $p \pm \Delta p = OB$  gehört. Hier bedeutet  $p$  die Horizontalprojektion  $OC$  oder  $w \cdot \cos E$  der Zielentfernung  $w$ ;  $\Delta p$  ist  $= \frac{\alpha h}{100}$ ,  $h$  die Zielhöhe  $OZ$ ; (+ resp. -, je nachdem  $E >$  bzw.  $< 2\alpha$  ist; wenn  $E = 2\alpha$ , ist  $\Delta p = 0$ ). Unter Umständen soll  $\Delta p$  mit einem Faktor  $k$  multipliziert werden, der von 1 verschieden ist und empirisch bestimmt werden muß.

1. Beispiel s. o.  $\varphi = 80^\circ$ : Für  $\alpha = 2^\circ$  wird  $h = 2785$  m;  
 $\Delta p = \frac{2 \cdot 2785}{100} = 55,70$  m, also  $OB = 647,7$  m. Dazu gehört der rich-

tige Abgangswinkel  $\alpha = 0^{\circ} 57,45'$ ; nach Percin soll dagegen  $\alpha = 2^{\circ}$  sein; Differenz  $1^{\circ} 2,55' = 52^{\circ}/_{0}$ .

Zu  $\alpha = 4^{\circ}$ ,  $h = 3430$  m,  $OB = 992,2$  m, wahres  $\alpha = 1^{\circ} 41,7'$ , statt nach Percin  $4^{\circ}$ , Fehler  $58^{\circ}/_{0}$ .

Zu  $\alpha = 6^{\circ}$ ,  $h = 3569,5$  m,  $OB = 1238,2$  m, wahres  $\alpha = 2^{\circ} 14,1'$ , statt nach Percin  $6^{\circ}$ , Fehler  $63^{\circ}/_{0}$ .

2. Beispiel s. o. ( $\varphi = 75^{\circ}$ ):

Für  $\alpha = \text{resp. } 1, 3, 5, 7^{\circ}$  wird der Fehler 42, 50, 53,  $58^{\circ}/_{0}$ .

3. Beispiel s. o. ( $\varphi = 70^{\circ}$ ):

Für  $\alpha = \text{resp. } 2, 4, 6, 8^{\circ}$  wird der Fehler 26, 29, 30,  $32^{\circ}/_{0}$ .

Ergebnis: Das gewöhnliche Verfahren, eine Flugbahn zu schwenken, ist bei sehr steilem Schuß nicht verwendbar. Das Verfahren von Percin gibt unter gleichen Umständen ebenfalls zu große Fehler, falls nicht ein empirischer Korrektionsfaktor  $k$  eingeführt wird; da jedoch für Geländewinkel  $E$  bis ca.  $65^{\circ}$  der prozentuale Fehler bei dieser Methode ziemlich konstant ausfällt, wird man mit Einführung eines solchen Faktors öfters gut brauchbare Resultate erhalten können. Verhältnismäßig noch die kleinsten Fehler entstehen bei Anwendung des Burgsdorffschen Verfahrens, insbesondere für den rasanten Teil des aufsteigenden Astes einer Steilbahn kann es, je nach der gewünschten Genauigkeit, oft gute Dienste leisten.

## Neunter Abschnitt.

### Sekundäre Einflüsse.

### Einseitige Geschosßabweichungen.

#### § 43. Über einseitige Geschosßabweichungen im allgemeinen.

Wenn mit gleicher Waffe, gleicher Munition und gleichem Visier wiederholt nach demselben Punkt  $Z$  geschossen wird, gruppieren sich die Auftreffpunkte der Geschosse um einen mittleren Treffpunkt  $T$ . Von dieser Gruppierung wird im Abschnitt 11 (zufällige Abweichungen) des näheren die Rede sein. Hier handelt es sich um die Lage des tatsächlichen mittleren Treffpunkts  $T$  gegenüber dem beabsichtigten Treffpunkt  $Z$ .

Im allgemeinen wird  $T$  eine einseitige Abweichung gegenüber  $Z$  aufweisen, die ihre Ursachen in folgendem haben kann: Erstens kann die Rohrerhöhung (das Visier), also der Abgangswinkel  $\varphi$ , un-

richtig gewählt sein; dies wird eintreten, wenn die Zielentfernung zu groß oder zu klein geschätzt ist oder wenn zu hoch oder zu tief gezielt wurde oder durch Windeinfluß oder wenn die Waffe nicht genau eingeschossen, d. h. wenn die mit Entfernungsteilung versehene Visiereinrichtung falsch bemessen ist. Zweitens kann der ballistische Koeffizient  $c$  nicht der normale (schußtafelmäßige) sein, insofern am Versuchstag das Gewicht  $\delta$  eines Kubikmeters der Luft — bestimmt durch Lufttemperatur, Barometerstand, Luftfeuchtigkeit —, nicht dasjenige ist, für das die Schußtafel aufgestellt, die Visiereinrichtung getroffen ist; in selteneren Fällen kann die Spitzenform des Geschosses, das Kaliber, das Gewicht von der Norm abweichen usw. Drittens kann die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses von der schußtafelmäßigen abweichen, indem die Pulverladung zu kleines oder zu großes Gewicht oder nicht die normale (schußtafelmäßige) Temperatur und Feuchtigkeit besitzt oder indem der Lauf sich stark erwärmt hat usw. Viertens kann das Azimut der Schußebene unrichtig gewählt sein, indem Seitenabweichungen zu berücksichtigen wären; solche Abweichungen der Geschosse nach der Seite können eintreten durch seitlichen Wind, durch Geschosßrotation, durch Erdrotation (jedenfalls ist in Beziehung auf die letztere eine Untersuchung darüber notwendig, ob dieser Einfluß so bedeutend ist, daß er in Anbetracht der zufälligen unvermeidbaren Abweichungen berücksichtigt werden muß); bei Gewehren können durch das Aufstecken des Seitengewehrs Seitenabweichungen erfolgen; ferner werden solche durch Schiefstellung der Räderachse des Geschützes bzw. durch Verkanten des Gewehrs beim Zielen bewirkt usw.

Solche Abweichungen heißen einseitige oder konstante oder regelmäßige, da sie im allgemeinen nach derselben Seite gehen. Sie können ausgeschaltet werden, entweder im voraus durch Berechnung oder Beobachtung oder während des Schießens selbst durch Korrektur auf Grund der Beobachtung (Einschießen); so werden z. B. mittels des Aufsatzes bei der Artillerie im voraus ausgeschaltet die Abweichungen durch Geschosßrotation und meist auch die durch Schiefstellung der Räderachse. — Allgemein wird man darauf ausgehen, Störungen der Flugbahn zu einseitigen zu machen, falls sie es noch nicht sind; hierfür geben die Abweichungen der Geschosse durch Rotation ein Beispiel: die früheren kugelförmigen Geschosse zeigten bedeutende Abweichungen nach unbestimmter Seite; durch Einführung exzentrischer Geschosse und Einlagerung der Kugel entweder mit Schwerpunkt nach oben oder nach unten im Rohr wurden die Abweichungen zu regelmäßigen gestaltet und konnten damit von vornherein berücksichtigt werden.

**§ 44. Einfluß einer kleinen Änderung des Abgangswinkels  $\varphi$  oder der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  oder des (von Kaliber  $2R$ , Geschößgewicht  $P$ , Formfaktor  $i$  und Luftgewicht  $\sigma$  abhängigen) ballistischen Koeffizienten  $c$ .**

Bezüglich der einseitigen Geschößabweichungen handelt es sich zunächst in diesem § 44 um Aufgaben der folgenden Art: Angenommen, unter den Verhältnissen, die der Schußtafel eines Geschützes als normal zugrunde gelegt worden sind, also bei den schußtafelmäßigen Werten von  $v_0$  und  $c$  müßte bei Verwendung des Abgangswinkels  $\varphi$  das Geschöß nach der Zeit  $t$  in einem bestimmten Punkt  $(xy)$  und unter dem Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente gegen die Horizontale angelangt sein. Von diesem Punkt  $(xy)$  oder  $P$  eines bergigen Geländes aus steige das Gelände unter einem bekannten Böschungswinkel an oder falle es unter bekanntem Winkel ab. Nun möge an einem Versuchstage entweder die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  um den kleinen Betrag  $\Delta v_0$  gegenüber dem schußtafelmäßigen Wert  $v_0$  sich geändert haben, oder möge der Koeffizient  $c$  aus irgendeinem Grunde, etwa durch meteorologische Einflüsse, um  $\Delta c$  anders liegen, oder möge  $\varphi$  um  $\Delta \varphi$  anders genommen worden sein; oder aber können alle drei Größen  $v_0$ ,  $c$  und  $\varphi$  sich geändert haben. Man will ohne weitläufige Berechnungen erfahren, welcher Punkt  $P_1$  des Geländes an Stelle von  $P$  mutmaßlich getroffen werden wird. Eine andere Aufgabe stellt sich bei dem Erschießen von Flugbahnen ein: es sei eine Flugbahn eines Artilleriegeschosses durch photogrammetrische Sprengpunktaufnahmen (vgl. Band III) punktweise festgelegt worden, zum ersten Sprengpunkt gehören dann die gemessenen Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$  und die gemessene Flugzeit  $t_1$ , zum nächsten Sprengpunkt gehören die Werte  $x_2, y_2, t_2$  usw. Man wünscht die sämtlichen Messungstriple  $xyt$  auf die schußtafelmäßigen Werte von  $v_0$  und  $c$ , sowie auf Windstille zu reduzieren. Die meisten Aufgaben solcher Art werden sich auf die Elemente des Aufschlagspunkts im Mündungshorizont beziehen. Häufig handelt es sich um die Frage, welche Änderungen  $\Delta X$ ,  $\Delta T$ ,  $\Delta \omega$  die Schußweite  $X$ , die Gesamtflugzeit  $T$  und der spitze Auffallwinkel  $\omega$  erfahren, wenn  $\varphi$  um  $\Delta \varphi$  oder  $v_0$  um  $\Delta v_0$  oder  $c$  um  $\Delta c$  geändert wird oder wenn alle drei Größen  $\varphi$ ,  $v_0$  und  $c$  sich ändern.

Zur Lösung solcher und ähnlicher Aufgaben sind von zahlreichen Ballistikern mehr oder weniger umfangreiche Berechnungen angestellt und Formeln aufgestellt worden, insbesondere von St. Robert, Siacci, Sabudski, Ingalls, Charbonnier, Vallier, Veithen, Stübler u. a. Dabei muß auf einen wichtigen Punkt aufmerksam gemacht werden: alle solche Differenzenformeln zur Berechnung von

$\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta \vartheta$ , bzw. von  $\Delta X$ ,  $\Delta T$ ,  $\Delta \omega$  bringen bei ihrer tatsächlichen Verwendung notwendig Fehler mit sich, die um so größer ausfallen, je größer die Änderungen  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta v_0$ ,  $\Delta c$  sind; denn bei der Aufstellung der betreffenden Formeln werden die Differentiale, also die mathematisch unendlich kleinen Änderungen näherungsweise durch endlich kleine Unterschiede ersetzt. Daher dürfen die betr. Formeln nur für sehr kleine Beträge von  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta v_0$ ,  $\Delta c$  benützt werden (darüber s. w. u.). Und falls es sich doch um einigermaßen beträchtliche Unterschiede in  $\varphi$ ,  $v_0$  und  $c$  handelt, tut man besser, die Differenzenformeln nicht zu verwenden, sondern mit den neuen Elementen  $\varphi + \Delta \varphi$ ,  $v_0 + \Delta v_0$ ,  $c + \Delta c$  die ganze Flugbahnberechnung neuerdings durchzuführen. Aus diesem Grunde ist es auch von geringem Interesse für die praktischen Bedürfnisse der Ballistik, wenn zur Berechnung von  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta \varphi$  bzw. von  $\Delta X$ ,  $\Delta T$ ,  $\Delta \omega$  komplizierte Formelausdrücke aufgestellt werden. Vielmehr wird man darauf ausgehen müssen, einfache und leicht benützbare Differenzenformeln aufzustellen. Solche Formeln sind diejenigen, die wohl als Erster C. Veithen mit Hilfe des Siaccischen Lösungssystems entwickelt hat. Im folgenden sollen unter A. einige der Veithenschen Ausdrücke abgeleitet werden und zwar zunächst aus dem besonders einfachen Lösungssystem von Piton-Bressant, weil sich durch diese Ableitung deutlich zeigen läßt, daß man, je nach den willkürlichen Annahmen und Voraussetzungen, die man zu Hilfe nimmt, richtige Differenzenformeln der verschiedensten Art aufstellen kann. Alsdann werden unter B. die allgemeinen und genaueren Formeln entwickelt, die E. Stübler gegeben hat und in denen die Veithenschen als Spezialfälle enthalten sind. Darauf folgt die Zusammenstellung der Formeln samt einigen Zahlenbeispielen.

A. Eine Flugbahn sei unter den nicht schußtafelmäßigen Einflüssen des Schießtages durch photogrammetrische Sprengpunktaufnahmen punktwise festgelegt worden; man will nun die einzelnen erschossenen Punkte auf normale Verhältnisse reduzieren, wobei  $c$  um  $\Delta c$ ,  $v_0$  um  $\Delta v_0$ ,  $\varphi$  um  $\Delta \varphi$  zu ändern sei. Hier soll es sich allein um die Änderung von  $c$  (bei gleichbleibenden Werten von  $v_0$  und  $\varphi$ ) handeln. Um welche Beträge  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  sind die gemessenen Elemente  $x$ ,  $y$ ,  $t$  eines bestimmten einzelnen Flugbahnpunkts abzuändern?

Man hat zu diesem Zweck die Flugbahn 1 (vgl. die schematische Abbildung 61) in eine andere, der ersten unmittelbar benachbarte Flugbahn 2 umgewandelt zu denken, die denselben Abgangspunkt  $O$ , dieselbe Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses und dieselbe Anfangstangente besitzt. Es fragt sich, welcher Punkt an Stelle des Bahn-

punkts  $P$  oder  $(xy)$  zum Zweck einer solchen Reduktion auf normalen Wert von  $c$  (z. B. auf Normalluftgewicht am Boden) zu nehmen ist. Hierbei hat man freie Wahl, die Flugbahn 2 an der betreffenden Stelle entweder dadurch festzulegen, daß von  $P$  aus auf derselben Vertikalen, also bei konstantem  $x = OA$  zu einem Punkt  $P_1$  der Bahn übergegangen und das zugehörige  $\Delta y = PP_1$  berechnet wird, oder aber bei konstantem  $y = AP$  von  $P$  aus zu einem Punkt  $P_2$  weiterzugehen und das zugehörige  $\Delta x = PP_2$  zu ermitteln, oder endlich sowohl  $x$  als  $y$  sich ändern zu lassen,  $x$  um  $PB = \Delta x$  und  $y$  um  $BP_3 = \Delta y$ .

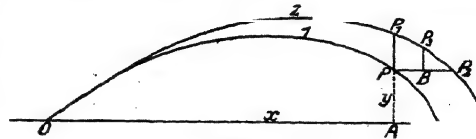


Abb. 61.

Im letzteren Fall muß selbstverständlich eine Annahme über die Richtung der Änderung  $PP_3$  eintreten. Z. B. kann vorausgesetzt werden, daß dabei die Verschiebung von  $P$  bis  $P_3$  auf einem gegebenen schiefen Gelände vom Gefälle  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda$ , oder daß sie auf der durch  $P$  gehenden Kurve gleicher Bahngeschwindigkeit  $v$ , oder auf der Kurve gleicher Horizontalgeschwindigkeit  $v \cos \vartheta$  erfolgen solle.

Auch die Berechnung dieser kleinen Änderungen von  $y$  bzw. von  $x$ , oder von  $x$  und  $y$  kann auf sehr verschiedenen Grundlagen erfolgen. Z. B. dadurch, daß die Flugbahn an der Stelle  $P$  durch eine geeignete ganze rationale algebraische Funktion vom 3. Grade in  $x$  also etwa durch eine Kurve nach Piton-Bressant ersetzt wird. Dessen Gleichungssystem war (vgl. § 32):

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} (1 + Kx), \quad \dots \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} (2 + 3Kx), \quad \dots \quad (2)$$

$$v \cos \vartheta = \frac{v_0 \cos \varphi}{\sqrt{1 + 3Kx}}, \quad \dots \quad (3)$$

$$t = \frac{2}{g v_0 \cos \varphi} \cdot \frac{(1 + 3Kx)^{\frac{3}{2}} - 1}{K}. \quad \dots \quad (4)$$

Dabei ist der empirische Faktor  $K$  dadurch bestimmt, daß der Punkt  $P$  gegeben ist, also daß in (1)  $xyv_0\varphi$  bekannt sind.  $K$  ist dem Früheren zufolge proportional dem ballistischen Koeffizienten  $c$  und dieser proportional z. B. dem Luftgewicht  $\delta$ , so daß man hat

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta \delta}{\delta}. \quad (5)$$

Wenn man nun zunächst von  $P$  nach  $P_1$  übergeht, also  $x$  konstant läßt, so wird bei einer unendlich kleinen Änderung von  $K$  in  $K + dK$

$dy = PP_1 = -\frac{gx^3}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot dK$ . Werden hier statt der Differentiale endlich kleine Differenzen genommen, so ist mit Rücksicht auf (5)

$$\Delta y = -\frac{gx^3 K}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\Delta c}{c}. \quad (6)$$

Diese Gleichung, in der  $K$  zuvor für jeden solchen Punkt  $P$  oder  $(xy)$  aus (1) berechnet zu denken ist, könnte zwar zur Reduktion auf normales Luftgewicht dienen. Aber es wäre immerhin damit die Unbequemlichkeit verbunden, daß man eben diese Berechnung von  $K$  aus  $(xy)$  jedesmal ausführen müßte; außerdem werden die Ausdrücke für  $\Delta t$  und für  $\Delta(v \cos \vartheta)$  etwas weniger einfach.

Deshalb möge ein anderer Weg gesucht werden. Von Punkt  $P$  gehen wir zu einem Punkt  $P_3$  in der Weise über, daß dabei  $v \cos \vartheta$  konstant bleiben soll. Die obige Gleichung (3) läßt dann sofort erkennen, daß jetzt  $K \cdot x$  konstant bleibt, so daß  $\frac{\Delta x}{x} = -\frac{\Delta K}{K} = -\frac{\Delta c}{c}$ . Ferner geht aus (4) hervor, daß alsdann  $t$  umgekehrt proportional  $K$  bleibt, also ist auch  $\frac{\Delta t}{t} = -\frac{\Delta K}{K} = -\frac{\Delta c}{c}$ . Aus Gleichung (1) folgt durch Ableitung, da  $Kx$  konstant und  $\frac{dx}{x} = -\frac{dc}{c}$  ist:

$$dy = \operatorname{tg} \varphi \cdot dx - \frac{g \cdot 2x \cdot dx}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot (1 + Kx) = -\operatorname{tg} \varphi \cdot x \cdot \frac{dc}{c} + \frac{gx^2(1+Kx)}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot 2 \frac{dc}{c};$$

also ist wegen (1)

$$dy = \frac{dc}{c} (-x \cdot \operatorname{tg} \varphi + 2(x \operatorname{tg} \varphi - y)) = \frac{dc}{c} \cdot (x \operatorname{tg} \varphi - 2y).$$

Damit sind zur Reduktion auf den normalen  $c$ -Wert die folgenden Differenzengleichungen abgeleitet:

$$\Delta x = -\frac{\Delta c}{c} \cdot x; \quad (8)$$

$$\Delta y = +\frac{\Delta c}{c} (x \cdot \operatorname{tg} \varphi - 2y); \quad (9)$$

$$\Delta t = -\frac{\Delta c}{c} \cdot t; \quad (10)$$

$$\Delta(\operatorname{tg} \vartheta) = +\frac{\Delta c}{c} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta). \quad (11)$$

Analog lassen sich Gleichungen für die Reduktion auf ein anderes  $v_0$  und ein anderes  $\varphi$  bilden.

Veithen hat, wie schon erwähnt, diese Gleichungen (8) bis (11) in anderer Weise, nämlich mittels des Siaccischen Lösungssystems abgeleitet. Dieses war (vgl. 5. Abschn.) das folgende:

$$x = \frac{\sigma^2}{\gamma \cdot c} (D_u - D_{u_0}); \quad t = \frac{\sigma}{c \cdot \gamma} (T_u - T_{u_0});$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2c\gamma} (J_u - J_{u_0});$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{\sigma^2}{2c^2 \gamma^2} \{A_u - A_{u_0} - J_{u_0} (D_u - D_{u_0})\}.$$

Wenn  $c$  in  $c + dc$  übergeht, möge  $x$  in  $x + dx$  und gleichzeitig  $y$  in  $y + dy$  derartig übergehen, daß  $u$  oder  $\frac{v \cos \vartheta}{\sigma}$ , somit auch  $v \cos \vartheta$  konstant bleibt: Da  $\sigma$  und  $\gamma$  als Konstanten der Lösung geführt werden, ergibt sich, daß in dem Gleichungssystem die sämtlichen Klammerausdrücke auf der rechten Seite ungeändert bleiben. Und daraus wiederum folgt, daß  $x \cdot c$ ;  $t \cdot c$ ;  $(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta) \cdot c$ ;  $(x \operatorname{tg} \varphi - y) \cdot c^2$  konstant bleiben. Die drei ersten dieser vier Beziehungen liefern sofort die obigen Gleichungen (8), (10) und (11). Und aus der letzten Beziehung ergibt sich durch Ableitung  $(\operatorname{tg} \varphi \cdot dx - dy) c^2 + 2c \cdot dc \cdot (x \operatorname{tg} \varphi - y) = 0$  oder  $dy = \operatorname{tg} \varphi \cdot dx + 2(x \operatorname{tg} \varphi - y) \cdot \frac{dc}{c}$ , und daraus folgt, da  $dx = -x \cdot \frac{dc}{c}$  ist, wieder die obige Gleichung (9).

Zu bemerken ist noch, daß diese Ableitung von Veithen auch dann Gültigkeit hat, wenn man sich die Flugbahn in mehreren einzelnen Bogenstücken berechnet denkt, deren Enden aneinander anschließen, und daß folglich das Gleichungssystem (8) bis (11) auch auf Steilbahnen Anwendung finden kann.

Um dieses Gleichungssystem auch für den Auffallpunkt im Mündungshorizont (also für  $x = X$ ,  $y = 0$ ,  $\vartheta = -\omega$ ,  $t = T$ ,  $v = v_0$ ) aufzustellen, hat man die obige Abbildung 61 für diesen Punkt zu spezialisieren (vgl. nebenstehende Abbildung 62). Die Linie 1 möge das letzte Stück der Flugbahn darstellen, die zum Wertetripel  $c$ ,  $v_0$ ,  $\varphi$  gehört, dabei sei  $P_1$  der Auffallpunkt; die Linie 2 möge ebenso das Ende der Bahn mit  $c + \Delta c$ ,  $v_0$ ,  $\varphi$  vorstellen, wobei  $P_2$  der Auffallpunkt ist. Dann ist  $\Delta X = P_1 P_2$  die Änderung der Schußweite im Mündungshorizont. Wenn man sich nun wieder wie oben die Gleichungen (8) bis (11) abgeleitet denkt, hat man sich vorzustellen, daß der Punkt  $P_1$  zunächst übergeht in den Punkt  $P_3$ , welcher letzterer gegenüber  $P_1$  die Abszissenänderung  $\Delta x = P_1 B$  und die Ordinatenänderung  $\Delta y = B P_3$  aufweist. Alsdann ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck  $B P_1 P_3$ , daß  $\Delta X = P_1 B + B P_3 = \Delta x + \Delta y \cdot \cotg(\omega + \Delta \omega)$  ist. Entwickelt man  $\cotg(\omega + \Delta \omega)$  und läßt unendlich kleine Größen von der zweiten und von höherer Ordnung weg neben solchen von der ersten Ordnung, so wird

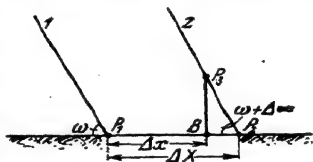


Abb. 62.

$$\Delta X = \Delta x + \Delta y \cdot \cotg \omega. \quad (12)$$

Wenn man hier für  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Ausdrücke in (8) und (9) einsetzt und zugleich berücksichtigt, daß es sich jetzt um den Mün-



dungshorizont, also um  $x = X$  und  $y = 0$  handelt, so erhält man

$$\frac{\Delta X}{X} = - \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega} \cdot \frac{\Delta c}{c}.$$

Ebenso lassen sich die betreffenden Ausdrücke für die Änderung  $\Delta T$  der Gesamtflugzeit  $T$  und für die Änderung  $\Delta \omega$  des spitzen Auffallwinkels  $\omega$  gewinnen, nämlich

$$\Delta T = \left( \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0 \sin \omega} - T \right) \cdot \frac{\Delta c}{c}; \quad \Delta \omega = \left[ \frac{g X \operatorname{tg} \varphi}{v_0^2 \cdot \operatorname{tg} \omega} - \frac{\sin(\varphi + \omega) \cdot \cos \omega}{\cos \varphi} \right] \cdot \frac{\Delta c}{c}.$$

Was  $c$  selbst anlangt, so ist nach dem Zonen-Luftwiderstandsgesetz von Mayevski-Sabudski, also wenigstens angenähert,  $c$  proportional dem Geschosßquerschnitt  $R^2 \pi$ , dem Luftgewicht  $\delta$  am Versuchstag, dem Formfaktor  $i$  und umgekehrt proportional dem Geschosßgewicht  $P$ ; es ist somit

$$\frac{\Delta c}{c} = 2 \cdot \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \delta}{\delta} + \frac{\Delta i}{i} - \frac{\Delta P}{P}; \quad (13)$$

und über die Abhängigkeiten von  $i$  bzw.  $\delta$  selbst vgl. Nr. 10 bzw. 15.

B. Allgemeinere Gleichungen, in denen die oben abgeleiteten Gleichungen (8) bis (11) enthalten sind, hat E. Stübler entwickelt, indem er von der Didion-Bernoullischen Lösung (§ 25) und damit von Potenzgesetzen  $cv^n$  für den Luftwiderstand ausging: die Gleichung (1) von § 25 (Zusammenstellung) lautete, aufgelöst nach  $B(z)$

$$B(z) = \frac{2(v_0 \cos \varphi)^2 \cdot (x \operatorname{tg} \varphi - y)}{g x^2}, \quad (14)$$

wobei

$$z = c \cdot \alpha^{n-1} (n-2) (v_0 \cos \varphi)^{n-2} \cdot x. \quad (15)$$

Wird (14) logarithmiert und dann differenziert, so erhält man, falls der Differentialquotient von  $B(z)$  nach  $z$  mit  $B'$  bezeichnet wird,

$$\frac{B'}{B} \cdot dz = 2 \cdot \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} + \frac{x \cdot d(\operatorname{tg} \varphi) + dx \cdot \operatorname{tg} \varphi - dy}{x \cdot \operatorname{tg} \varphi - y} - \frac{2 \cdot dx}{x},$$

oder

$$\begin{aligned} & (x \cdot \operatorname{tg} \varphi - y) \frac{B'}{B} \cdot dz \\ &= 2(x \operatorname{tg} \varphi - y) \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} + \frac{x \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{2y}{x} - \operatorname{tg} \varphi \right) dx - dy; \end{aligned} \quad (16)$$

$\frac{B'}{B}$  läßt sich fortschaffen, indem man die Horizontalneigung  $\vartheta$  der Bahntangente einführt. Geht man zu diesem Zweck längs der Flugbahn (für gleichbleibende Werte von  $v_0$  und  $\varphi$ ) weiter, so ist  $dv_0 = 0$  und  $d\varphi = 0$ ; ferner ist  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$  oder nach (15)  $dz = \frac{z}{x} \cdot dx$  zu setzen. Die aus (16) so entstehende Gleichung hat die Form  $dy = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx$ .

Setzt man  $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \vartheta$ , so hat man

$$(x \operatorname{tg} \varphi - y) \frac{B'}{B} \cdot \frac{z}{x} = \frac{2y}{x} - \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta.$$

Somit ist nach Gleichung (16)

$$\begin{aligned} & (2y - x \operatorname{tg} \varphi - x \operatorname{tg} \vartheta) \frac{dz}{z} \\ &= 2(x \operatorname{tg} \varphi - y) \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} + \frac{x \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \left( \frac{2y}{x} - \operatorname{tg} \varphi \right) \cdot dx - dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Wird jetzt auch Gleichung (15) logarithmisch differentiiert, so folgt

$$\frac{dz}{z} = (n-2) \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} + (n-1) \cdot \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{dc}{c} + \frac{dx}{x}. \quad (18)$$

So ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} dy - dx \cdot \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} \cdot \{n \cdot x \cdot \operatorname{tg} \varphi + (n-2)x \cdot \operatorname{tg} \vartheta - 2(n-1)y\} \\ &+ \frac{x \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \left\{ (n-1) \cdot \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{dc}{c} \right\} \cdot (x \cdot \operatorname{tg} \varphi + x \cdot \operatorname{tg} \vartheta - 2y). \end{aligned} \quad (19)$$

(für  $\alpha$  kann dabei nach Nr. 24 der Wert  $\frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}$  oder auch ein Mittelwert von  $\sec \varphi$ , z. B. nach Hélie  $\alpha = \sqrt{\sec \varphi}$  oder näherungsweise einfach eine Konstante gesetzt werden; im letzteren Fall ist  $d\alpha = 0$ .)

In gleicher Weise läßt sich eine Formel für die Änderung von  $\vartheta$  oder von  $v$  oder von  $t$  ableiten. Hier möge noch diejenige für  $dt$  entwickelt werden:

In § 25, Zusammenstellung, Gleichung (4), wurde erhalten

$$t = \frac{x \cdot D(z)}{v_0 \cos \varphi}, \text{ wobei } z = (n-2)c \cdot \alpha^{n-1} \cdot (v_0 \cos \varphi)^{n-2} \cdot x. \quad (20)$$

Durch logarithmische Ableitung wird daraus

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} - \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} + z \cdot \frac{D'(z)}{D(z)} \cdot \left\{ \frac{dc}{c} + (n-1) \frac{d\alpha}{\alpha} + (n-2) \cdot \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} + \frac{dx}{x} \right\}. \quad (21)$$

Wenn man in Gedanken auf derselben Flugbahn vorwärtsschreitet, so ist  $dc = 0$ ;  $d\varphi = 0$ ;  $d(v_0 \cos \varphi) = 0$ ;  $d\alpha = 0$ , und es ist  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v \cos \vartheta}$ .

Die Gleichung (21) wird dann zu der folgenden

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x} + z \cdot \frac{D'}{D} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{t \cdot v \cos \vartheta}. \quad (22)$$

Damit läßt sich  $z \cdot \frac{D'}{D}$  aus (21) eliminieren; denn es ist  $t \cdot z \cdot \frac{D'}{D} = \frac{x}{v \cos \vartheta} - t$ .

Damit wird (21):

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{v \cos \vartheta} + \left[ \frac{(n-2)x}{v \cos \vartheta} - (n-1)t \right] \cdot \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} \\ &+ \left( \frac{x}{v \cos \vartheta} - t \right) \cdot \left[ \frac{dc}{c} + (n-1) \frac{d\alpha}{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Und die entsprechende Formel für  $d\vartheta$  wird:

$$\begin{aligned} d(\operatorname{tg} \vartheta) + \frac{g \cdot dx}{(v \cos \vartheta)^2} &= \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \\ &- \frac{d(v_0 \cos \varphi)}{v_0 \cos \varphi} \cdot \left[ 2(\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi) + (n-2) \left( \operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi + \frac{g x}{(v \cos \vartheta)^2} \right) \right] \\ &- \left[ \operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi + \frac{g x}{(v \cos \vartheta)^2} \right] \cdot \left[ \frac{dc}{c} + (n-1) \frac{d\alpha}{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Diese drei Stüblerschen Gleichungen ((19) für  $dx$  bzw.  $dy$ , (23) für  $dt$  und (24) für  $d \operatorname{tg} \vartheta$  und damit für  $d\vartheta$ ) gestatten, wenn die Differentiale durch endliche Differenzen ersetzt werden, die durch eine kleine Änderung von  $v_0$  oder  $\varphi$  oder  $c$  bewirkten Änderungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta \vartheta$  der Elemente einer Flugbahn festzulegen. Dabei kann  $\Delta x$  willkürlich gewählt werden, und dann ergibt sich  $\Delta y$  aus (19); oder aber wird  $\Delta y$  willkürlich gewählt, und dann folgt  $\Delta x$  aus derselben Gleichung (19);  $\Delta t$  aus (23);  $\Delta \varphi$  aus (24). Z. B. möge es sich lediglich um eine kleine Änderung  $\Delta v_0$  der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  handeln. Dann ist  $\Delta \varphi = 0$  und  $\Delta c = 0$ ; zugleich sei das quadratische Gesetz ( $n = 2$ ) vorausgesetzt und es sei  $\alpha$  näherungsweise konstant genommen,  $\Delta \alpha = 0$ . In diesem Falle wird man  $\Delta x$  willkürlich gleich Null wählen und hat alsdann zusammen:

$$\Delta x = 0; \quad \Delta y = 2(x \cdot \operatorname{tg} \varphi - y) \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0}; \quad \Delta t = -t \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0},$$

$$\Delta(\operatorname{tg} \vartheta) = +2(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta) \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad \text{oder} \quad \Delta \vartheta = 2 \cdot \frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{\cos \varphi} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0}.$$

Wenn dagegen lediglich der Einfluß einer kleinen Änderung  $\Delta c$  von  $c$  berechnet werden soll, so daß  $\Delta v_0 = 0$  und  $\Delta \varphi = 0$  ist (und dazu wieder  $\Delta \alpha = 0$  und  $n = 2$ ), so empfiehlt es sich nicht,  $\Delta x = 0$  zu setzen, um  $\Delta y$  zu bestimmen, weil in den Ausdruck für  $\Delta y$  noch der im allgemeinen nicht ohne weiteres bekannte Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente erscheinen würde. Aus diesem Grunde wird man vielmehr  $\Delta x$  derartig willkürlich wählen, daß  $\operatorname{tg} \vartheta$  herausfällt. Dies ist der Fall, wenn man wählt:  $\Delta x = -\frac{\Delta c}{c} \cdot x$ ; denn dann wird aus

$$(19) \text{ erhalten: } \Delta y = +\frac{\Delta c}{c}(x \operatorname{tg} \varphi - 2y); \text{ ferner aus (23): } \Delta t = -\frac{\Delta c}{c} \cdot t$$

$$\text{und aus (24): } \Delta(\operatorname{tg} \vartheta) = +\frac{\Delta c}{c} \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta), \text{ wie oben in (8) bis (11).}$$

Wenn von dem Punkt  $P$  oder  $(xy)$  aus das Gelände unter dem bekannten Böschungswinkel  $\beta$  ansteigt und gefragt wird, welcher Nachbarpunkt  $P_1$  statt  $P$  auf dem schiefen Gelände getroffen wird, falls  $c$  um  $\Delta c$  sich ändert, steht die Wahl der Änderung  $\Delta x$  nicht frei, sondern man hat zu nehmen  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$ ; also aus  $\Delta x = \Delta y \cdot \cotg \beta$  hat man mittels (19)  $\Delta y$  zu berechnen und hat damit den gesuchten Punkt  $P_1$ .

Was den Exponenten  $n$  anlangt, so pflegt man für Kanonen und Gewehre zu nehmen:  $n = 3$ ; für Haubitzen und Mörser:  $n = 2$ ; dieser Vorschlag scheint zuerst von F. Siacci gemacht worden zu sein. Besser dürfte sein, nach dem Zahlenwert der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  zu unterscheiden:  $n = 2$  für  $v_0 < 300$  m/sec,  $n = 3$  für  $v_0 > 300$  m/sec. Siacci hat auch bereits die in der nachfolgenden Zusammenstellung aufzuführenden Formeln für die Veränderungen im Auffallpunkt abgeleitet. Und wenn mitunter für die durch eine Änderung von  $\varphi$  bewirkten Änderungen von  $X$ ,  $T$ ,  $\omega$  etwas abweichende Formeln für den Auffallpunkt angegeben werden, so rührt der Unterschied meist davon her, daß  $\alpha$  zum Teil angenähert gleich einer Konstanten, zum Teil gleich einer Funktion von  $\varphi$ , z. B. nach Hélie  $\alpha = \sqrt{\sec \varphi}$ , gesetzt wird.

### C. Zusammenstellung der Reduktionsformeln.

#### a) Für einen beliebigen Flugbahnpunkt (mit $x$ , $y$ , $t$ , $\vartheta$ ).

##### I. Für $v_0 > 300$ m/sec.

1. Allein der ballistische Koeffizient  $c$  ändere sich um  $\Delta c$ ; dann ist

$$\Delta x = -\frac{\Delta c}{c} \cdot x, \quad (25)$$

$$\Delta y = +\frac{\Delta c}{c} \cdot (x \operatorname{tg} \varphi - 2y), \quad (26)$$

$$\Delta t = -\frac{\Delta c}{c} \cdot t, \quad (27)$$

$$\Delta (\operatorname{tg} \vartheta) = +\frac{\Delta c}{c} \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta). \quad (28)$$

2. Allein die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ändere sich um  $\Delta v_0$ ; dann ist

$$\Delta x = -\frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot x, \quad (29)$$

$$\Delta y = +\frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot (3x \operatorname{tg} \varphi - 4y), \quad (30)$$

$$\Delta t = -2 \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot t, \quad (31)$$

$$\Delta (\operatorname{tg} \vartheta) = +3 \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta). \quad (32)$$

3. Allein der Abgangswinkel  $\varphi$  ändere sich um  $\Delta \varphi$ ; dann ist

$$\Delta x = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi, \quad (33)$$

$$\Delta y = [x - 2(x \operatorname{tg} \varphi - 2y) \operatorname{tg} \varphi] \cdot \Delta \varphi, \quad (34)$$

$$\Delta t = 2t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi, \quad (35)$$

$$\Delta (\operatorname{tg} \vartheta) = (2 \cotg 2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 3 \operatorname{tg} \vartheta) \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi. \quad (36)$$

II. Für  $v_0 < 300$  m/sec.

1. Allein der ballistische Koeffizient
- $c$
- ändere sich um
- $\Delta c$
- ; dann ist

$$\Delta x = -\frac{\Delta c}{c} \cdot x, \quad (37)$$

$$\Delta y = +\frac{\Delta c}{c} \cdot (x \operatorname{tg} \varphi - 2y), \quad (38)$$

$$\Delta t = -\frac{\Delta c}{c} \cdot t, \quad (39)$$

$$\Delta(\operatorname{tg} \vartheta) = +\frac{\Delta c}{c} \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta). \quad (40)$$

2. Allein die Anfangsgeschwindigkeit
- $v_0$
- ändere sich um
- $\Delta v_0$
- ; dann ist

$$\Delta x = 0, \quad (41)$$

$$\Delta y = +2 \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot (x \operatorname{tg} \varphi - y) \quad (42)$$

$$\Delta t = -\frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot t, \quad (43)$$

$$\Delta(\operatorname{tg} \vartheta) = +2 \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta). \quad (44)$$

3. Allein der Abgangswinkel
- $\varphi$
- ändere sich um
- $\Delta \varphi$
- ; dann ist

$$\Delta x = 0, \quad (45)$$

$$\Delta y = [x - (x \cdot \operatorname{tg} \varphi - 2y) \cdot \operatorname{tg} \varphi] \cdot \Delta \varphi, \quad (46)$$

$$\Delta t = t \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi, \quad (47)$$

$$\Delta(\operatorname{tg} \vartheta) = 2 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (\cotg 2 \varphi + \operatorname{tg} \vartheta) \cdot \Delta \varphi. \quad (48)$$

- b) Für den Auffallpunkt im Mündungshorizont (mit
- $X, T, \omega, v$
- ).

I. Für  $v_0 > 300$  m/sec.

1. Allein der ballistische Koeffizient
- $c$
- ändere sich um
- $\Delta c$
- ; dann ist

$$\frac{\Delta X}{X} = -\frac{\Delta c}{c} \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega}, \quad (49)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta c}{c} \left( \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0 \cdot \sin \omega} - T \right), \quad (50)$$

$$\Delta \omega = \frac{\Delta c}{c} \cdot \left[ g \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0^3 \cdot \operatorname{tg} \omega} - \frac{\sin(\varphi + \omega) \cdot \cos \omega}{\cos \varphi} \right]. \quad (51)$$

2. Allein die Anfangsgeschwindigkeit
- $v_0$
- ändere sich um
- $\Delta v_0$
- ; dann ist

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \omega}, \quad (52)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \left\{ \frac{3 X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0 \cdot \sin \omega} - 2 T \right\}, \quad (53)$$

$$\Delta \omega = 3 \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \left[ \frac{g X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0^3 \cdot \operatorname{tg} \omega} - \frac{\sin(\varphi + \omega) \cos \omega}{\cos \varphi} \right]. \quad (54)$$

3. Allein der Abgangswinkel  $\varphi$  ändere sich um  $\Delta\varphi$ ; dann ist

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega} \cdot (2 \cotg 2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega) \cdot \Delta \varphi, \quad (55)$$

$$\Delta T = \left[ \frac{X \cdot (2 \cotg 2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi)}{v_e \cdot \sin \omega} + 2 T \right] \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi, \quad (56)$$

$$\Delta \omega = \left[ \frac{g X (2 \cotg 2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi)}{v_e^2 \cdot \sin \omega} - \cos \omega (2 \cotg 2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi - 3 \operatorname{tg} \omega) \right] \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \omega \cdot \Delta \varphi. \quad (57)$$

II. Für  $v_0 < 300$  m/sec.

1. Allein der ballistische Koeffizient  $c$  ändere sich um  $\Delta c$ ; dann ist

$$\frac{\Delta X}{X} = - \frac{\Delta c}{c} \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega}, \quad (58)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta c}{c} \cdot \left( \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e \cdot \sin \omega} - T \right), \quad (59)$$

$$\Delta \omega = \frac{\Delta c}{c} \cdot \left[ \frac{g X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e^2 \cdot \operatorname{tg} \omega} - \frac{\sin(\varphi + \omega) \cdot \cos \omega}{\cos \varphi} \right]. \quad (60)$$

2. Allein die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ändere sich um  $\Delta v_0$ ; dann ist

$$\frac{\Delta X}{X} = 2 \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega} \quad (61)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \left( \frac{2 X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e \cdot \sin \omega} - T \right), \quad (62)$$

$$\Delta \omega = 2 \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \left[ \frac{g X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e^2 \cdot \operatorname{tg} \omega} - \frac{\sin(\varphi + \omega) \cdot \cos \omega}{\cos \varphi} \right]. \quad (63)$$

3. Allein der Abgangswinkel  $\varphi$  ändere sich um  $\Delta\varphi$ ; dann ist

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} 2 \varphi \cdot \operatorname{tg} \omega} \cdot \Delta \varphi, \quad (64)$$

$$\Delta T = \left( \frac{2 X}{v_e \cdot \sin \omega \cdot \operatorname{tg} 2 \varphi} + T \right) \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi, \quad (65)$$

$$\Delta \omega = 2 \cdot \left[ \frac{g X \cdot \cotg 2 \varphi}{v_e^2 \cdot \sin \omega} - \cos \omega \cdot \cotg 2 \varphi + \sin \omega \right] \cdot \cos \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi. \quad (66)$$

Beispiele. 1. Bei photogrammetrischen Aufnahmen mittels Kanonen-Schrapnells sei z. B. der Sprengpunkt  $x = 6200$  m,  $y = 3820$  m, gemessen worden; dazu mittels der Tertienuhr die Flugzeit  $t = 24,5$  sec. Dabei war  $v_0 = 580$  m/sec,  $\varphi = 45^\circ$  und das Tagesluftgewicht  $\delta = 1,20$  kg/m<sup>3</sup>. Es sollen die Messungen  $x, y, t$  auf das Normalluftgewicht  $1,22$  kg/m<sup>3</sup> reduziert werden.

Es ist  $\Delta \delta = +0,02$ , somit  $\frac{\Delta \delta}{\delta} = \frac{\Delta c}{c} = \frac{0,02}{1,20}$ ; also hat man nach (25), (26) und (27):

$$\Delta x = - \frac{0,02}{1,20} \cdot 6200 = -103 \text{ m; daraus } x = 6097 \text{ m der reduzierte Wert,}$$

$$\Delta y = + \frac{0,02}{1,20} \cdot (6200 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ - 2 \cdot 3820) = -24 \text{ m; } y = 3796 \text{ m der reduz. Wert,}$$

$$\Delta t = - \frac{0,02}{1,20} \cdot 24,5 = -0,4 \text{ sec,} \quad \text{daraus } t = 24,1 \text{ sec " " "}$$

2. Während des Schießversuchs habe Wind geherrscht, der in der Schußrichtung eine Geschwindigkeit  $w_p$  m/sec besitze. Man will die Flugbahn Punkt für Punkt auf Windstille reduzieren. Welche Änderungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  sind an den Elementen  $x$ ,  $y$ ,  $t$  eines einzelnen Bahnpunktes anzubringen?

Wie in Nr. 46 u. folg. gezeigt werden wird, hat man, zunächst bei unverändertem  $x$ , statt  $v_0 \cos \varphi$  einen um  $\Delta(v_0 \cos \varphi) = +w_p$  und statt  $\operatorname{tg} \varphi$  einen um  $\Delta(\operatorname{tg} \varphi) = -\frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot w_p}{v_0 \cos \varphi}$  größeren Wert anzunehmen oder statt  $\varphi$  einen um

$\Delta \varphi = +\frac{w_p \cdot \sin \varphi}{v_0}$  kleineren Wert. (Dabei ist vorausgesetzt, daß sich der Bahnpunkt  $(xy)$  nahe dem Mündungshorizont befindet und daß in diesem Punkt derselbe Wind herrscht wie am Erdboden; anderenfalls hat man der Höhe nach mit sukzessiven Windzonen zu rechnen).

In den Gleichungen (19) und (23) ist folglich, wenn zugleich das quadratische Gesetz angenommen wird ( $n=2$ ) und wenn von der Änderung von  $\alpha$  mit  $\varphi$  näherungsweise abgesehen werden soll, folgendes zu setzen:

$$\Delta(v_0 \cos \varphi) = +w_p; \Delta \varphi = -\frac{w_p \cdot \sin \varphi}{v_0}; n=2; \Delta c=0; \Delta \alpha=0; \Delta x=0.$$

Damit wird:

$$\begin{cases} \Delta x = 0, \\ \Delta y = \frac{w_p}{v_0 \cos \varphi} \cdot (2x \operatorname{tg} \varphi - 2y) - \frac{x \cdot w_p \cdot \sin \varphi}{v_0 \cdot \cos^2 \varphi} = -\frac{w_p}{v_0 \cos \varphi} \cdot (2y - x \operatorname{tg} \varphi), \\ \Delta t = -\frac{t \cdot w_p}{v_0 \cos \varphi}. \end{cases}$$

Endlich hat man noch zu berücksichtigen, daß in der Zeit  $t$  das Luftmeer sich um  $w_p \cdot t$  fortbewegt hat, also statt  $x$  zu setzen  $x - w_p \cdot t$ .

Im ganzen reduziert man also den Bahnpunkt auf Windstille, indem man:

$$x \text{ ersetzt durch } x - w_p \cdot t,$$

$$\text{gleichzeitig} \quad y \quad " \quad " \quad y - \frac{w_p}{v_0 \cos \varphi} \cdot (2y - x \operatorname{tg} \varphi), \text{ und}$$

$$t \quad " \quad " \quad t - \frac{w_p \cdot t}{v_0 \cos \varphi}.$$

3. Das ungefähre Maß von Unsicherheit, das mit der Verwendung der Differenzenformeln an Stelle einer Wiederholung der betreffenden Flugbahnberechnung verbunden sein kann, läßt sich aus den folgenden Berechnungsergebnissen erkennen, die im ball. Lab. von dem Hörer Lt. Lupascu erhalten worden waren:

Für eine Feldhaubitze und für die Schußweiten 500, 1000, 2000, 4000, 5000 m mit  $v_0 = 295$  m/sec fand sich bei der Annahme einer Änderung  $\Delta v_0 = 12$  m/sec a) nach dem quadratischen Gesetze ( $n=2$ ) bzw.:  $\Delta X = 38, 86, 176, 324, 388$  m; b) nach dem kubischen Gesetze ( $n=3$ ) bzw.  $\Delta X = 82, 78, 163, 283, 319$  m; c) durch Wiederholung der Flugbahnberechnung:  $\Delta X = 39, 83, 162, 300, 347$  m. Und bei der Annahme einer Änderung  $\Delta \varphi = 10'$  des Abgangswinkels fand sich a) nach dem quadratischen Gesetze  $\Delta X = 48; 46; 40; 27,5; 19$  m, b) durch Wiederholung der Berechnung dagegen  $\Delta X = 60; 46; 38,5; 26,5; 18$  m.

Für ein Gewehr und für die Schußweiten 500, 1000, 1500 m mit  $v_0 = 875$  m/sec ergab sich bei der Annahme  $\Delta v_0 = 25$  m/sec: a) nach dem quadratischen Gesetz

$\Delta X =$  bzw. 20; 28,5; 39,5 m; b) nach dem kubischen Gesetz bzw. 15,5; 14,0; 16,5 m; c) durch Wiederholung der Rechnung 25,5; 22,5; 28,0 m. Ebenso bei der Annahme  $\Delta \varphi = 3'$ : a) nach dem quadratischen Gesetz  $\Delta X =$  bzw. 129, 65, 26, 15 m; b) gemäß Wiederholung der Berechnung: 110; 54,5; 27; 14 m.

Anmerkung. Hinsichtlich des Einflusses, welchen eine Änderung der Lufttemperatur auf die Schußweite ausübt, ist noch folgendes zu sagen. Wenn sich die absolute Temperatur  $T$  der Luft unter sonst gleichen Umständen um  $\Delta T$  ändert, so ändert sich der Luftwiderstand gegen das Geschoß und daher die Schußweite zunächst deshalb, weil das Luftgewicht und damit der ballistische Koeffizient  $c$  umgekehrt proportional  $T$  ist (vgl. § 15, Gleichung (II)). Dieser Einfluß ist durch den Ausdruck (49) bzw. (58) nach § 44 angegeben. Aber außerdem scheint eine Änderung der Temperatur noch aus einem anderen Grunde den Luftwiderstand und folglich die Schußweite zu modifizieren: Wenn das Geschoß mit Unterschallgeschwindigkeit fliegt, ändert sich mit der Temperatur der Luftwiderstand insofern, als die Viskosität eine andere wird (dieser Einfluß wird um so weniger bedeutend, je mehr sich die Geschoßgeschwindigkeit der Schallgeschwindigkeit nähert). Bei Überschallgeschwindigkeit des Geschosses insofern, als die Elastizität der Luft, also die Schallgeschwindigkeit eine Funktion der Temperatur ist; denn die Schallgeschwindigkeit ist proportional  $\sqrt{T}$ ; wenn also allein die Temperatur der Luft größer wird, so wird der Winkel der Kopfwelle und Schwanzwelle größer; die Wirkung ist die gleiche, wie wenn die Geschoßgeschwindigkeit allein für sich und damit der Luftwiderstand kleiner würde. Mit diesen Fragen haben sich insbesondere G. Darrieus, P. Langevin, E. Jouguet und M. Garnier beschäftigt (vgl. Lit.-Note zu § 8 bis 16, theoretische Ableitungen); Garnier gibt auch Zahlenberechnungen dazu an. Es wird notwendig sein, die betreffenden Gesetzmäßigkeiten genau zu prüfen und, wenn sie völlig geklärt sind, eventuell diese Einflüsse regelmäßig rechnerisch zu berücksichtigen.

#### § 45. Geschoßabweichungen durch schiefen Räderstand bzw. durch Verkanten des Visiers beim Gewehr.

Wird mit Erhöhung geschossen (Abgangswinkel positiv), so weicht das Geschoß nach der Seite des tiefer stehenden Rades bzw. der zu tief gehaltenen Visierkante ab.

Um die Größe dieser Abweichung zu erhalten, denke man sich die Waffe erstens im unverdrehten, zweitens im verdrehten Zustand. Im ersteren ist (s. Abb. 63)  $VO$  die nach dem Ziel  $Z$  weisende Visierlinie;  $SO$  die Seelenachse,  $\varphi$  oder  $VOS$  der Erhöhungswinkel (oder wenn von dem Abgangsfehlerwinkel abgesehen wird, näherungsweise auch der Abgangswinkel). Im zweiten Zustand stellt  $S_1O$  die Lage der Seelenachse im Raume dar; Visierlinie  $VO$  hat ihre Lage beibehalten, fungiert also hierbei als Drehachse;  $i$  ist der Verdrehungswinkel.

Senkrecht zur Visierlinie  $VO$  sei eine Ebene durch das Visier  $V$  gedacht. In dieser Ebene (die in den Seitenrissen für sich herausgezeichnet ist) gelangt der Punkt  $S$  der Seelenachse bei der Drehung nach  $S_1$ . Im Aufriß stellt sich die neue Lage der Seelen-



achse als  $AO$  dar; im Grundriß als  $S_2O$ . Innerhalb der Vertikalebene durch  $S_2O$  liegt die neue Flugbahn, also der neue Erhöhungswinkel  $\varphi_1$ .

$\sin \varphi_1$  ist gleich  $AV$  oder  $h \cdot \cos i$ , dividiert durch den wahren Abstand von  $O$  und  $S$  (s. Abb. 63)

$$\sin \varphi_1 = \frac{h}{OS} \cdot \cos i = \sin \varphi \cdot \cos i.$$

Der durch Verdrehung um  $i$  bewirkte Fehler in der Erhöhung ist also dadurch gegeben, daß im verdrehten Zustand der Erhöhungswinkel nicht  $\varphi$ , sondern  $\varphi_1$  ist, wobei

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi \cdot \cos i. \quad (1)$$

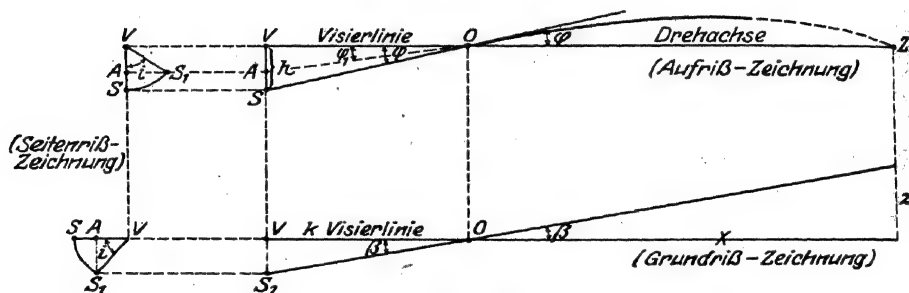


Abb. 63.

Die durch die Verdrehung bewirkte Seitenabweichung stellt sich im Grundriß durch den Winkel  $\beta$  dar, für den  $\operatorname{tg} \beta = S_2V : OV = AS_1 : OV = \frac{h}{k} \cdot \sin i$ , somit

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin i. \quad (2)$$

Bei der Schußweite  $X$  m ist somit die Seitenabweichung  $z$ , in Metern gemessen,  $z = \sim X \operatorname{tg} \beta$ , also ungefähr

$$z = X \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin i. \quad (3)$$

Bei kleinen Winkeln  $\varphi$  und  $i$  ist näherungsweise

$$z = \frac{X \cdot \varphi \cdot i}{3280} \quad (S \text{ und } i \text{ in Graden}). \quad (4)$$

Beispiel:  $\varphi = 4^\circ 35'$ ;  $X = 1800$  m;  $i = 5^\circ$ ; Seitenabweichung näherungsweise  $z = \frac{1800 \cdot 4,58 \cdot 5}{3280} = 12,5$  m.

Die obigen Betrachtungen, die speziell für Geländewinkel Null und für Gleichheit von Aufsatzwinkel und Abgangswinkel gelten, lassen sich selbstverständlich auch mit sphärischer Trigonometrie durchführen; zu diesem Zweck denkt man sich um  $O$  eine Kugel mit der

Längeneinheit als Radius beschrieben usw. J. Didion denkt sich, um die notwendigen Korrekturen der Seiten- und Höhenrichtung zu finden, die Drehung nicht um die Visierlinie, sondern um die Seelenachse ausgeführt. Unter gewissen Voraussetzungen über den Abgangswinkel bleibt dann die Anfangstangente der Flugbahn und damit der Treffpunkt auf der in  $X$  m Entfernung aufgestellten Vertikalscheibe unverändert. Dagegen verschiebt sich der Schnittpunkt der verlängert gedachten Visierlinie mit der Scheibe. Diese Verschiebung nach der Seite des höher stehenden Rades ist die erforderliche Korrektur.

Über die verschiedenen Mittel zur Ausschaltung des schiefen Räderstandes bei Geschützen und über deren vollständige Theorie vgl. man in erster Linie die Schrift von O. v. Eberhard (s. Lit.-Note).

#### § 46. Abweichungen durch Wind. Einleitende Bemerkungen.

In §§ 46 bis 53 ist von Relativbewegungen die Rede, die sich auf das Geschöß, die Waffe, die Luft und die Erde beziehen. Bisher war erstens vorausgesetzt worden, daß die Luft, die einen Widerstand auf das Geschöß ausübt, in Beziehung auf die Waffe und ebenso die Waffe in Beziehung auf den Erdboden in Ruhe sei, zweitens war von der Drehung der Erde um ihre Achse abgesehen worden. In §§ 46 bis 52 soll zunächst die erste Voraussetzung fallen gelassen werden: In Beziehung auf die festgedachte Erde kann die Waffe und die Luft in Bewegung sein (Schießen bei Wind, aus einem Auto, Schiff, Flugzeug, Luftschiff). Dabei kann das Ziel selbst eine Eigenbewegung in Beziehung auf die Erde besitzen.

Es handelt sich vorzugsweise um zwei Fragen, die im einzelnen Falle zu beantworten sind: Die zur Aufstellung einer Schußtafel dienenden Schießversuche sind häufig bei Wind angestellt. Aber die Angaben einer gewöhnlichen Schußtafel beziehen sich naturgemäß auf Windstille, da es nicht möglich ist, für dieselbe Waffe, dieselbe Geschößart und dieselbe Ladung Schußtafeln für alle möglichen Windgeschwindigkeiten und Windrichtungen aufzustellen. Deshalb müssen die bei dem Schußtafelschießen erhaltenen Messungsergebnisse zunächst auf Windstille reduziert werden. Da ferner beim praktischen Schießen infolge des Winds Abweichungen nach der Seite und nach der Länge eintreten würden, wenn nicht dementsprechend (gegenüber den Angaben der Schußtafel, die sich auf Windstille beziehen) eine geeignete Seiten- bzw. Längenkorrektur benützt wird, so fragt es sich, wie groß die Abweichungen durch den Wind ausfallen werden.

Die betreffenden Berechnungen können von sehr allgemeinen Gesichtspunkten aus durchgeführt und sodann auf die einzelnen Fälle spezialisiert werden. Es möge jedoch hier die induktive Methode

vorgezogen und im folgenden eine Aufgabe nach der andern, von der einfachsten aus beginnend, behandelt werden.

Bei sämtlichen Berechnungen über den Windeinfluß ist übrigens darauf aufmerksam zu machen, daß sie als sehr unsicher betrachtet werden müssen. Denn die Messung der Windgeschwindigkeit erfolgt meistens innerhalb eines gewissen längeren Zeitraums und erfolgte wenigstens früher fast nur in der Nähe des Erdbodens; tatsächlich weht aber der Wind fast immer stoßweise, ist also die Windgeschwindigkeit selbst innerhalb ziemlich kurzer Zeitintervalle veränderlich. Außerdem ist die Windgeschwindigkeit in den Höhen, in die das Geschoß gelangt, meist eine andere, als in der Nähe des Erdbodens (Zahlenangaben s. in Band III), und ein allgemeines Gesetz, wonach die Windgeschwindigkeit mit der Höhe sich ändert, ist nicht bekannt und läßt sich wohl niemals aufstellen. Weiter ist auch die Windrichtung in größeren Höhen nicht dieselbe wie am Erdboden, vielmehr soll sich der Wind nach oben zu im allgemeinen im Sinne der Uhrzeigerbewegung von oben betrachtet drehen. Endlich ist es nicht ausgeschlossen, daß, insbesondere bei Gegenwind, eine hebende Kraft, eine Tragflächenwirkung des Winds auf das rotierende Langgeschoß ausgeübt wird. Aus den angeführten Gründen können die Ergebnisse der nach den aufzustellenden Formeln durchgeführten Berechnungen nur als ungefähre Anhaltspunkte angesehen werden; und die beste Regel für das Schußtafel-schießen wird stets die bleiben, daß ein Präzisionsschießen bei möglichst ruhiger Luft angestellt werden solle. Zur Messung des Bodenwinds dienen dabei meist Schalenkreuz-Anemometer, die in Höhen von einigen Metern über dem Erdboden aufgestellt werden; zur Messung des Höhenwindes dienen periodische Pilotballon- und Drachenaufstiege.

Für das Folgende dürfte es zweckmäßig sein, einiges über Relativbewegungen an der Hand anderweitiger Beispiele des täglichen Lebens voranzuschicken.

Ein Eisenbahnwagen fahre (Abb. 64a) auf dem Geleise  $BC$  von  $B$  nach  $C$  mit einer gleichmäßigen absoluten Geschwindigkeit  $BC = w_a$  bezüglich des Erdbodens. Innerhalb des Wagens bewege sich ein Mann; seine absolute Geschwindigkeit bezüglich des Erdbodens sei nach Größe und Richtung  $AC$  oder  $m_a$ . Dann erhält man die relative Geschwindigkeit  $m_r$  des Mannes bezüglich des Wagens nach Größe und Richtung, indem man die absolute Geschwindigkeit  $w_a$  des Wagens zu  $-w_a$  umkehrt und alsdann die beiden absoluten Geschwindigkeiten  $m_a$  und  $-w_a$  nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten zusammensetzt zu  $AB = m_r$ . Anders ausgedrückt: Wenn nach Größe und Richtung  $AB$  die Geschwindigkeit des Mannes bezüglich des Wagens,  $BC$  die Geschwindigkeit des

Wagens bezüglich des Erdbodens ist, so ist die schließende Seite des Dreiecks oder die geometrische Summe  $AC$  nach Größe und Richtung die Geschwindigkeit des Mannes bezüglich der Erde.

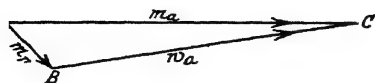


Abb. 64a.



Abb. 64b.

Diese Betrachtung läßt sich vervielfältigen. Z. B. bewege sich (Abb. 64b) ein Mann auf dem Deck eines Schiffs, das auf gleichförmig bewegtem Wasser fährt.  $AB$  sei die Geschwindigkeit des Mannes bezüglich des Schiffs,  $BC$  die Geschwindigkeit des Schiffs bezüglich des Wassers, also diejenige Geschwindigkeit, die das Schiff hätte, wenn das Wasser in Ruhe wäre,  $CD$  die Geschwindigkeit des Wassers bezüglich der festen Erde. Dann ist die geometrische Summe oder die schließende Seite  $AD$  des Vierecks die Geschwindigkeit des Mannes bezüglich der Erde.

Wenn dabei die Bewegungen gleichförmig und geradlinig sind, so stellen die Geschwindigkeitsdiagramme gleichzeitig die Wegediagramme dar. Z. B. fahre (Abb. 64c) ein Schiff von  $A$  nach  $B$  über einen Fluß, und sowohl die Strömungsgeschwindigkeit, wie die Fahrtgeschwindigkeit sei durchweg als konstant angenommen. Das Schiff wird nach einem oberhalb  $B$  gelegenen Punkt  $C$  derartig gesteuert werden, wie wenn das Wasser in Ruhe wäre. Dieser Punkt  $C$  ist so gewählt, daß das Schiff in derselben Zeit, in der die Strömung von  $C$  bis  $B$  gelangt, im ruhigen Wasser von  $A$  nach  $C$  gelangen würde; in dieser Zeit fährt alsdann tatsächlich das Schiff von  $A$  nach  $B$ .  $AC$  ist der Weg des Schiffs bezüglich des Wassers,  $CB$  der Weg des Wassers bezüglich des Lands in derselben Zeit,  $AB$  ist der vom Schiff in schräger Lage in derselben Zeit zurückgelegte Weg bezüglich des Landes.

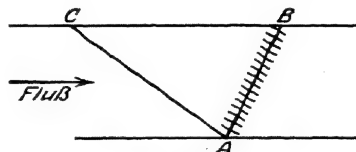


Abb. 64c.

Falls dagegen, wie dies bei der Geschößbewegung der Fall ist, die Geschwindigkeiten veränderlich sind, empfiehlt es sich, außer dem Diagramm der Anfangsgeschwindigkeiten noch das Diagramm der Wege zu zeichnen.

Zunächst mögen zwei einfache Fälle besprochen werden; nämlich der Fall eines horizontalen Winds mit der konstanten Geschwindigkeit  $w$ , parallel der Schußebene des (ruhenden) Geschützes und der Fall eines Winds senkrecht zur Schußebene, mit der konstanten Geschwindigkeit  $w$ . Dann erst sollen die komplizierteren Fälle des Windeinflusses besprochen werden. Die Gleichungen sind in § 46 bis 52, die sich auf den Windeinfluß beziehen, durchnummeriert.

Regeln für die Berechnung des Windeinflusses sind dabei nicht nur für den Auffallpunkt im Mündungshorizont erforderlich, sondern wegen der Aufgaben für den Gebirgskrieg und den Luftkampf auch für einen beliebigen Flugbahnpunkt.

§ 47. Die Waffe sei in Ruhe bezüglich des Erdbodens.  
Wind wehe horizontal und parallel der Schußebene.

Die horizontale Windgeschwindigkeit  $w_p$  sei positiv etwa in Richtung der Horizontalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, also in der Richtung der positiven  $x$ -Achse („Mit-Wind“). Bei solchem Wind möge nach  $t$  sec eine horizontale Entfernung

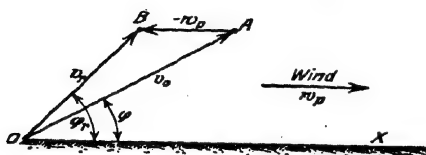


Abb. 65.

$x$  Meter des Geschosses, speziell nach der Gesamtflugzeit  $T$  sec die Schußweite  $X$  Meter beobachtet worden sein. Die Anfangsgeschwindigkeit sei  $v_0$ , in der Abb. 65 dargestellt durch  $OA$ , der Abgangswinkel  $AOX$  oder  $\varphi$ .

Die auf Windstille reduzierte Anfangsgeschwindigkeit  $v_r$  ist die geometrische Summe aus  $v_0$  und der negativ genommenen Windgeschwindigkeit  $w_p$ . In dem Geschwindigkeitsdiagramm Abb. 65 stellt somit  $OB$  die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses bezüglich der Luft,  $BA$  die Geschwindigkeit der Luft bezüglich des Erdbodens, der resultierende Vektor  $OA$  die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses bezüglich des Erdbodens dar. Aus dem so konstruierten Vektor  $v_r$  erhält man den auf Windstille reduzierten Abgangswinkel  $\varphi_r$  oder  $BOX$ .

Das Wegediagramm für die Horizontalprojektion der Geschöbwege ist in diesem Falle besonders einfach (Abb. 66).  $OD = x_r$  ist die zur Flugzeit  $t$  gehörige Abszisse des Geschosses bezüglich der Luft, also die auf Windstille reduzierte horizontale Entfernung,  $DE = w_p \cdot t$  der Weg der Luft bezüglich der Erde oder die Windversetzung,  $OE = x$  die tatsächliche, bei Wind vorhandene horizontale Entfernung des Geschosses bezüglich des Erdbodens, also  $x = x_r + w_p \cdot t$ , speziell für den

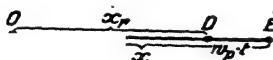


Abb. 66.

Auffallpunkt im Mündungshorizont  $X = X_r + w_p T$ .

Wenn also bei dem Schießversuch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und der Abgangswinkel  $\varphi$  benutzt sind und nach der Flugzeit von  $t$  sec bzw.  $T$  sec die horizontalen Entfernungen  $x$  bzw.  $X$  des Geschosses gemessen wurden, so werden diese auf Windstille reduziert, indem man sie durch  $v_r$ ,  $\varphi_r$ ,  $x_r$  bzw.  $X_r$  ersetzt. Dabei ist, wie aus der Abb. 65 sofort ersichtlich ist,

$$v_r \cdot \sin \varphi_r = v_0 \cdot \sin \varphi, \quad v_r \cdot \cos \varphi_r = v_0 \cdot \cos \varphi - w_p,$$

also

$$v_r = \sqrt{v_0^2 + w_p^2 - 2 v_0 w_p \cos \varphi}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi - w_p}. \quad (2)$$



fangsgeschwindigkeit des Geschosses wäre,  $w_p = v_0$ , so wäre auf der Plattform die Schußweite Null; das Geschosß würde sich für die Bedienungsmannschaft nur in derselben Vertikalen aufwärts und abwärts zu bewegen scheinen. (Statt durch Rechnung, mittels  $v_r$  und  $\varphi_r$ , können die Aufgaben über den Windeinfluß unter Berücksichtigung von Abb. 65 auch graphisch behandelt werden; darüber vgl. die Arbeit von O. von Eberhard (l. c. S. 36).

In der Praxis genügt es jedoch meistens nicht, eine bei Wind erhaltene Flugbahn 1 (mit  $v_0, \varphi, X$ ) dadurch auf Windstille zu reduzieren, daß man sie ersetzt durch eine Flugbahn 2 (mit  $v_r, \varphi_r, X - w_p T$ ), sondern gewöhnlich wird die Reduktion auf Windstille in einer Form gewünscht, in der die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und der Abgangswinkel  $\varphi$  ihre Werte behalten; denn andernfalls müßten, wenn z. B. bei einem länger dauernden Beschuß der Wind sich ändert, immer andere Werte  $v_r$  und  $\varphi_r$  zugrunde gelegt werden.

Man hat also die auf Windstille bezogene Flugbahn 2 nochmals umzuwandeln in die gleichfalls auf Windstille bezogene Flugbahn 3, zu der die Anfangswerte  $v_0$  und  $\varphi$  gehören.

Bei diesem Übergang von Bahn 2 zu Bahn 3 wird, in unserem Falle von Mitwind  $+w_p$ , die Anfangsgeschwindigkeit  $v_r$  wieder auf  $v_0$  vergrößert und gleichzeitig der Abgangswinkel  $\varphi_r$  wieder auf  $\varphi$  verkleinert. Hierdurch vergrößert sich wieder die Schußweite  $X_r$  oder  $OC$  um einen gewissen Betrag  $CD = \Delta X_r'$ , so daß nunmehr mit den Werten

$$v_0, \varphi, OC + \Delta X_r'$$

zum Zweck der Reduktion auf Windstille weitergerechnet werden muß.

Den Wert  $\Delta X_r'$  ermittelt F. Siacci näherungsweise wie folgt: Es ist, da  $w_p$  klein gegen  $v_0$ , also  $\left(\frac{w_p}{v_0}\right)^2$  gegen 1 zu vernachlässigen ist,

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{v_0^2 + w_p^2 - 2v_0 \cdot w_p \cos \varphi} \approx v_0 \sqrt{1 - 2\frac{w_p}{v_0} \cos \varphi} \\ &\approx v_0 \left(1 - \frac{w_p}{v_0} \cos \varphi\right), \text{ also} \end{aligned}$$

$$v_0 - v_r \text{ oder } \Delta v_0 = +w_p \cdot \cos \varphi.$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi - w_p} \approx \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(1 + \frac{w_p}{v_0 \cos \varphi}\right),$$

somit

$$\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_r \text{ oder } \Delta(\operatorname{tg} \varphi) \text{ oder } \frac{\Delta \varphi}{\cos^2 \varphi} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot w_p}{v_0 \cos \varphi};$$

$$\Delta \varphi = -\frac{w_p \cdot \sin \varphi}{v_0}.$$

Zusammen

$$\Delta v_0 = + w_p \cdot \cos \varphi; \quad \Delta \varphi = - \frac{w_p \cdot \sin \varphi}{v_0}.$$

Nach § 44 ist die durch eine Änderung  $\Delta v_0$  und  $\Delta \varphi$  bewirkte Schußweitenänderung unter Voraussetzung z. B. des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes gegeben durch

$$\frac{\Delta X_r'}{X_r} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega \cdot \operatorname{tg} 2 \varphi} \cdot \Delta \varphi + \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0 \cdot \operatorname{tg} \omega} \cdot \Delta v_0,$$

wobei hier der Auffallwinkel  $\omega$  mittels einer vorläufigen Näherungsberechnung der Flugbahn erhalten werden muß.

Führt man die obigen Werte von  $\Delta v_0$  und  $\Delta \varphi$  ein, so erhält man, wenn man zugleich näherungsweise  $X$  für  $X_r$  nimmt,

$$\Delta X_r' = + \frac{w_p \cdot X \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega \cdot v_0 \cos \varphi}. \quad (4)$$

Somit ist, für die auf Windstille bezogene Flugbahn 3 mit den Anfangswerten  $v_0$  und  $\varphi$ , die Schußweite  $OD$  oder  $X_r'$

$$X_r' = X_r + \Delta X_r' = X - w_p T + \frac{w_p \cdot X \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega \cdot v_0 \cos \varphi}. \quad (5)$$

Allgemeiner möge nunmehr für einen beliebigen Flugbahnpunkt, dessen Koordinaten  $x$  und  $y$ , samt der zugehörigen Flugzeit  $t$ , etwa mittels der photogrammetrischen Methode bei Mitwind  $+w_p$  gemessen worden seien, die Reduktion auf Windstille durchgeführt werden. Hierfür verwendet man am zweckmäßigsten die Stübler'schen Differenzenformeln von § 44, also die Formeln

$$\Delta x = - (n - 2) x \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0}; \quad \Delta y = (n \cdot x \cdot \operatorname{tg} \varphi - 2 (n - 1) y) \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0},$$

zusammen mit

$$\Delta x = (n - 2) x \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi; \quad \Delta y = [x - (n - 1)(x \operatorname{tg} \varphi - 2 y) \operatorname{tg} \varphi] \cdot \Delta \varphi,$$

indem man wiederum, wie oben,

$$\Delta v_0 = + w_p \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad \Delta \varphi = - \frac{w_p \cdot \sin \varphi}{v_0}$$

setzt und die hierdurch bewirkten Zuwächse addiert, sowohl für  $\Delta x$  wie für  $\Delta y$ . Man erhält so:

$$\Delta x = - (n - 2) \cdot x \cdot \frac{w_p}{v_0 \cos \varphi}; \quad \Delta y = (n - 1)(x \operatorname{tg} \varphi - 2 y) \cdot \frac{w_p}{v_0 \cos \varphi}.$$

Also ist für  $v_0 < 300 \text{ m/sec}$  ( $n = 2$ ):

$$\Delta x = 0; \quad \Delta y = (x \operatorname{tg} \varphi - 2 y) \cdot \frac{w_p}{v_0 \cos \varphi},$$

für  $v_0 > 300 \text{ m/sec}$  ( $n = 3$ ):

$$\Delta x = - \frac{x \cdot w_p}{v_0 \cos \varphi}; \quad \Delta y = \frac{2 \cdot w_p}{v_0 \cos \varphi} \cdot (x \operatorname{tg} \varphi - 2 y).$$



Man erhält damit das nachstehende System von Reduktionsformeln: Regeln für die Reduktion auf Windstille bei konstantem Mitwind  $w_p$  m/sec.

A. Bei einem beliebigen Flugbahnpunkt mit Abszisse  $x$  m, Ordinate  $y$  m, Flugzeit  $t$  sec:

1. für  $v_0 < 300$  m/sec:

Man ersetze  $x$  durch:  $x - w_p \cdot t$  (6)

" "  $y$  "  $y + (x \cdot \operatorname{tg} \varphi - 2y) \cdot \frac{w_p}{v_0 \cos \varphi}$  (7)

" "  $t$  "  $t - \frac{w_p \cdot t}{v_0 \cos \varphi}$  (8)

2. für  $v_0 > 300$  m/sec:

Man ersetze  $x$  durch:  $x - w_p \cdot t - \frac{x \cdot w_p}{v_0 \cos \varphi}$  (9)

" "  $y$  "  $y + \frac{2 \cdot w_p}{v_0 \cos \varphi} \cdot \{x \cdot \operatorname{tg} \varphi - 2y\}$  (10)

" "  $t$  "  $t - \frac{2 w_p \cdot t}{v_0 \cos \varphi}$  (11)

B. bei dem Auffallpunkt im Mündungshorizont, mit Schußweite  $X$  m, Gesamtflugzeit  $T$  sec, spitzen Auffallwinkel  $\omega$ :

1. für  $v_0 < 300$  m/sec:

Man ersetze  $X$  durch:  $X - w_p \cdot T + \frac{w_p \cdot X}{v_0 \cos \varphi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega}$  (12)

2. für  $v_0 > 300$  m/sec:

Man ersetze  $X$  durch:  $X - w_p \cdot T + \frac{w_p \cdot X}{v_0 \cos \varphi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega} \cdot \left(2 - \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}\right)$  (13)

(Die Gesamtflugzeit  $T$  wird nicht wesentlich geändert).

Beispiel für eine Kanone, mit  $n = 3$ :

Gemessen sei bei konstantem Mitwind  $w_p = +6$  m/sec und bei  $v_0 = 580$  m/sec,  $\varphi = 30^\circ$ :

1. Die Schußweite  $X = 10400$  m und die Flugzeit  $T = 40$  sec; dabei  $\omega = 45^\circ$ . Für die Aufstellung der Schußtafel ist statt  $X = 10400$  die auf Windstille reduzierte Schußweite  $X'$  zu verwenden:

$$X' = 10400 - 6 \cdot 40 + \frac{6 \cdot 10400}{580 \cdot \cos 30} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30}{\operatorname{tg} 45} \cdot \left(2 - \frac{\operatorname{tg} 45}{\operatorname{tg} 80}\right) = 10179 \text{ m.}$$

2. Außerdem sei durch photogrammetrische Aufnahmen bei diesem Wind z. B. der Bahnpunkt  $x = 6600$  m,  $y = 2000$  m und die zugehörige Flugzeit  $t = 20$  sec gemessen. Man hat für die Reduktion auf Windstille zu ersetzen:

$$x = 6600 \text{ durch: } x = 6600 - 6 \cdot 20 - \frac{6600 \cdot 6}{580 \cdot 0,866} = 6402 \text{ m; und gleichzeitig}$$

$$y = 2000 \quad " \quad y = 2000 + \frac{2 \cdot 6}{580 \cdot 0,866} \cdot (6600 \cdot 0,5774 - 2 \cdot 2000) = 1995 \text{ m.}$$

$$t = 20 \quad " \quad t = 20 - \frac{2 \cdot 6 \cdot 20}{580 \cdot 0,866} = 19,52 \text{ sec.}$$

### Wind mit der Höhe veränderlich.

Bisher war die Geschwindigkeit  $w_p$  des Mitwinds als konstant vorausgesetzt. Tatsächlich erfährt aber die Windgeschwindigkeit mit wachsender Höhe  $y$  fast immer eine Änderung, meistens eine Zunahme. Es gilt, diese Änderung bei der Berechnung der Windkorrektur zu berücksichtigen, wobei angenommen sei, daß an dem betreffenden Tag die Windgeschwindigkeit (und Windrichtung) durch eine Wetterstation in Funktion der Höhe  $y$  ermittelt worden ist; zunächst soll vorausgesetzt werden, daß auch in der Höhe nur Mitwind herrsche.

Th. Vahlen (l. c. 1922, S. 120) gelangt durch theoretische Betrachtungen zu dem Satze, daß man „bei der Berechnung der Windkorrektur der Veränderung des Winds mit der Höhe am besten Rechnung trägt, indem man sie wie für einen mit der Höhe unveränderlichen Wind berechnet und dabei den in halber Flughöhe wehenden Wind nimmt“. Statt dessen hat 1910 der Verfasser vorgeschlagen, mit einer mittleren konstanten Windgeschwindigkeit zu rechnen, wie sie in  $\frac{2}{3}$  der Gipfelhöhe der Flugbahn herrscht, da in dieser Höhe sich das Geschöß (wenigstens im luftleeren Raum) durchschnittlich bewegt, vgl. § 1. Diese beiden Annahmen: mittlere konstante Windgeschwindigkeit wie in der Höhe  $\frac{1}{2} \cdot y_p$ , und: mittlere konstante Windgeschwindigkeit wie in der Höhe  $\frac{2}{3} \cdot y_p$ , sind jedenfalls bloß rohe Annäherungen. E. Stübler hat neuerdings gezeigt (Heerestechnik 1924, Nr. 10, S. 307), daß der Vahlensche Vorschlag (Wind in Höhe  $\frac{1}{3} y_p$ ) eine erste Näherung bildet in einer Reihe, die dem Cranzschen Vorschlag (Wind in Höhe  $\frac{2}{3} y_p$ ) als Grenzwert zustrebt.

Genauere Resultate dürfte das Verfahren von E. Stübler liefern: Er denkt sich die Atmosphäre in mehrere Luftschichten von verschiedener Windgeschwindigkeit eingeteilt. Die erste Luftschicht mit der Windgeschwindigkeit  $w_p$  reiche bis zu dem Flugbahnpunkt mit den Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$ , der Flugzeit  $t_1$ , der Geschößgeschwindigkeit  $v_1$  und der Tangentenneigung  $\vartheta_1$ . Von diesem Punkt ab beginnt die zweite Luftschicht mit der anderen Windgeschwindigkeit  $w_p'$ . Innerhalb dieser zweiten Luftschicht befinde sich der fragliche Punkt (mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  und der Flugzeit  $t$ ), dessen Bahnelemente  $xyt$  auf Windstille reduziert werden sollen. Diese Reduktion geht so vor sich, daß  $xyt$  nach den obigen Formeln von (6) bis (8), bzw. von (9) bis (11) zunächst für die Windgeschwindigkeit  $w_p$  der ersten Schichte reduziert werden, daß aber von der Flugbahnstelle ( $x_1, y_1$ ) ab, wo das Geschöß in die Luftschicht von der anderen Windgeschwindigkeit  $w_p'$  eindringt, bis zu dem Punkt ( $x, y$ )

eine zweite Reduktion hinzugefügt wird, die sich auf den Flugbahnteil  $(x_1 y_1)$  bis  $(xy)$  bezieht. Bei dieser Zusatzreduktion ist an Stelle von  $w_p$  nunmehr der Zuwachs  $w_p' - w_p$  zu setzen; und es ist so zu rechnen, als wenn  $(x_1 y_1)$  der Anfangspunkt einer Flugbahn wäre. Also hat man, falls es sich um eine Haubitze oder einen Mörser handelt ( $n = 2$ ), in den Gleichungen (6) bis (8) die Werte  $xyt v_0 \varphi$  zu ersetzen durch bzw.  $x - x_1$ ,  $y - y_1$ ,  $t - t_1$ ,  $v_1$ ,  $\vartheta_1$ , oder, was dasselbe ist, man hat noch die folgenden weiteren Reduktionsglieder hinzuzufügen:

bei der Abszisse  $x$ :  $-(w_p' - w_p) \cdot (t - t_1)$ .

" " Ordinate  $y$ :  $+\frac{w_p' - w_p}{v_1 \cdot \cos \vartheta_1} \cdot ((x - x_1) \operatorname{tg} \vartheta_1 - 2(y - y_1))$ .

" " Flugzeit  $t$ :  $-\frac{w_p' - w_p}{v_1 \cdot \cos \vartheta_1} \cdot (t_1 - t_1)$ .

In dieser Weise fährt man fort. Neue Reduktionsglieder treten hinzu, wenn es sich um einen Punkt des absteigenden Astes handelt, der in der unteren Luftschicht liegt, z. B. um den Auffallpunkt.

Beispiel. In dem vorhergehenden Beispiel (wo  $v_0 = 580$  m/sec;  $\varphi = 30^\circ$ ;  $w_p = +6$  m/sec;  $x = 6600$  m;  $y = 2000$  m;  $t = 20$  sec war) sei jetzt angenommen, daß von  $y = 1000$  m ab die Geschwindigkeit des Mitwinds eine größere, nämlich  $w_p' = +10$  m/sec sei. Die Elemente der Flugbahnstelle, wo das Geschoß in diese zweite Luftschicht eindringt, sind:  $x_1 = 1880$  m;  $y_1 = 1000$  m;  $t_1 = 4$  sec;  $\operatorname{tg} \vartheta_1 = 0,49$ ;  $v_1 \cos \vartheta_1 = 435$  m/sec, wie die ballistische Berechnung gemäß dem 5. Abschnitt §25 ergibt. Also kommen bezüglich des Punktes  $x = 6600$ ,  $y = 2000$  m zu den bereits ausgeführten Reduktionen auf Windstille noch die folgenden Zusätze hinzu, falls wieder mit  $n = 2$  gerechnet wird:

zu  $x = 6402$ :  $-(w_p' - w_p) \cdot (t - t_1) = -(10 - 6) \cdot (20 - 4) = -64$ ;  
also  $x = 6402 - 64 = 6338$  m;

"  $y = 1995$ :  $+\frac{(10 - 6)}{435} \cdot ((6600 - 1880) \cdot 0,49 - 2(2000 - 1000)) = +12$ ;  
also  $y = 2007$  m;

"  $t = 19,76$ :  $-\frac{(w_p' - w_p) \cdot (t - t_1)}{v_1 \cdot \cos \vartheta_1} = -\frac{4 \cdot 16}{435} = -0,15$ ; also  $t = 19,61$  sec.

Für den Auffallpunkt im Mündungshorizont ist wieder  $x = X$ ,  $y = 0$ ,  $t = T$  zu setzen und (für  $n = 2$ ) außer dem Glied

$$-w_p \left( T - \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0 \cos \varphi \operatorname{tg} \omega} \right) \text{ noch das Reduktionsglied}$$

$$-(w_p' - w_p) \cdot \left[ T - t_1 - \frac{(X - x_1) \operatorname{tg} \vartheta_1 + 2 y_1}{v_1 \cos \vartheta_1 \operatorname{tg} \omega} \right]$$

der Schußweite  $X$  beizufügen. Denn wie (12) aus (9) und (10) entstanden ist, so hat man auch hier die  $x$ -Reduktion unverändert, die  $y$ -Reduktion dagegen mit dem Faktor  $\cotg \omega$  zur Schußweite  $X$  hinzunehmen. Ein weiteres Glied ist für den späteren zweiten Eintritt des Geschosses in die untere Luftschicht im absteigenden Ast erforderlich.



Von diesen Gleichungen dienen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_r &= \frac{v_0 \sin \varphi}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \varphi + w_s^2}} \\ v_r &= \sqrt{v_0^2 + w_s^2} \end{aligned} \quad (14)$$

dazu, die Anfangsgeschwindigkeit  $v_r$  und den Abgangswinkel  $\varphi_r$  für die Relativbahn, also für diejenige Flugbahn zu ermitteln, durch die die Geschosßbewegung auf Windstille reduziert wird, und die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{w_s}{v_0 \cos \varphi} \quad (15)$$

dient dazu, die Vertikalebene  $OHJ$  festzulegen, in der die auf Windstille reduzierte Geschosßbewegung vor sich geht (Reduktionsebene oder Ebene der Relativbahn).

In dem Wegediagramm Abb. 69 für die Horizontalprojektionen der Geschosßwege erscheint die Schußebene als die Gerade  $OK$ . Unter dem Winkel  $\psi$ , der aus Gleichung (15) hervorgeht, ist gegen  $OK$  die Gerade  $OM$  gezogen, die die Reduktionsebene darstellt. Mit den nach (14) berechneten Werten  $v_r$  und  $\varphi_r$ , sowie dem ballistischen Koeffizienten  $c$  denke man sich die Abszisse  $x_r$  des Geschosses nach

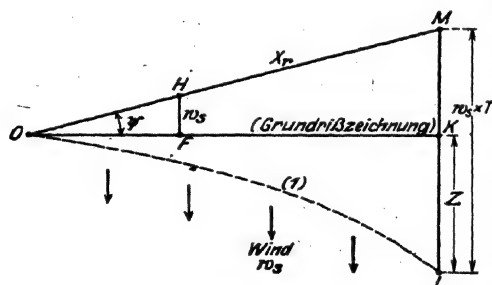


Abb. 69.

der Zeit  $t$ , speziell die Schußweite  $X_r = OM$  berechnet, die zur Gesamtflugzeit  $T$  gehört. Parallel der Windrichtung, also senkrecht zu  $OK$ , denke man sich an  $x_r$  den Vektor  $w_s \cdot t$ , bzw. an  $X_r$  oder  $OM$  den Vektor  $w_s \cdot T$  oder  $ML$  angefügt. Dann ist  $L$  die wirkliche Lage des Geschosses nach der Zeit  $T$  bezüglich des Erdbodens. In der Tat ist  $OM$  der horizon-

tales Weg des Geschosses bezüglich der Luft (oder der auf Windstille reduzierte Weg),  $ML$  der Weg der Luft bezüglich des Erdbodens, also  $OL$  der Weg des Geschosses bezüglich des Erdbodens.

Die Schußweite, die man bei Wind innerhalb der Schußebene hat, ist  $OK$  oder

$$X = X_r \cdot \cos \psi, \quad (16)$$

wobei  $\psi$  aus (15) folgt.

Und die Seitenabweichung  $Z$  des Geschosses durch den Wind, gemessen senkrecht zur Schußebene ist  $KL = ML - MK$  also

$$Z = w_s \cdot T - X_r \sin \psi. \quad (17)$$

Diese Betrachtung gilt selbstverständlich auch für einen beliebigen Flugbahnpunkt. Die Koordinaten eines solchen, nach der Zeit  $t$  bei Seitenwind  $+w_s$  erhalten, seien mit  $x$  und  $y$  bezeichnet; die durch den Wind bewirkte Seitenablenkung an dieser Stelle mit  $z$ ; die auf Windstille bezogene Abszisse mit  $x_r$ , so ist

$$x = x_r \cos \psi; \quad z = w_s t - x_r \sin \psi. \quad (18)$$

Da  $\psi$  aus  $\operatorname{tg} \psi = \frac{w_s}{v_0 \cos \varphi}$  sich ergibt, so ist in der Regel  $\psi$  ein sehr kleiner Winkel, und alsdann  $x_r$  durch  $x$ ,  $\sin \psi$  durch  $\operatorname{tg} \psi$  zu ersetzen. Die im allgemeinen zu benützende Formel für die Seitenablenkung des Geschosses durch den Wind, senkrecht zur Schußebene, ist somit

$$z = w_s t - x \cdot \frac{w_s}{v_0 \cos \varphi}; \quad Z = w_s T - X \cdot \frac{w_s}{v_0 \cos \varphi}, \quad (19)$$

dabei bedeutet:  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit,  $\varphi$  den Abgangswinkel,  $x$  die bei Wind beobachtete horizontale Entfernung des Geschosses nach der Zeit  $t$ ,  $X$  die Schußweite bei Wind,  $T$  die Gesamtflugzeit,  $+w_s$  die Geschwindigkeit des Winds senkrecht zur Schußebene, von links nach rechts,  $z$  die Seitenabweichung durch Wind nach der Zeit  $t$ ,  $Z$  dieselbe nach der Zeit  $T$ .

Beispiel. Wie oben sei  $v_0 = 580$  m/sec;  $\varphi = 30^\circ$ ;  $x = 6600$  m;  $t = 20$  sec;  $X = 10400$  m;  $T = 40$  sec; jedoch nunmehr die Windrichtung senkrecht zur Schußebene,  $w_s = +6$  m/sec.

Es wird  $\cos \psi = 0,9999$ . Somit sind die Gleichungen (19) anwendbar, und es ist

$$\text{nach der Zeit } t = 20 \text{ sec} \quad z = 6 \cdot 20 - \frac{6600 \cdot 6}{580 \cdot \cos 30^\circ} = 41 \text{ m}$$

$$\text{" " " " } T = 40 \text{ sec} \quad Z = 6 \cdot 40 - \frac{10400 \cdot 6}{580 \cdot \cos 30^\circ} = 116 \text{ m.}$$

Wie schon erwähnt, bewegt sich das Geschöß (von der Drallwirkung abgesehen) mit den Anfangselementen  $v_r$  und  $\varphi_r$  innerhalb der Vertikalebene  $OM$  geradeso, wie wenn kein Wind wehen würde. Wenn man nun aus  $v_r$ ,  $\varphi_r$  und dem ballistischen Koeffizienten  $c$  die Koordinaten  $x_r$  und  $y_r$  eines beliebigen Bahnpunkts zu irgendeiner

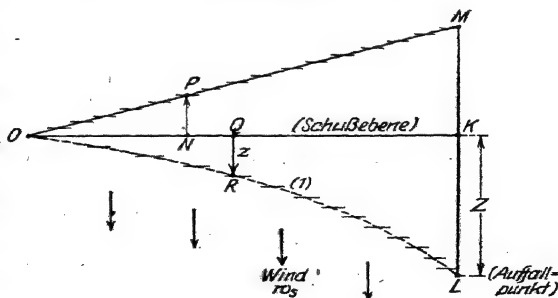


Abb. 70.

Flugzeit  $t$  berechnen will, so hat man streng genommen zu berücksichtigen, daß (vgl. Abb. 70) die Achse des Langgeschosses, von

Nutations- und Präzessionspendelungen vorläufig abgesehen, parallel der Schußebene  $OK$  bleibt. Es wird also der ballistische Koeffizient  $c$ , der für die Bewegung des Geschosses von  $O$  nach  $M$  zu benutzen ist, durch diesen Umstand etwas vergrößert.

#### § 49. Die Waffe in Ruhe bezüglich des Erdbodens. Wind wehe schief gegen die Schußebene, konstant oder mit der Höhe veränderlich.

Allgemeiner sei jetzt angenommen, daß der (horizontale) Wind gleichzeitig als Mitwind und als Seitenwind wirke. Der Winkel zwischen der positiven Windrichtung und der Schußebene sei  $\alpha$ ; die Komponente der Windgeschwindigkeit parallel der Schußebene sei  $w_p$ , positiv bei Mitwind; die Komponente senkrecht zur Schußebene  $w_s$ , positiv für einen Wind von links nach rechts. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem sei angenommen mit dem Abgangspunkt  $O$  als Koordinatenanfang, die  $x$ -Achse horizontal und positiv in der horizontalen Schußrichtung; die  $y$ -Achse vertikal und positiv nach oben; die  $z$ -Achse horizontal und senkrecht zur Schußebene, positiv von links nach rechts.

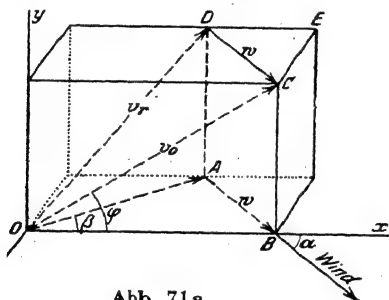


Abb. 71a.

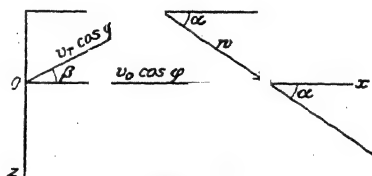


Abb. 71b.

In dem Diagramm der Anfangsgeschwindigkeiten (Abb. 71a), wovon in der Abb. 71b der Grundriß herausgezeichnet ist, stellt  $OC$  die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses, Winkel  $COB$  den Abgangswinkel, also  $OB$  die Horizontalkomponente  $v_0 \cdot \cos \varphi$  oder  $v_{x_0}$  der Anfangsgeschwindigkeit,  $AB$  oder  $DC$  die Windgeschwindigkeit  $w$  mit den Komponenten  $DE = w_p$  parallel der Schußebene  $OCB$  und  $EC = w_s$  senkrecht zur Schußebene dar.

An den Vektor  $OC$  von  $v_0$  wird der Vektor  $CD$  der negativ genommenen Windgeschwindigkeit angetragen; dann ist der resultierende Vektor  $OD$  die auf Windstille reduzierte Anfangsgeschwindigkeit  $v$ , in der Reduktionsebene  $ODA$ , also in der Ebene der Relativbahn. Der Winkel  $DOA$  ist der Abgangswinkel für diese Relativbahn. Die Ebene  $ODA$  der Relativbahn bildet gegen die Schußebene  $OCB$

einen Winkel  $\beta$ . Wie man aus der Abb. 71a abliest, ist

$$v_r \cdot \cos \varphi_r = \sqrt{(v_{x_0} - w_p)^2 + w_s^2}; \quad v_r = \sqrt{v_0^2 + w^2 - 2v_{x_0} \cdot w_p}, \quad (20)$$

$$v_r \cdot \sin \varphi_r = v_{y_0};$$

$$\sin \beta = \frac{w_s}{v_r \cdot \cos \varphi_r}; \quad \cos \beta = \frac{v_{x_0} - w_p}{v_r \cdot \cos \varphi_r}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{w_s}{v_{x_0} - w_p}. \quad (21)$$

Diese Angaben beziehen sich, wie schon bemerkt, auf den Anfang der Bahnen. Im weiteren Verlauf wird, abgesehen von der Drallwirkung, die Relativbahn oder Windstillenbahn des Geschosses in der Anfangsebene  $OAD$  bleiben, sie wird eine ebene Kurve bilden. Dagegen die Bahn bei Wind wird allmählich aus der Anfangsebene  $OBC$  nach rechts herausrücken, wie dies in der obigen Abb. 69 im Grundriß schematisch angedeutet wurde. Nämlich in der obigen ersten Gleichung (20) stellt  $v_{x_0}$  den Anfangswert der Horizontalkomponente  $v_x$  oder  $v \cdot \cos \vartheta$  der Geschößgeschwindigkeit dar;  $v_x$  wird im weiteren Verlauf kleiner und kleiner; folglich wird, wie die erste Gleichung (21) erkennen läßt, der Winkel  $\beta$  allmählich etwas größer als im Anfang.

#### A. Die Windgeschwindigkeit ( $w_p, w_s$ ) mit der Höhe unveränderlich.

Aus den Anfangselementen  $v_r$  und  $\varphi_r$  der Relativbahn und aus dem ballistischen Koeffizienten  $c$  berechnet sich die horizontale Gesamtschußweite  $X_r$  der Relativbahn und die zugehörige Gesamtflugzeit  $T_r$  der Relativbahn (wobei  $T_r$  gleich der Gesamtflugzeit  $T$  bei Wind ist). Die Projektion von  $X_r$  auf die Schußebene  $OBC$  ist  $X_r \cdot \cos \beta$ . Fügt man dazu die Windversetzung  $w_p \cdot T_r$  oder  $w_p \cdot T$  in der Schußebene hinzu, so erhält man die Gesamtschußweite  $X$  bei Wind. Die Projektion von  $X_r$  auf die zur Schußebene senkrechte  $z$ -Achse ist  $-X_r \cdot \sin \beta$ ; fügt man dazu die Windversetzung  $w_s \cdot T$  hinzu, so erhält man die durch den Wind bewirkte Seitenablenkung  $Z$ . Es ist also

$$\left. \begin{aligned} \text{Schußweite bei Wind:} \quad X &= X_r \cdot \cos \beta + w_p \cdot T; \\ \text{Seitenablenkung durch den Wind:} \quad Z &= -X_r \cdot \sin \beta + w_s \cdot T. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Hat man umgekehrt bei Wind ( $w_p, w_s$ ) die Schußweite  $X$  beobachtet und wünscht man, diese Beobachtung auf Windstille zu reduzieren, so hat man mit  $X$  die negative Windversetzung  $-w_p \cdot T$  geometrisch zusammenzusetzen und erhält damit innerhalb der Relativ-Ebene  $OAD$  eine Schußweite  $X_r$ , die zu einer auf Windstille bezogenen Bahn gehört, mit der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit  $v_r \cdot \cos \varphi_r$  und der vertikalen Anfangsgeschwindigkeit  $v_{y_0}$ .

Diese Betrachtungen gelten auch für einen beliebigen Bahnpunkt. Die zugehörigen Rechnungen gestalten sich jedoch etwas umständlich,



insbesondere deshalb, weil das allmähliche Größerwerden von  $\beta$  zu berücksichtigen ist. Einfacher vollzieht sich die Rechnung mit Benützung eines Gleichungssystems, das E. Stübler (vgl. Lit.-Note) mit Hilfe des Didion-Bernoullischen Lösungssystems von § 25 aufgestellt hat und das im folgenden ohne Ableitung wiedergegeben werden soll: Es seien  $xyz$  die Koordinaten eines Flugbahnpunkts bei Windstille;  $t$  die zugehörige Flugzeit;  $v_{x_0}$  und  $v_{y_0}$  wie bisher die Horizontal- bzw. Vertikalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses;  $x'y'z'$  die entsprechenden Koordinaten bei einem Wind mit der Längskomponente  $w_p$  m/sec (positiv in der  $x$ -Richtung) und der Seitenkomponente  $w_s$  m/sec (positiv in der  $z$ -Richtung, also von links nach rechts);  $t$  die zugehörige Flugzeit;  $\delta$  (kg/m<sup>3</sup>) das Luftgewicht;  $g = 9,81$ ;  $n$  der Exponent in dem betr. eingliedrigen Potenzgesetz für die Luftwiderstandsverzögerung  $c \cdot f(v) = c \cdot v^n$ , also bei Annahme des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes  $n = 2$ . Dann ist, falls die Windgeschwindigkeit als mit der Höhe unveränderlich vorausgesetzt werden kann:

$$\Delta x = x' - x = (\lambda - 1) \cdot x + \lambda \cdot w_p \left( t - \frac{x}{v_{x_0}} \right); \quad (23)$$

$$\Delta y = y' - y = (\lambda - 1) \cdot \left[ (\lambda + 1) y - \frac{\lambda \cdot v_{y_0} \cdot x}{v_{x_0}} \right]; \quad (24)$$

$$\Delta z = z' - z = \lambda \cdot w_s \cdot \left( t - \frac{x}{v_{x_0}} \right); \quad (25)$$

$$\Delta t = t' - t = (\lambda - 1) \cdot t. \quad (26)$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\lambda = \left[ \frac{v_{x_0}}{\sqrt{(v_{x_0} - w_p)^2 + w_s^2}} \right]^{n-1} \quad (27)$$

Beispiel. Für Windstille seien die Elemente  $x = 709,17$  m;  $y = 392,16$  m;  $t = 8,464$  sec eines Flugbahnpunkts berechnet oder gemessen; dabei  $v_0 = 141$  m/sec und  $\varphi = 45^\circ$ , also  $v_{x_0} = 100$ ;  $v_{y_0} = 100$  m/sec.

Wie wirkt ein starker Gegenwind  $w_p = -29$  m/sec,  $w_s = 0$  auf die Bahn? Man wird zur Lösung dieser Aufgabe entweder gemäß § 47 zunächst die Relativbahn berechnen (mit  $v_r$  und  $\varphi_r$ ) und dann die Windversetzung  $w_p \cdot t$  hinzufügen; oder aber kürzer mit den obigen Formeln von E. Stübler operieren. Hier ist  $n = 2$  zu nehmen, somit  $\lambda = \frac{100}{129} = 0,775$ ;  $\lambda - 1 = -0,225$ ;  $\lambda + 1 = 1,775$ ; also

$$\Delta x = -0,225 \cdot 709,17 - 0,775 \cdot 29 \left( 8,464 - \frac{709,17}{100} \right) = -190,4;$$

$$\Delta y = -0,225 \cdot \left( 1,775 \cdot 392,16 - 0,775 \cdot \frac{100}{100} \cdot 709,17 \right) = -33,0;$$

$$\Delta z = 0;$$

$$\Delta t = -0,225 \cdot 8,464 = -1,90.$$

Somit ist bei dem Wind:

$$x' = x + \Delta x = 709,2 - 190,4 = 518,8 \text{ m};$$

$$y' = y + \Delta y = 392,2 - 33,0 = 359,2 \text{ m};$$

$$t' = t + \Delta t = 8,46 - 1,90 = 6,56 \text{ sec.}$$

### B. Der Wind mit der Höhe veränderlich.

Die Komponenten  $w_p$  und  $w_s$  der Windgeschwindigkeit mögen durch besondere Messung, etwa mittels Pilotballon-Registrierungen, in Funktion von  $y$  gemessen vorliegen. Wenn es sich um die Reduktion einer Flugbahn auf Windstilleverhältnisse handelt, ist es am einfachsten, das (schon oben in § 47 für einen speziellen Fall ange-deutete) Verfahren anzuwenden, das E. Stübler entwickelt und auf den hier vorliegenden allgemeineren Fall ausgedehnt hat. Zwischen dem Erdboden und der Höhe  $y_1$ , die das Geschöß nach der Zeit  $t_1$  im Bahnpunkt  $P_1$  oder  $(x_1, y_1)$  mit der Geschwindigkeit  $v_1$  und unter dem Tangentenneigungswinkel  $\vartheta_1$  erreicht, herrsche ein Mitwind  $+w_p$  und ein Seitenwind  $w_s$ ; zwischen den Höhen  $y_1$  und  $y_2$  oder den Flugbahnpunkten  $P_1$  und  $P_2$  seien die Windgeschwindigkeitskomponenten  $w_p + \Delta_1 w_p$  bzw.  $w_s + \Delta_1 w_s$ ; in der nächstfolgenden Luftschicht, die bis zur Höhe  $y_3$  reicht, seien die Windkomponenten wieder um  $\Delta_2 w_p$  bzw. um  $\Delta_2 w_s$  größer, also von dem Betrage  $w_p + \Delta_1 w_p + \Delta_2 w_p$  bzw.  $w_s + \Delta_1 w_s + \Delta_2 w_s$ , und so fort.

Es sei ferner  $v_0 \cos \varphi$  die Horizontalkomponente der Geschößgeschwindigkeit im Abgangspunkt;  $v_1 \cos \vartheta_1$  dieselbe Komponente in demjenigen Bahnpunkt  $P_1$  oder  $(x_1, y_1)$ , der nach der Zeit  $t_1$  erreicht wird und der die erste Schichtgrenze der Windgeschwindigkeit darstellt;  $v_2 \cos \vartheta_2$  sei ebenso die Horizontalgeschwindigkeit des Geschosses in dem nach der Zeit  $t_2$  sec erreichten Bahnpunkt  $P_2$  oder  $(x_2, y_2)$  usw.;  $x, y$  seien die Koordinaten des nach  $t$  sec erreichten Bahnpunkts, für welchen die Seitenablenkung  $z$  durch den Wind berechnet werden soll und um dessen Reduktion auf Windstille es sich handelt.

Wenn man sich vorstellt, daß der Anfangspunkt der Bahn vorübergehend zunächst in den ersten Schichtengrenzpunkt  $P_1$  verlegt und dort auch der Koordinatenanfang angenommen wird, so daß ein variabler Punkt  $P$  bezüglich des Punktes  $P_1$  nach der Zeit  $t - t_1$  erreicht wird und die Koordinaten  $x - x_1$  und  $y - y_1$  besitzt, daß sodann  $P_2$  zum Anfangspunkt einer Flugbahn und zum Koordinatenanfangspunkt gewählt wird usw., erhält man das folgende Resultat:

1. Die durch den Wind bewirkte Seitenablenkung  $\Delta z$  des Geschosses in dem Bahnpunkt  $(x, y)$  ist

$$\Delta z = w_s \cdot \left( t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \right) + \Delta_1 w_s \cdot \left( t - t_1 - \frac{x - x_1}{v_1 \cos \vartheta_1} \right) + \Delta_2 w_s \cdot \left( t - t_2 - \frac{x - x_2}{v_2 \cos \vartheta_2} \right) + \dots \quad (28)$$

2. Die bei Wind gemessenen Koordinaten  $x$ ,  $y$  eines beliebigen Flugbahnpunktes  $P$ , der nach der Zeit  $t$  sec erreicht worden ist, werden (mit  $n = 2$ ) auf Windstille reduziert, indem man statt  $x$  bzw.  $y$  setzt:

$$\text{statt } x: x - w_p \cdot t - \Delta_1 w_p \cdot (t - t_1) - \Delta_2 w_p \cdot (t - t_2) - \dots \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{,, } y: y - w_p \cdot \frac{2y - x \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_0 \cos \varphi} - \Delta_1 w_p \cdot \frac{2(y - y_1) - (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi_1}{v_1 \cos \varphi_1} \\ - \Delta_2 w_p \cdot \frac{2(y - y_2) - (x - x_2) \operatorname{tg} \varphi_2}{v_2 \cos \varphi_2} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Beispiel. Gegeben  $v_0 = 410$  m/sec;  $\varphi = 25^\circ$ . Es seien die Koordinaten  $xyz$  ( $x$  horizontal nach vorn,  $y$  vertikal nach oben,  $z$  horizontal von links nach rechts) von mehreren Flugbahnpunkten bei Wind (mittels Stereophotogrammetrie bei Nacht oder mit Hilfe von Gitterplatten-Theodoliten bei Tag) gemessen worden; die zugehörigen Flugzeiten  $t$  mittels der Tertienuhr. Ferner sei durch einen Pilotballonaufstieg die Windrichtung und Windgeschwindigkeit in den Höhen  $y = 0; 250; 500; 750; 1000$  m festgestellt worden; dabei habe sich nur Seitenwind ergeben (also  $w_p = 0$ ) und zwar von rechts nach links, mit den Geschwindigkeiten von bzw.:  $w_s = -3,4; -6,6; -6,0; -3,8; -1,2$  m/sec.

Aus den gemessenen Flugbahnpunkten sei die untenstehende Tabelle graphisch abgeleitet worden, die die Werte von  $x$ ,  $y$ ,  $t$  und  $v \cos \vartheta$  enthält für

$x$ (m)	$y$ (m)	$t$ (sec)	$v \cdot \cos \vartheta$ (m/sec)
0	0	0	372
287	125	0,89	351
881	375	2,72	314
1557	625	4,99	283
2526	875	8,62	253
3658	980	13,25	233
4740	875	18,08	223
5575	625	22,13	206

diejenigen Bahnpunkte, deren Ordinaten  $y$  je in der Mitte zwischen den Höhen der Pilotballonmessungen liegen, also für die Punkte mit  $y = 125; 375; 625 \dots$ . Dabei sei angenommen, daß zwischen je zwei aufeinanderfolgenden solchen Höhen die mittlere Windgeschwindigkeit als angenähert konstant angesehen werden könne, z. B. zwischen den Höhen 125 und 375 m,  $w_s = \text{konstant} - 6,6$  m/sec. Dann ist zu nehmen:  $w_s = -3,4; \Delta_1 w_s = -3,2; \Delta_2 w_s = +0,6; \Delta_3 w_s = +2,2; \Delta_4 w_s = +2,6$ .

Für den ersten gemessenen Sprengpunkt sei gefunden worden  $x = 1564$  m;  $y = 629$  m;  $z = +6$  m;  $t = 5,00$  sec. Diese Messungszahlen sollen auf Windstille reduziert werden. Da nur Seitenwind wirkt, sind die Änderungen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  von  $x$  und  $y$  Null und kommt nur die Gleichung (28) in Betracht. Diese liefert für den erwähnten ersten Sprengpunkt als Seitenverschiebung durch den Wind:

$$\begin{aligned} \Delta z = & -3,4 \left( 5,00 - \frac{1564}{372} \right) - 3,2 \left( 5,00 - 0,89 - \frac{1564 - 287}{351} \right) \\ & + 0,6 \cdot \left( 5,00 - 2,72 - \frac{1564 - 881}{314} \right) + 2,2 \cdot \left( 5,00 - 4,99 - \frac{1564 - 1557}{283} \right) = \sim -4 \text{ m.} \end{aligned}$$

Also sind die auf Windstille reduzierten Koordinaten dieses ersten Sprengpunkts die folgenden:  $x = 1564$  m;  $y = 629$  m;  $z = 6 - 4 = 2$  m. Entsprechend wird betreffs der übrigen Sprengpunkte gerechnet. Und wenn auch in der Schußebene eine Windkomponente aufgetreten wäre, so hätten zur Reduktion auf Windstille außerdem die Beziehungen (29) und (30) benützt werden müssen.

Anmerkung. Das vorstehend angegebene Reduktionsverfahren genügt für die gewöhnlichen Bedürfnisse der Praxis. Da der Wind meistens seine Geschwindigkeit und seine Richtung mehr oder weniger rasch wechselt, so wird ein genaueres und kontinuierliches Windberichtigungsverfahren selten angewendet werden müssen. Ein solches ist ebenfalls von E. Stübler aufgestellt worden (vgl. Lit.-Note); die betr. Gleichungen werden hier nur kurz ohne jede Ableitung angeführt, indem auf die Arbeit selbst verwiesen wird. Die Komponenten  $w_p$  und  $w_s$  des Winds seien als Funktionen von  $y$  und damit von  $x$  und  $t$  empirisch gegeben;  $w_{p_0}$  bzw.  $w_{s_0}$  die Anfangswerte für  $y = 0$  und  $x = 0$ . Im übrigen gelten die Bezeichnungen von A. Unter der Voraussetzung, daß die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses groß ist, etwa größer als 150 m/sec, haben die Änderungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$  bzw.  $\Delta X$ ,  $\Delta Z$ ,  $\Delta T$ , die an den Elementen  $xyz$  eines beliebigen Bahnpunkts, bzw. an den Elementen  $X$ , ( $Y = 0$ ),  $Z$ ,  $T$  des Auffallpunkts durch den Wind bewirkt werden, folgende Werte:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int w_p \cdot d \left( t + \frac{(n-2)x}{v_x} \right) - (n-2) \cdot x \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right); \\ \Delta y &= (n-1) \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{2y}{v_x} - \frac{v_y \cdot x}{v_x^2} \right) - 2 \cdot (n-1) \cdot y \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right) \\ &\quad + (n-1) \cdot x \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{v_y}{v_x^2} \right); \\ \Delta z &= \int w_s \cdot d \left( t - \frac{x}{v_x} \right) + x \cdot \int w_s \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right); \\ \Delta t &= (n-1) \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{t}{v_x} \right) - (n-1) \cdot t \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right).\end{aligned}$$

Dabei sind die Integrale bis zu dem betreffenden Punkt zu erstrecken, um den es sich gerade handelt; und man wird z. B. das Integral  $\int w_p \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right)$  auswerten, indem man  $\frac{1}{v_x}$  als Funktion etwa von  $x$  numerisch ermittelt und in einem Koordinatensystem die Werte  $\frac{1}{v_x}$  als Abszissen, die Werte  $w_p$  als Ordinate aufträgt und dann graphisch integriert; ebenso verfährt man bei den anderen Integralen. Ferner für den Auffallwinkel, für den bei Windstille  $x = X$ ,  $y = Y = 0$ ,  $z = Z$  war und die Gesamtflugzeit mit  $T$ , der spitze Auffallwinkel mit  $\omega$  bezeichnet ist, werden die betr. Änderungen durch den Wind:

$$\begin{aligned}\Delta X &= \int w_p \cdot d t + (n-2) \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{x}{v_x} \right) - (n-2) \cdot X \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right) \\ &\quad + \frac{n-1}{\tan \omega} \cdot \left\{ \int w_p \cdot d \left( \frac{2y}{v_x} - \frac{v_y \cdot x}{v_x^2} \right) + X \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{v_y}{v_x^2} \right) \right\}; \\ \Delta Z &= \int w_s \cdot d t - \int w_s \cdot d \left( \frac{x}{v_x} \right) + X \cdot \int w_s \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right); \\ \Delta T &= (n-1) \cdot \left\{ \int w_p \cdot d \left( \frac{t}{v_x} \right) - T \cdot \int w_p \cdot d \left( \frac{1}{v_x} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Es scheint übrigens, daß, wenigstens bei Langgeschossen, der Seitenwind  $w$ , mit einem anderen Koeffizienten in der Rechnung geführt werden muß, als der Mitwind  $w_p$ .

Anmerkung (hinzugefügt von K. Becker).

### Ballistischer Wind und ballistisches Luftgewicht.

Dieselbe Schußweitenänderung und dieselbe seitliche Versetzung, welche durch einen mit der Höhe nach Richtung und Geschwindigkeit veränderlichen Wind hervorgerufen wird, kann auch durch einen bestimmten Wind, der längs der ganzen Flugbahn konstante Geschwindigkeit und konstante Richtung hat, erzeugt gedacht werden. Dieser fingierte Wind, dessen Geschwindigkeit und Richtung je ein Mittelwert aus den tatsächlich herrschenden Windgeschwindigkeiten und Richtungen ist, heißt ballistischer Wind. (Die Bezeichnung für seine Komponente in der Schußrichtung, die zunächst der Einfachheit halber allein betrachtet werden soll, sei  $w_b$ ). Er ist für die verschiedenen Flugbahnen im allgemeinen verschieden, aber bei gleichen Gipfelhöhen  $y$ , annähernd gleich. Seine Geschwindigkeit  $w_b$  ergibt sich aus den Stüblerschen Formeln zu

$$w_b = \frac{1}{M} (w_1 \cdot m_1 + w_2 \cdot m_2 + w_3 \cdot m_3 \dots); \quad (a)$$

$w_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ) ist dabei die Windgeschwindigkeit in der  $i$ -ten Schicht; und  $m_i$  erhält man nach E. Stübler, indem man die Werte, welche

$$m = T - t + \frac{X - x}{v \cdot \cos \vartheta} \left( (n-2) - (n-1) \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \omega} \right) - \frac{2(n-1)y}{\operatorname{tg} \omega \cdot v \cdot \cos \vartheta} \quad (b)$$

beim Eindringen des Geschosses in die  $i$ -te Schicht im auf- und im absteigenden Ast (vgl. § 47 Schlußformel) annimmt, von der Summe der beiden Werte abzieht, welche  $m$  beim Austreten aus derselben Schicht annimmt;  $M$  ist die Summe der Werte  $m_i$ , also  $M = T + X \cdot \frac{(n-2) \cdot \operatorname{tg} \omega - (n-1) \operatorname{tg} \vartheta}{v_0 \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \omega}$ .

Für den Seitenwind gilt eine der Gleichung (a) ganz entsprechende Formel; nur hat man zu setzen

$$m = T - t - \frac{X - x}{v \cdot \cos \vartheta} \quad \text{und} \quad M = T - \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi}. \quad (c)$$

Einen Näherungswert für  $w_b$  ergibt die Formel

$$w_b = \frac{1}{T} \cdot (w_1 \cdot t_1 + w_2 \cdot t_2 + w_3 \cdot t_3 + \dots), \quad (d)$$

oder im Grenzfall

$$w_b = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T w \cdot dt. \quad (e)$$

(In Frankreich werden diese letzteren Formeln dem Mathematiker M. E. Borel zugeschrieben.) In den Formeln (c) und (d) bedeutet  $T$  die Gesamtflugzeit und  $t$  die Zeit, während welcher sich das Geschosß in der  $i$ -ten Schicht befindet. Die Näherungsformeln haben zur Grundlage die Annahme, daß die Werte  $\frac{t_1}{T}; \frac{t_2}{T}; \frac{t_3}{T}$  usw. für alle Flugbahnen mit gleicher Gipfelhöhe bei gleicher Schichtenteilung konstant sein sollen. Diese Annahme läßt sich für das Vakuum beweisen; für die Verhältnisse des luftgefüllten Raumes soll sie nach französischen Angaben gleichfalls völlig bestätigt sein.

In der artilleristischen Praxis sind die genaueren Formeln (a) und (b) zu zeitraubend. Man ist daher im Weltkriege, wo der Begriff des ballistischen Windes zuerst auftaucht, zu Vereinfachungen geschritten. Dabei wurden zwei prinzipiell verschiedene Verfahren eingeschlagen. Bei dem ersten wird die Luftschicht bis zur Gipfelhöhe der betreffenden Flugbahn eingeteilt in Teilschichten von verschiedener Dicke; diese werden so bestimmt, daß jede einzelne Teilschicht den gleichen Betrag zur Gesamtversetzung des Geschosses durch den Wind beisteuert. Dieses Verfahren ist besonders in Deutschland angewendet worden. Die Durchrechnung einer großen Zahl von Flugbahnen in kleinen Bogenstücken mit und ohne Wind hat dabei gezeigt, daß man bis zu einer Flugzeit von 60 Sek. herauf mit einer Teilung in drei Schichten auskommt, wobei die Schichtdicken vom Gipfel nach abwärts sich etwa wie 2:5:7 verhalten sollen. Betrachtet man für die Verhältnisse des luftleeren Raumes die Schichten gleicher Wertigkeit, d. h. solche Schichten, die vom Geschöß in der gleichen Zeit ( $t_1 = t_2 = t_3 = \dots$ ) durchlaufen werden, so verhalten sich die Schichtdicken, vom Gipfel an abwärts gerechnet, wie die ungeraden Zahlen, also wie 1:3:5:7 usw. Zur Berechnung des ballistischen Windes entnimmt man aus den Ergebnissen des Pilotaufstiegs die Richtung und Geschwindigkeit der durchschnittlichen Luftversetzung in jeder einzelnen Schicht, zerlegt die betreffende Schichtwinde in zwei aufeinander senkrechte Komponenten (meist nach der Süd- und der Westrichtung), bildet aus den drei Komponenten jeder Richtung das arithmetische Mittel und erhält aus dem Süd- und dem Westmittel als Resultierende den ballistischen Wind nach Geschwindigkeit und Richtung.

Das zweite Verfahren der Praxis, das in Frankreich, England und Amerika angewendet wird, besteht darin, daß man die Gipfelhöhe in Schichten gleicher Dicke, meist 500 m, einteilt. Die Richtung und Geschwindigkeit der durchschnittlichen Luftversetzung (des Schichtwindes) läßt sich für die einzelnen Schichten aus dem Pilotdiagramm entnehmen. Man zerlegt die einzelnen Schichtwinde wiederum in ihre Süd- und Westkomponenten, multipliziert die einzelnen Komponenten mit den für die betreffende Schicht geltenden Gewichtsfaktoren und bildet, für jede der beiden Richtungen gesondert, das arithmetische Mittel. So gelangt man zur Süd- und zur Westkomponente des ballistischen Windes, woraus sich dann als Resultante der ballistische Wind nach Stärke und Richtung ergibt. Als Gewichtsfaktoren werden dabei in Frankreich einfach die Verhältniszahlen  $\frac{t_1}{T}$ ,  $\frac{t_2}{T}$ ,  $\frac{t_3}{T}$ , ... benützt, die in der obigen

Formel (c) vorkommen und sich für die Verhältnisse des luftleeren Raumes leicht berechnen lassen. Auch in den Vereinigten Staaten von Nordamerika benutzte man zuerst die gleichen Gewichtsfaktoren. Später ist dort festgestellt worden, daß mit ihrer Anwendung eine nicht immer ausreichende Annäherung verbunden ist; deshalb glaubte man, gesonderte Gewichtsfaktoren für die verschiedenen Geschützarten, Anfangsgeschwindigkeiten und Erhöhungsgruppen nicht entbehren zu können; um jedoch die Anwendung im Felde nicht allzu kompliziert zu gestalten, beschränkte man sich schließlich, nach dem Vorschlage von H. B. Hitchcock, auf drei Klassen von Gewichtsfaktoren und stellte dazu noch besondere Tabellen auf, aus denen für jedes Geschütz zu der augenblicklich angewendeten Erhöhung zu ersehen ist, welche von den drei Gewichtsfaktorenklassen im vorliegenden Falle die beste Annäherung an die genaue Rechnung gibt. Die Ermittlung des ballistischen Windes erfolgt dabei in sehr einfacher Weise graphisch. Soll er z. B. für eine Gipfelhöhe von 1500 m bestimmt werden, so ist von dem Pilotdiagramm auszugehen, welches in drei zusammenhängenden Linienzügen die Richtungen und Geschwindigkeiten der

durchschnittlichen Luftversetzung für die Schichten von 0 bis 500 m, von 500 bis 1000 m und von 1000 bis 1500 m angibt. Die Schlußlinie (Resultante) des Polygons gibt dann die Richtung und den dreifachen Betrag der durchschnittlichen Luftversetzung in der Schicht von 0 bis 1500 m. Zur Bestimmung des ballistischen Windes multipliziert man nun den Schichtwind der ersten Zone mit dem für diese Zone geltenden Gewichsfaktor und trägt das Produkt auf der ersten Seite des Pilotpolygons, vom gleichen Nullpunkt ausgehend und im gleichen Maßstab, auf. Am Endpunkt zieht man eine Parallele zur Richtung des Schichtwindes in der zweiten Zone, multipliziert dessen Geschwindigkeit mit dem Gewichsfaktor der zweiten Zone und trägt das neue Produkt wiederum im gleichen Maßstab auf der Parallelen ab. Für die dritte Zone wird entsprechend verfahren. Die Schlußlinie des zweiten, kleineren Polygons gibt den ballistischen Wind nach Richtung und Geschwindigkeit. Dieses Verfahren scheint uns, namentlich wenn die Frage der Gewichsfaktoren etwa durch exakte Berechnungen nach dem Stüblerschen Verfahren oder besser noch durch systematische Versuche genauer gestellt ist, von dem bislang gewöhnlichen Verfahren das für die Praxis einfachste und beste zu sein.

Das ballistische Luftgewicht  $\delta_b$  und seinen Überschuß  $\Delta\delta_b$  über das Normalluftgewicht  $\delta_n$  erhält man aus den Luftgewichten  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$  in den einzelnen Höhenschichten, wenn man setzt

$$\delta_b = \frac{1}{L} (\delta_1 \cdot l_1 + \delta_2 \cdot l_2 + \delta_3 \cdot l_3 + \dots) \quad \text{und}$$

$$\frac{\Delta\delta_b}{\delta_n + \Delta\delta_b} = \frac{1}{L} \left( \frac{\Delta\delta_1}{\delta_1} \cdot l_1 + \frac{\Delta\delta_2}{\delta_2} \cdot l_2 + \dots \right).$$

Darin ist  $L = X \cdot \left(1 - \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \omega}\right)$ , und  $l_i$  wird aus

$$l_i = (X - x) \left(1 - \frac{\text{tg } \vartheta}{\text{tg } \omega}\right) - \frac{2y}{\text{tg } \omega} \quad (f)$$

in derselben Weise bestimmt, wie  $m_i$  aus  $m$ , nämlich als Differenz der Eintritts- und Austrittswerte der Funktion  $l$  bezüglich der  $i$ -ten Schicht.

Bei kleinen GeschöBsteighöhen  $y_s$  soll eine Einteilung in drei Zonen, deren Höhen sich wie 1:2:2 (von der Gipfelhöhe abwärts gerechnet) verhalten, zu einem angenäherten Ergebnis führen, wenn man für  $\frac{\Delta\delta_b}{\delta_n + \Delta\delta_b}$  das arithmetische

Mittel von  $\frac{\Delta\delta_i}{\delta_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) nimmt, oder noch einfacher die ballistische Temperatur als arithmetisches Mittel aus den Temperaturen der drei Schichten berechnet und sodann aus ihr und dem Luftdruck am Boden das ballistische Luftgewicht ableitet.

Während das Verfahren des ballistischen Windes in der einen oder anderen Form während des Weltkrieges bei allen Artillerien Anwendung fand, scheint die Verwendung des ballistischen Luftgewichts nur bei der deutschen Artillerie stattgefunden zu haben. Sie war hier mit dem Verfahren des ballistischen Windes zusammengefaßt und systematisch aufgebaut in dem „Verfahren der Baltasekunden“ (d. h. ballistische Tageseinflüsse, gestaffelt nach Flugzeitsekunden) und hat hier an vielen Stellen zu einer wesentlichen Verschärfung des Schießens ohne Beobachtung beigetragen.

### § 50. Fallenlassen eines Körpers aus einem Flugzeug bei Wind.

Das Flugzeug bewege sich horizontal mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v_0$  bezüglich des Erdbodens und befinde sich in dem Augenblick, in dem der betreffende Körper (die Bombe oder dergl.) losgelassen wird, in  $O$ , senkrecht über dem Punkt  $A$ , in der Höhe  $Y$  über dem Erdboden. Die Bewegung des Körpers geht also, da dieser von vornherein ebenfalls die Geschwindigkeit  $v_0$  besaß, bezüglich des Erdbodens in gleicher Weise vor sich, wie wenn von dem festen Punkt  $O$  aus der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  unter dem Abgangswinkel Null geschleudert würde. Es läßt sich also nach früheren Methoden die zur Ordinate  $Y$  gehörige Wurfweite  $X$ , die Flugzeit  $T$ , die Auffallgeschwindigkeit  $v_e$  und der spitze Auffallwinkel  $\omega$  berechnen. (Für kugelförmige Bomben von 15 cm Durchmesser und 7,5 kg Gewicht hat P. Charbonnier (vgl. Lit.-Note) die Berechnung nach dem Verfahren von Euler-Otto für Höhen  $Y$  von 250 m bis 2000 m durchgeführt.)

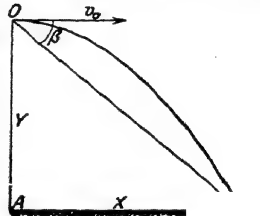


Abb. 72.

#### A. Wind weht in gleicher Richtung mit der Fahrtrichtung.

Die früher erwähnten Rechnungsmethoden sind unter der Voraussetzung von Windstille aufgestellt. Wenn also die Windgeschwindigkeit bezüglich des Erdbodens  $w$  ist, so hat man zur Berechnung der zu der Höhe  $Y$  gehörenden Wurfweite  $X_r$  und der Flugzeit  $T_r$ , außer dem ballistischen Koeffizienten  $c$  und dem Abgangswinkel  $0^\circ$ , eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_r$  zugrunde zu legen, die gleich ist der auf Windstille bezogenen Fahrtgeschwindigkeit, also gleich derjenigen Geschwindigkeit des Flugzeugs, die sich aus der Tourenzahl des Propellers ergibt. Die Wurfweite  $X$  bei Wind ist alsdann

$$X = X_r + w \cdot T_r. \quad (31)$$

#### B. Wind weht schief von hinten nach vorn.

Das Fahrzeug befinde sich in dem Augenblick, wo die Bombe losgelassen wird, in dem Punkte  $O$  und habe wieder die Geschwindigkeit  $v_0$  bezüglich des Erdbodens. Die Windgeschwindigkeit bezüglich des Erdbodens sei  $w$ , und die Windrichtung möge den Winkel  $\alpha$  gegen die Fahrtrichtung bilden, die etwa über der Straße  $OS$  verlaufe. Um die auf Windstille bezogene Fahrtgeschwindigkeit  $v_r$  zu erhalten, setzt man  $v_0$  mit  $-w$  zusammen, dann ist in dem



Geschwindigkeitsdiagramm Abb. 73a  $OA$  die Geschwindigkeit  $v_r$  des Fahrzeugs bezüglich der Luft,  $AB$  die Geschwindigkeit  $w$  der Luft bezüglich des Erdbodens, also  $OB$  die Geschwindigkeit des Fahrzeugs (und damit die Anfangsgeschwindigkeit der Bombe) bezüglich des Erdbodens. Aus der Abb. 73a ergibt sich

$$v_r^2 = v_0^2 + w^2 - 2w \cdot v_0 \cdot \cos \alpha; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{w \cdot \sin \alpha}{v_0 - w \cdot \cos \alpha}. \quad (32)$$

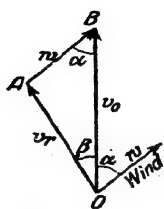


Abb. 73a.

Die auf Windstille bezogene Bewegung der Bombe geht in der Vertikalebene durch  $OA$  vor sich. Diese Reduktions- oder Relativbahnebene bildet gegen die Vertikalebene durch die Fahrtrichtung  $OB$  einen Winkel  $\beta$ , der durch Konstruktion des Dreiecks  $OAB$  oder aus der zweiten Gleichung (32) gewonnen wird. Mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_r$  und dem Abgangswinkel  $0^\circ$ , sowie dem ballistischen Koeffizienten  $c$  wird die zur Höhe  $Y$  des Fahrzeugs über dem Erd-

boden gehörige Wurfweite  $X_r$  sowie die Flugzeit  $T_r$  usw. berechnet.

Weiter ist in Abb. 73b, entsprechend dem Geschwindigkeitsdiagramm, das Wegediagramm (für den Grundriß) gezeichnet. An

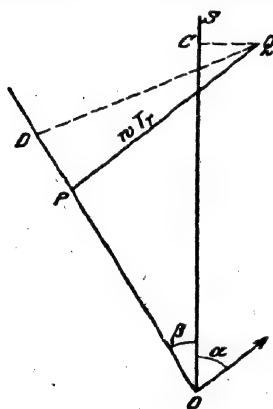


Abb. 73b.

$OS$  ist unter dem Winkel  $\beta$ , also parallel zu  $OA$ , eine Strecke  $OP$  gleich  $X_r$  angetragen und im Endpunkt  $P$  eine Strecke  $PQ$  parallel der Windrichtung  $AB$  und gleich der Windversetzung  $w \cdot T_r$  gezogen. Dann ist  $Q$  bezüglich der Straße  $OS$  der wirkliche Auffallpunkt der Bombe bei Wind. Fällt man ein Lot  $QC$  auf  $OS$ , so ist  $OC$  die Wurfweite bezüglich der Straße  $OS$  bei Wind, und  $CQ$  ist die Seitenabweichung durch den Wind. Die Richtung  $OP$  ist diejenige, in der sich die Flugzeugachse einstellt, und das Lot  $DQ$  von  $Q$  auf  $OP$  bedeutet die Abweichung des Auffallpunkts von der Vertikalebene durch die Flugzeugachse.

Speziell möge der Wind senkrecht zur Fahrtrichtung wehen, dann ist  $AB \perp OS, \alpha = 90^\circ$ . Es wird

$$v_r^2 = v_0^2 + w^2; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{w}{v_r};$$

und die Seitenabweichung gegenüber der Fahrtrichtung  $OS$  ergibt sich alsdann zu:

$$Z = w \cdot T_r - X_r \cdot \sin \beta = w \cdot T_r - X_r \cdot \frac{w}{v_r}.$$

# § 51. Von einem fahrenden Schiff oder Flugzeug aus wird quer zur Fahrtrichtung geschossen; Wind parallel der Fahrtrichtung.

Die Fahrtgeschwindigkeit bezüglich des Erdbodens sei  $s$ ; Wind wehe bezüglich des Erdbodens mit der Geschwindigkeit  $w$  in Richtung der Fahrt; beim Abfeuern quer zur Fahrtrichtung sei  $v_{x_0}$  oder  $v_0 \cdot \cos \varphi$  die Horizontalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses. Angenommen, bei ruhendem Schiffe und bei Windstille würde die zur Fahrtrichtung senkrechte Schußebene (von der Drallwirkung abgesehen) gerade durch das Ziel gehen, so muß bei dem Schießen aus dem fahrenden Schiff die Schußebene um einen gewissen Winkel  $\beta$  nach rückwärts gedreht werden. Es fragt sich, wie groß muß dieser negative Vorhaltewinkel  $\beta$  gewählt werden, damit trotz Fahrt und Wind das Ziel getroffen wird?

Erste Methode. Wenn man, um die Abweichung des Geschosses durch die Fahrt und durch den Wind im ruhenden Bezugssystem der Erde zu bestimmen, zunächst, wie oben wiederholt geschehen ist, die Relativbahn des Geschosses bezüglich der Luft feststellen will, so wird man folgendermaßen überlegen. Der Wind weht in der Richtung der Fahrt des Schiffes, und da senkrecht zur Fahrtrichtung geschossen wird, so weht der Wind quer zur Schußebene. Somit kann die Gleichung (19) von § 48 Verwendung finden; danach ist die allein durch den Seitenwind bewirkte Seitenablenkung  $Z$  des Geschosses gegenüber dem im Mündungshorizont gelegenen Ziel (mit horizontaler Entfernung  $X$  und Flugzeit  $T$ ) von dem Betrage:  $Z = w_s \cdot T - \frac{w_s X}{v_{x_0}}$ ; oder, wenn statt der Seitenverschiebung  $Z$  im Längenmaß die Seitenverschiebung  $\frac{Z}{X}$  im Winkelmaß eingeführt, der kleine Winkel  $Z:X$  mit  $\beta_1$  bezeichnet und statt  $w_s$  kurz  $w$  geschrieben wird, so ist  $\beta_1 = w \left( \frac{T}{X} - \frac{1}{v_{x_0}} \right) =$  Seitenverschiebung allein durch den Wind.

Eine weitere Verschiebung tritt ein durch die Fahrt allein: Die Fahrtgeschwindigkeit  $s$  ist immer sehr klein gegen die horizontale Anfangsgeschwindigkeit  $v_{x_0}$  des Geschosses, so daß man die Form der Geschoßbahn als durch die Fahrt nicht wesentlich abgeändert voraussetzen kann, wenn man nur die Seitenverschiebung des Geschosses durch die Fahrt berücksichtigt. Diese Verschiebung im Winkelmaß betrage  $\beta_2$ , so ist

$$\beta_2 = \frac{s}{v_{x_0}} = \text{Seitenverschiebung der Schußebene durch die Fahrt allein, bei Windstille.}$$

Im ganzen muß also die Schußebene, die bei ruhendem

Schiff und bei Windstille durch das Ziel ginge, um einen Winkel  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  nach rückwärts gedreht werden; dabei ist

$$\beta = w \cdot \left( \frac{T}{X} - \frac{1}{v_{x_0}} \right) + \frac{s}{v_{x_0}}; \quad (33)$$

hier ist  $X$  die horizontale Entfernung (m) des Ziels im Mündungshorizont,  $T$  die Flugzeit (sec);  $s$  (m/sec) die Fahrtgeschwindigkeit;  $v_{x_0}$  (m/sec) die Horizontalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses;  $w$  (m/sec) die Geschwindigkeit des wahren Winds, d. h. die Geschwindigkeit der Luftströmung bezüglich des Erdbodens. Der erste Teil in Gleichung (33), der vom wahren Wind herrührt, wird an der entsprechenden Seitenverschiebung ausgeschaltet; der zweite Teil  $\frac{s}{v_{x_0}}$ , der von der Fahrt allein herrührt, wird am Fahrtschieber ausgeschaltet.

Zweite Methode. Zu einer andern Verteilung der Gesamtverbesserung gelangt man, wenn man die Geschosßbahn nicht betrachtet bezüglich der Erde oder bezüglich der Luft, sondern bezüglich des fahrenden Schiffs. Bei diesem Verfahren denkt man sich das Deck des Schiffs beliebig ausgedehnt und als eine mit dem Schiff fest verbundene und mit ihm bewegliche Koordinatenebene und betrachtet alle Vorgänge der Art, wie sie sich in dem Raumsystem des fahrenden Schiffs abzuspielen scheinen. Bezüglich dieses Bezugssystems ist die Geschosßbahn die gleiche, wie sie ein von einem ruhenden Schiff aus abgefeuertes Geschosß gegenüber der Erde beschreiben würde, falls ein Wind gleich dem scheinbaren Wind weht (wahrer Wind minus Fahrtwind), also ein Wind, wie er auf dem fahrenden Schiff direkt gemessen wird, somit von der Geschwindigkeit  $w - s$  (m/sec). Danach ist in dem Bezugssystem des fahrenden Schiffs gemäß Gleichung (19) von § 48 die im Winkelmaß gemessene Seitenabweichung  $\beta_3$  durch den scheinbaren Wind:

$$\beta_3 = (w - s) \cdot \left( \frac{T}{X} - \frac{1}{v_{x_0}} \right).$$

Dazu kommt die Verbesserung  $\beta_4$  für die scheinbare Auswanderung des ruhenden Ziels; diese ist

$$\beta_4 = s \cdot \frac{T}{X}.$$

Die Gesamtverbesserung der Geschützrichtung ist somit  $\beta_3 + \beta_4$ . Diese ist ebenfalls nach rückwärts zu nehmen;  $\beta_4$  wird wieder am Fahrtschieber ausgeschaltet.

Man sieht leicht, daß das Resultat genau das obige ist; denn

$$\beta_3 + \beta_4 = (w - s) \cdot \left( \frac{T}{X} - \frac{1}{v_{x_0}} \right) + s \cdot \frac{T}{X} = w \cdot \left( \frac{T}{X} - \frac{1}{v_{x_0}} \right) + \frac{s}{v_{x_0}} = \beta.$$

Dieses zweite Verfahren bietet den Vorteil, daß es sich unmittelbar übertragen läßt auf den Fall, wo in beliebiger Richtung und bei beliebigem Wind aus einem bewegten Fahrzeug geschossen wird, und sogar auf den Fall, daß das Ziel selbst sich bewegt. Was den Wind betrifft, so erkennt man, daß der wahre Wind zu berücksichtigen ist, wenn man die durch die Fahrt bewirkte Verlegung des Treffpunkts auf der Erdoberfläche in Betracht ziehen will, daß dagegen die Wirkung des scheinbaren Winds kompensiert werden muß, wenn man die Ortsveränderung des Ziels, wie sie sich vom eigenen Fahrzeug aus gesehen darstellt, berücksichtigen will. Selbstverständlich kann auch der Bombenabwurf (§ 50) nach der zweiten Methode behandelt werden.

**§ 52. Ein Dampfer fährt auf einem Fluß. In der Luft bewegt sich ein Flugzeug, das bezüglich des Dampfers eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt. Wind weht schief zur Fahrtrichtung des Flugzeugs. Aus dem Flugzeug wird in schiefer Richtung geschossen.**

Dieses fingierte Beispiel ist lediglich dazu bestimmt, zu zeigen, daß und wie auch ein scheinbar verwickelter Fall von Relativbewegungen mit Hilfe des Geschwindigkeits- und Wegediagramms einfach behandelt werden kann. An eine praktische Verwendung der Theorie ist hier nicht gedacht.

In dem (rein schematischen) Geschwindigkeitsdiagramm *OABCDE* Abb. 74 stelle die Vertikalebene durch *OA* die Schußebene dar und nach Größe und Richtung sei *OA* die Horizontalkomponente  $v_0 \cos \varphi$  der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses bezüglich des Flugzeugs, wie wenn dieses in Ruhe wäre; *AB* die horizontale Geschwindigkeit des Flugzeugs bezüglich der

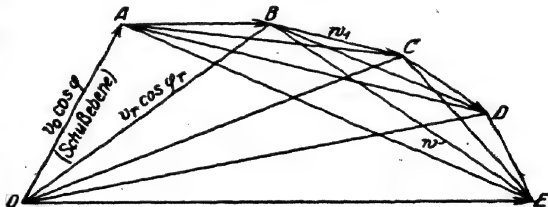


Abb. 74.

Luft; *BC* die horizontale Geschwindigkeit der Luftströmung bezüglich des Dampfers; *CD* die Geschwindigkeit des Dampfers bezüglich des Flusses; *DE* die Geschwindigkeit der Flußströmung bezüglich des Landes.

Folglich ist *CE* die Geschwindigkeit des Dampfers bezüglich des Landes; *BD* die Geschwindigkeit der Luft bezüglich des Flusses; *BE* diejenige der Luft bezüglich des Landes; *AC* die Geschwindigkeit des Flugzeugs bezüglich des Dampfers; *AD* dieselbe bezüglich des Flusses; *AE* dieselbe bezüglich des Landes; *OB* die Horizontal-



dem festgedachten Erdboden bewegt, so handelt es sich jetzt um die relative Bewegung des Geschosses gegenüber der Erde, die ihrerseits eine Eigenbewegung um die Erdachse besitzt. Dabei sieht man die Erdachse als fest im Raume an, da sich bisher ein Einfluß der Erdbewegung (bezüglich des Sonnensystemes), die mit einer Geschwindigkeit gleich dem 35-fachen der Anfangsgeschwindigkeit eines neueren Infanteriegeschosses vor sich geht, durch keinerlei rein irdische Erscheinungen nachweisen ließ.

Die qualitative Erklärung der hier in Betracht kommenden Abweichungen ist aus der Theorie der Passatwinde bekannt. Denkt man sich von einem Punkt  $O$  des Äquators aus nach Norden geschossen, so besitzt von vornherein das in  $O$  stehende Geschütz und folglich auch das Geschosß eine Geschwindigkeit nach Osten zu (etwa von derselben Größe wie die Anfangsgeschwindigkeit des Infanteriegeschosses M. 71; Äquatorumfang in Metern dividiert durch einen Tag in Sekunden ausgedrückt). Diese Geschwindigkeit nach Osten zu behält das Geschosß im luftleeren Raum vollständig und im luft erfüllten Raum nahezu bei, da die Atmosphäre mit der Erde rotiert. Nach einer gewissen Anzahl von Sekunden schlägt das Geschosß in einem weiter nördlich gelegenen Punkt  $O_1$  eines kleineren Parallelkreises auf, dessen Punkte eine geringere Geschwindigkeit nach Osten zu besitzen. Das Geschosß bleibt also nicht in der Meridianebene durch  $O$ , sondern eilt den entsprechenden Punkten des Meridians immer weiter nach Osten zu voraus; es entsteht im Auffallpunkt  $O_1$  eine Seitenabweichung nach Osten, also in der Schußrichtung gesehen nach rechts. Schießt man umgekehrt von dem Punkt  $O_1$  der nördlichen Halbkugel aus nach Süden, so bleibt das Geschosß, da es die östliche Geschwindigkeit von  $O_1$  besitzt, wegen dieser geringeren Geschwindigkeit immer weiter hinter den nach dem Äquator zu gelegenen Punkten des gleichen Meridians zurück, es weicht nach Westen, also für den Schützen wiederum nach rechts ab. Die entsprechende Überlegung ergibt für die südliche Halbkugel der Erde eine Linksabweichung. Außer diesen Abweichungen nach der Seite der Schußebene ergeben sich Änderungen der Schußweite, der Gipfelhöhe und der Flugzeit.

Was die quantitative Bestimmung der Geschosßabweichungen durch die Erdrotation anlangt, so ergibt die Rechnung für den luftleeren Raum zum Teil Abweichungen von mehreren hundert oder tausend Metern nach der Seite, weniger nach der Länge; im luft erfüllten Raum scheinen den bisherigen rechnerischen Ermittlungen zufolge (vgl. Lit.-Notè) diese Abweichungen von einer solchen Größe zu sein, daß diese Art von einseitigen Abweichungen in der Praxis fast nur bei Fernschießen berücksichtigt zu werden braucht.

Die experimentelle Ermittlung speziell der Seitenabweichungen durch Erdrotation dürfte auf große Schwierigkeiten stoßen; vorgeschlagen wurde z. B. das Verfahren, mit dem gleichen Geschütz auf der nördlichen und auf der südlichen Halbkugel zu schießen und die halbe Differenz der beobachteten Seitenabweichungen zu nehmen; ferner, mit Rechts- und mit Linksdrall zu schießen usw. Alle solche Versuche würden wegen sonstiger Einflüsse schwerlich zu einem greifbaren Ergebnis führen, lohnen auch wohl nicht die Mühe und die Kosten.

#### A. Theoretisches für den luftleeren Raum.

Man denke sich ein rechtwinkliges Koordinatensystem der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achsen, das mit der Erde fest verbunden ist und samt dieser mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$  der Erddrehung ( $n = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ sec}^{-1}$ ) um die Erdachse rotiert; als Anfangspunkt des Koordinatensystems gelte der Abgangspunkt  $O$  des Geschosses; als  $x$ -Achse die Tangente an den Parallelkreis, positiv nach Osten zu; die gleichfalls wagrechte  $y$ -Achse sei positiv nach Norden, die  $z$ -Achse positiv nach oben.

Zur Berechnung der Bewegung des Geschosses bezüglich dieses mit der Erde sich drehenden Koordinatensystems hat man zu den äußeren Kräften zwei Scheinkräfte hinzuzufügen: die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft.

Die Zentrifugalkraft ist gerichtet senkrecht zur Erdachse nach außen hin und hat die Größe  $m \cdot r \cdot n^2$ , wo  $m$  die Geschosßmasse und  $r$  die augenblickliche Entfernung des Geschosses von der Erdachse ist.

Die Corioliskraft ist der Größe nach gleich  $2 \cdot m \cdot v_p \cdot n$ . Dabei ist  $v_p$  diejenige Komponente der Bahngeschwindigkeit des Geschosses  $v$ , die man erhält, wenn man sich die Bahn und damit die Tangente in dem betreffenden Bahnpunkt projiziert denkt auf die Ebene des Parallelkreises. Die Richtung der Corioliskraft geht senkrecht zu dieser Tangentenprojektion und senkrecht zur Erdachse. Wenn man sich in dem betreffenden Bahnpunkt einen Beobachter parallel der Erdachse so stehend denkt, daß die Richtung Süd-Nord von den Füßen nach dem Kopfe geht und daß er in der Richtung der Geschwindigkeitskomponente  $v_p$  blickt, so weist die Corioliskraft für den Beobachter nach rechts. In den mittleren Breiten der nördlichen Halbkugel hat die Corioliskraft erstens eine Komponente senkrecht zur vertikalen Schußebene; und diese Komponente bewirkt die Rechtsabweichung. Zweitens eine Komponente innerhalb der vertikalen Schußebene; diese Komponente, die positiv oder negativ sein kann, hat eine Änderung der Schußweite zur Folge. Schießt man am Äquator unter irgendwelcher Erhöhung nach Norden,

so ist die Corioliskraft bis zum Gipfelpunkt der Bahn nach Westen gerichtet; hinter dem Gipfelpunkt nach Osten. Schießt man am Äquator senkrecht nach oben, so ist bei der Aufwärtsbewegung die Corioliskraft nach Westen, bei der Abwärtsbewegung nach Osten gerichtet.

Wenn man voraussetzt, daß die  $z$ -Achse die Lotrechte ist (die Schwere als Resultante aus Erdanziehung und Zentrifugalkraft); wenn ferner  $\gamma$  die geographische Breite bedeutet und die Koordinaten  $xyz$  als klein gegen den Erdradius  $R$  ( $R = 6370300$  m) vorausgesetzt werden, so sind, wie in der Mechanik gezeigt wird, die Bewegungsgleichungen des Geschosses

$$x'' = 2n \cdot \sin \gamma \cdot y' - 2n \cdot \cos \gamma \cdot z', \quad (1)$$

$$y'' = -2n \cdot \sin \gamma \cdot x', \quad (2)$$

$$z'' = 2n \cdot \cos \gamma \cdot x' - g. \quad (3)$$

Dabei bedeuten die Striche die Ableitungen nach der Zeit  $t$ .

Wenn dagegen die  $z$ -Achse die Richtung des Erdradius bedeutet,  $\gamma_0$  den Winkel zwischen Erdradius und Äquator und die Koordinaten  $xyz$  nicht notwendig gegen den Erdradius  $R$  vernachlässigt werden sollen, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$x'' = 2n \cdot \sin \gamma_0 \cdot y' - 2n \cdot \cos \gamma_0 \cdot z' - n^2 \cdot x, \quad (4)$$

$$y'' = -2n \cdot \sin \gamma_0 \cdot x' - n^2 \cdot \sin \gamma_0 \cdot \{z \cdot \cos \gamma_0 - y \cdot \sin \gamma_0 + R \cdot \cos \gamma_0\}, \quad (5)$$

$$z'' = 2n \cdot \cos \gamma_0 \cdot x' + g + n^2 \cdot \cos \gamma_0 \cdot \{z \cdot \cos \gamma_0 - y \cdot \sin \gamma_0 + R \cdot \cos \gamma_0\}. \quad (6)$$

Diese Gleichungssysteme lassen sich in aller Strenge lösen. Am einfachsten das System der Gleichungen (1) bis (3). Diese lassen eine erste Integration ohne weiteres zu. Bedeuten  $abc$  die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses in der Richtung der  $x$ -, bzw.  $y$ -, bzw.  $z$ -Achse, so ist

$$x' = 2n \cdot \sin \gamma \cdot y - 2n \cdot \cos \gamma \cdot z + a, \quad (7)$$

$$y' = -2n \cdot \sin \gamma \cdot x + b, \quad (8)$$

$$z' = 2n \cdot \cos \gamma \cdot x - g \cdot t + c. \quad (9)$$

Diese Werte von  $y'$  und  $z'$  in (1) eingesetzt gibt

$$x'' + 4n^2 \cdot x = 2n \cdot \cos \gamma \cdot g \cdot t + 2n \cdot \sin \gamma \cdot b - 2n \cdot \cos \gamma \cdot c. \quad (10)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zwischen  $x$  und  $t$  mit Störungsglied; sie läßt sich leicht integrieren, z. B. mit Hilfe der Methode der komplementären Funktion; die Integrationskonstanten ergeben sich dabei aus den Anfangsbedingungen (für  $t = 0$  ist  $x = 0$  und  $x' = a$ ). Damit kennt man  $x$  für jede Zeit  $t$ , folglich auch  $x'$  in Funktion von  $t$ , und folglich lassen sich auch  $y$  und  $z$  aus den Gleichungen (2) und (3) in Funktion von  $t$  gewinnen. Damit ist die



Lage ( $xyz$ ) des Geschosses zu jeder Zeit  $t$  bekannt. Das Ergebnis der Rechnung ist folgendes:

$$x = \frac{p}{2n} (1 - \cos 2nt) + \frac{q}{2n} \left( t - \frac{\sin 2nt}{2n} \right) + \frac{a}{2n} \sin 2nt, \quad (11)$$

$$y = b \cdot t - p \cdot \sin \gamma \cdot \left( t - \frac{\sin 2nt}{2n} \right) - q \cdot \sin \gamma \cdot \left( \frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2nt}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} \right) + \frac{a \sin \gamma}{2n} (\cos 2nt - 1), \quad (12)$$

$$z = c \cdot t - \frac{g t^2}{2} + p \cdot \cos \gamma \cdot \left( t - \frac{\sin 2nt}{2n} \right) + q \cdot \cos \gamma \cdot \left( \frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2nt}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} \right) - \frac{a \cdot \cos \gamma}{2n} (\cos 2nt - 1). \quad (13)$$

Dabei bedeuten:  $x, y, z$  die Koordinaten des Geschosses nach  $t$  sec, und zwar, mit dem  $+$ -Zeichen,  $x$  wagrecht nach Osten,  $y$  wagrecht nach Norden,  $z$  lotrecht nach oben; entsprechend  $a$  die Komponente der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  wagrecht nach Osten,  $b$  dieselbe nach Norden,  $c$  dieselbe lotrecht nach oben;  $+$   $\gamma$  die nördliche geographische Breite;  $n$  die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung,  $n = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ sec}^{-1}$ ;  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$ ;  $p$  und  $q$  die Abkürzungen:  $p = b \cdot \sin \gamma - c \cdot \cos \gamma$ ;  $q = g \cdot \cos \gamma$ . Meistens ist ferner genügend genau:

$$\frac{1 - \cos 2nt}{2n} = nt^2; \quad \frac{1 - \cos 2nt}{4n^2} = \frac{t^2}{2}; \quad \frac{2nt - \sin 2nt}{2n} = \frac{2}{3} n^2 t^3.$$

Zweckmäßiger benützt man die Lösung in der folgenden Form. Die Erdrotation bewirkt eine

Schußweitenvergrößerung (in m)

$$= \frac{4n \cdot v_0^2 \cos \gamma \cdot \sin \varphi}{3g^2} [4 \cos^2 \varphi - 1] \cdot \sin \psi, \quad (14)$$

Rechtsabweichung (in m)

$$= \frac{4n \cdot v_0^2}{3g} \sin^2 \varphi \cdot [3 \cos \varphi \cdot \sin \gamma + \sin \varphi \cos \gamma \cdot \cos \psi], \quad (15)$$

Flugzeitvergrößerung (in sec)

$$= 2T \cdot \cos \varphi \cdot \cos \gamma \cdot \sin \psi \cdot \frac{v_0 n}{g},$$

also

$$T = \frac{2 v_0 \sin \varphi}{g} \cdot \left( 1 + \frac{2}{g} v_0 \cdot n \cdot \cos \varphi \cdot \cos \gamma \cdot \sin \psi \right). \quad (16)$$

In diesen Gleichungen (14) bis (16) bedeutet auf der nördlichen Halbkugel:  $n$  wieder die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung;  $g = 9,81$ ;  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses (m/sec);  $\varphi$  den Abgangswinkel;  $\gamma$  die geographische Breite;  $\psi$  den Winkel,

den die Schußebene gegen die Richtung nach Süden bildet, wobei  $\psi$  positiv gemessen wird von Süden über Osten nach Norden und Westen; es ist somit für den Schuß nach Süden  $\psi = 0$ ; für den Schuß nach Osten  $\psi = 90^\circ$ ; für den Schuß nach Norden  $\psi = 180^\circ$ ; für den Schuß nach Westen  $\psi = 270^\circ$ . Auf der südlichen Halbkugel ist  $\gamma$  negativ zu nehmen.

Beispiele. 1. Beim Schuß nach Norden und am Äquator ( $\gamma = 0$ ) tritt Linksabweichung ein vom Betrag  $\frac{4}{3} \frac{n}{g^2} v_0^3 \sin^3 \varphi$ . Dies ergibt sich aus (11), indem man hat:  $a = 0$ ;  $p = -c = -v_0 \sin \varphi$ ;  $q = g$ , also  $x = -c \cdot n \cdot T^2 + g \frac{n T^3}{3}$  oder, da  $T = \frac{2 v_0}{g} \sin \varphi$  ist,  $x = -\frac{4}{3} \frac{n}{g^2} v_0^3 \sin^3 \varphi$ ; oder einfacher aus (15), wo  $\sin \gamma = 0$ ,  $\cos \gamma = 1$ ,  $\cos \psi = -1$  ist.

2. Schuß nach Süden unter der geographischen Breite  $\gamma = 45^\circ$  mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 1600$  m/sec und Abgangswinkel  $\varphi = 45^\circ$ . Wie groß ist die Seitenabweichung im Auffallpunkt?

Da  $\sin \varphi = \sin \gamma = \cos \varphi = \cos \gamma = 0,7071$ ;  $\psi = 0$  ist, so erhält man eine Rechtsabweichung von 4100 m.

### B. Allgemein, auch für den luftgefüllten Raum.

Die betreffende Flugbahnaufgabe sei zunächst ohne Rücksicht auf die Erdrotation, also in der gewöhnlichen Weise nach einer der Methoden der Abschnitte 4 bis 8, oder nach der graphischen Methode § 34 für den luftgefüllten Raum gelöst. Man kennt dann die Koordinaten der Flugbahn für irgendeine Zeit  $t$  unter dieser Voraussetzung; sie seien mit  $\xi, \eta, \zeta$  bezeichnet; z. B. wenn es sich um einen Schuß nach Osten zu handelt, bedeutet  $\xi$  dasselbe, was in Abschnitt 3 bis 8 mit  $x$  bezeichnet wurde, nämlich die jeweilige wagrechte Entfernung des Geschosses vom Abgangspunkt nach der Zeit  $t$ ,  $\zeta$  bedeutet die jeweilige Flughöhe,  $\eta$  die durch Geschosrotation erzeugte und für irgendein  $t$  berechnet gedachte Seitenabweichung, wobei  $\eta$  negativ sein wird, da die Geschosrotation (bei Rechtdrall) eine Rechtsabweichung mit sich bringt. Ferner mögen nunmehr  $x, y, z$  die Koordinaten des Geschosses zur Zeit  $t$  mit Rücksicht auf die Erdrotation und auf den Luftwiderstand bedeuten. Dann ist offenbar

$$x'' = 2 n \sin \gamma \cdot y' - 2 n \cos \gamma \cdot z' + \xi''(t); \quad (17)$$

$$y'' = -2 n \sin \gamma \cdot x' + \eta''(t); \quad (18)$$

$$z'' = 2 n \cos \gamma \cdot x' + \zeta''(t); \quad (19)$$

ebenso

$$x' = 2 n \sin \gamma \cdot y - 2 n \cos \gamma \cdot z + \xi'(t); \quad (20)$$

$$y' = -2 n \sin \gamma \cdot x + \eta'(t); \quad (21)$$

$$z' = 2 n \cos \gamma \cdot x + \zeta'(t). \quad (22)$$

Denn die Beschleunigungen  $x'', y'', z''$  setzen sich zusammen aus denen, die für die Geschoßbewegung im luftgefüllten Raum ohne Berücksichtigung der Erdumdrehung gelten, und denen, die für die Erdumdrehung allein bestehen, nämlich den rechten Seiten der Gleichungen (1) bis (3) nach Fortlassung des Anteils  $-g$  der Erdbeschleunigung.

Hier sind  $n$  und  $\gamma$  bekannte Konstanten und  $\xi \eta \zeta$  samt ihren Ableitungen nach der Zeit sind aus der erwähnten vorläufigen Lösung des Problems ohne Rücksicht auf die Drehung der Erde als bekannte Funktionen der Zeit anzusehen. Setzt man (21) und (22) in (17) ein, so erhält man

$$x'' + 4n^2 x = f(t), \quad (23)$$

wo  $f(t) = 2n \sin \gamma \cdot \eta'(t) - 2n \cos \gamma \cdot \zeta'(t) + \xi''(t)$  eine bekannte Funktion von  $t$  ist. Diese Differentialgleichung wird mittels der Methode der Variation der Konstanten und unter Zuhilfenahme des Integrals von Abdank-Abakanowitz mechanisch gelöst. Man erhält damit  $x$ , folglich auch  $x'$  in Funktion von  $t$ ; dann erhält man durch weitere mechanische Integration aus (18) und (19) auch  $y$  und  $z$  in Abhängigkeit von  $t$ , womit man die Lage ( $xyz$ ) des Geschosses unter dem Einfluß von Schwere, Luftwiderstand und Erdrotation für irgendeine Zeit kennt.

Es wird durch Integration von (23):

$$x = \frac{1}{2n} \sin 2nt \cdot \int_0^t f(t) \cdot \cos 2nt \cdot dt - \frac{1}{2n} \cos 2nt \cdot \int_0^t f(t) \sin 2nt \cdot dt,$$

oder mit Einsetzen des Wertes von  $f(t)$  und nach zweimaliger teilweiser Integration hat man folgendes Ergebnis:

#### Zusammenstellung.

$$x = \xi + \Delta x, \quad (I)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta x = & +2n \sin \gamma \cdot \sin 2nt \cdot \int_0^t \eta \cdot \sin 2nt \cdot dt + 2n \sin \gamma \cdot \cos 2nt \cdot \int_0^t \eta \cdot \cos 2nt \cdot dt \\ & - 2n \cos \gamma \cdot \sin 2nt \cdot \int_0^t \zeta \cdot \sin 2nt \cdot dt - 2n \cos \gamma \cdot \cos 2nt \cdot \int_0^t \zeta \cdot \cos 2nt \cdot dt \\ & - 2n \sin 2nt \cdot \int_0^t \xi \cdot \cos 2nt \cdot dt - 2n \cos 2nt \cdot \int_0^t \xi \cdot \sin 2nt \cdot dt, \end{aligned}$$

$$y = \eta + \Delta y, \quad (II)$$

wobei

$$\Delta y = -2n \sin \gamma \cdot \int_0^t x \cdot dt$$

(für  $x$  ist dabei der Ausdruck (I) eingesetzt zu denken);

$$z = \zeta + \Delta z, \quad (\text{III})$$

wobei

$$\Delta z = + 2 n \cos \gamma \cdot \int_0^t x \cdot dt$$

(für  $x$  ist dabei der Ausdruck (I) eingesetzt zu denken).

Die hier noch vorkommenden Integrale

$$\int \xi \cdot \frac{\sin}{\cos} 2 n t \cdot dt, \quad \int \eta \cdot \frac{\sin}{\cos} 2 n t \cdot dt, \quad \int \zeta \cdot \frac{\sin}{\cos} 2 n t \cdot dt$$

werden mit dem Integrappen ausgewertet. Eine bestimmte Luftwiderstandsfunktion ist bei diesem Verfahren, das der Verfasser seit 1909 benützt, um die durch die Erdrotation allein bewirkten Änderungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  der Koordinaten des Geschosses zur Zeit  $t$  zu berechnen, nicht vorausgesetzt.

Es leuchtet ein, daß diese Ausdrücke (I) bis (III) auch für den luftleeren Raum Gültigkeit haben; es bedeuten dann  $\xi \eta \zeta$  die Koordinaten des Geschosses in Funktion von  $t$  für den luftleeren Raum, (vgl. die Gleichungen (11), (12), (13) s. o.).

Beispiel (wie oben, aber mit Rücksicht auf den Luftwiderstand):

Ein Geschosß von 30,5 cm Kaliber, Gewicht 445 kg, Länge 3,5 Kal., Abwunderadius 2 Kal., Anfangsgeschwindigkeit 820 m/sec wird unter dem Abgangswinkel  $\varphi = 44^\circ$  nach Norden abgefeuert; geographische Breite des Abgangsortes  $\gamma = +54^\circ$ , Barometerstand am Boden 760 mm, Lufttemperatur  $15,5^\circ\text{C}$ , relative Luftfeuchtigkeit  $50\%$ ; Enddrallwinkel des Geschützes 25 Kal.

(Ohne Rücksicht auf die Drehung der Erde berechnet sich: im luftleeren Raum die Schußweite zu 68500 m, die Gipfelhöhe der Bahn zu 16500 m; im luftgefüllten Raum: Schußweite 33900 m, Gipfelabszisse 19400 m, Gipfelordinate 10980 m.)

Soll der Einfluß der Erdrotation (im luftgefüllten Raum) rechnerisch bestimmt werden, so bedeutet nach den obigen Festsetzungen über  $xyz\xi\eta\zeta$  im vorliegenden Fall eines Schusses nach Norden, falls  $t = T$  die gesamte Flugzeit vorstellt:  $\xi$  die Seitenabweichung durch Geschosßrotation im luftgefüllten Raum ohne Erddrehung,  $\eta$  die Schußweite ohne Erddrehung,  $\zeta$  die Flugbahnordinate ohne Rücksicht auf Erddrehung (also  $\zeta = 0$  am Ende der Bahn);  $x$  ist die gesamte Seitenabweichung durch Geschosßrotation und Erddrehung,  $y$  die Schußweite mit Rücksicht auf Erddrehung (und Luftwiderstand),  $z$  die Endordinate unter gleichen Umständen (also  $z = 0$  am Ende der Bahn).

Von diesen Größen wurden  $\eta$  und  $\zeta$  in Funktion von  $t$  nach Abschnitt 5, § 28 berechnet,  $\xi$  in Funktion von  $t$  mittels der Formel (vgl. § 59):

$$\xi = l \cdot v_0 \cdot \lg \Delta \cdot \frac{1}{l} \left( \varphi \cdot t - \int_0^t \vartheta \cdot dt \right).$$

Dabei ist  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit,  $\Delta$  der Enddrallwinkel,  $l$  die Geschosßlänge in Kal.,  $\vartheta$  der jeweilige Horizontalneigungswinkel der Bahntangente,  $l$  ein empirischer Faktor,  $l = 1,158$ . Damit fand sich:

$$\begin{aligned} \int_0^T \eta \cdot \sin 2 \pi t \cdot dt &= 15872; & \int_0^T \eta \cdot \cos 2 \pi t \cdot dt &= 1824000; \\ \int_0^T \zeta \cdot \sin 2 \pi t \cdot dt &= 4544; & \int_0^T \zeta \cdot \cos 2 \pi t \cdot dt &= 688000; \\ \int_0^T \xi \cdot \cos 2 \pi t \cdot dt &= 80720; & \int_0^T \xi \cdot \sin 2 \pi t \cdot dt &= 2264. \end{aligned}$$

Somit wird am Ende der Bahn:

$$\Delta x = 0,025 + 215,4 - 0,0053 - 59,0 - 0,160 - 0,33 = \text{rund} + 156 \text{ m.}$$

Ferner

$$\int_0^T x \cdot dt = 84282,$$

also

$$\Delta y = -9,96 = \text{rund} - 10 \text{ m.}$$

Also ist das Ergebnis: Durch die Erdrotation allein wird (bei diesem Abgangswinkel von  $44^\circ$ ) die Schußweite um 10 m verkürzt und eine Rechtsabweichung von 156 m bewirkt. Auch der letztere Betrag kann mit Rücksicht auf die Geschosßstreuungen und neben der durch Geschosßrotation bewirkten Rechtsabweichung mutmaßlich vernachlässigt werden; denn die letztere Rechtsabweichung berechnet sich, sehr unsicher, zu etwa 2000 m am Ende der Bahn. (Berechnung dieses Beispiels durch Oblt. Schatte.)

Anmerkung 1. S. D. Poisson benützt die obigen Bewegungsgleichungen für die Geschosßbewegung mit Rücksicht auf Luftwiderstand und Erdrotation unter Voraussetzung des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes, Verzögerung  $= c \cdot v^2 = c \left( \frac{ds}{dt} \right)^2$ ; d. h. er nimmt in (17) bis (19)

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= -c \cdot \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \cdot \frac{dx}{ds} = -c \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -c \cdot s' \cdot x'; \\ \eta'' &= -c \cdot s' \cdot y'; & \zeta'' &= -c \cdot s' \cdot z' - g, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

sucht jedoch die beiden Einflüsse des Luftwiderstandes und der Erdrotation gleichzeitig (statt wie oben nacheinander) zu berücksichtigen; dabei wird er auf Doppelintegrale geführt, für die sich nur Grenzen angeben lassen. Z. B. erhält er für eine Bombe von 51 kg Gewicht und 27 cm Kaliber mit  $\varphi = 45^\circ$  und  $v_0 = 120$  m/sec unter der Breite von Paris Rechtsabweichungen zwischen 0,9 und 1,2 m, dabei Wurfweite 1200 m. Bei einer Granate von 90 kg Gewicht und 33 cm Kaliber, mit  $\varphi = 45^\circ$  und einer Schußweite von 4000 m, erhält er (beim Schuß nach Osten) Rechtsabweichungen zwischen 5 und 10 m usw.

Anmerkung 2. St. Robert benützt ein Koordinatensystem der  $xyz$ , dessen  $x$ - und  $y$ -Achse in der Schußebene liegen, die  $x$ -Achse wagrecht und positiv in der Schußrichtung, die  $y$ -Achse lotrecht nach oben, die  $z$ -Achse positiv nach der rechten Seite der Schußebene. Die Schußebene selbst bilde mit dem Meridian, und zwar mit der Richtung nach Süden, einen Winkel  $\beta$ . Die betreffenden Gleichungen statt (1) bis (8) erhält man durch Drehung unserer bisherigen  $xy$ -Ebene um die Lotrechte und mit der erwähnten Bezeichnung der Koordinaten in der Form

$$x'' = -2n(\sin \gamma \cdot z' + \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot y'); \quad (19)$$

$$y'' = 2n \cos \gamma (\sin \beta \cdot x' - \cos \beta \cdot z') - g; \quad (20)$$

$$z'' = 2n(\sin \gamma \cdot x' + \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot y'). \quad (21)$$

Dies für den luftleeren Raum. Für den luftgefüllten Raum lauten die Gleichungen

$$x'' = -2n(z' \sin \gamma + y' \cos \gamma \sin \beta) + \xi''; \quad (22)$$

$$y'' = +2n \cos \gamma (x' \sin \beta - z' \cos \beta) + \eta''; \quad (23)$$

$$z'' = +2n(x' \sin \gamma + y' \cos \gamma \cos \beta) + \zeta''. \quad (24)$$

Dabei bedeuten  $\xi \eta \zeta$  die Koordinaten des Geschosses, wie sie in der früheren Weise ohne Rücksicht auf Erddrehung erhalten worden sind;  $\xi$  die wagrechte Entfernung,  $\eta$  die Flughöhe,  $\zeta$  die Seitenabweichung durch Geschosrotation. Die Integration gibt

$$x' = -2n \sin \gamma \cdot z - 2n \cos \gamma \sin \beta \cdot y + \xi'; \quad (25)$$

$$y' = 2n \cos \gamma \sin \beta \cdot x - 2n \cos \gamma \cos \beta \cdot z + \eta'; \quad (26)$$

$$z' = 2n \sin \gamma \cdot x + 2n \cos \gamma \cos \beta \cdot y + \zeta'. \quad (27)$$

Setzt man diese Werte von  $x' y' z'$  aus (25) bis (27) in (22) bis (24) ein und vernachlässigt dabei die mit  $n^2$  multiplizierten Glieder gegenüber denjenigen, die nur mit  $n$  behaftet sind (da  $n^2 = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\right)^2$  ist), so wird erhalten

$$x'' = -2n \sin \gamma \cdot \zeta' - 2n \cos \gamma \sin \beta \cdot \eta' + \xi'';$$

entsprechend die drei anderen Gleichungen; durch Integration

$$x = \xi - 2n \sin \gamma \cdot \int \zeta' \cdot dt - 2n \cos \gamma \sin \beta \cdot \int \eta' \cdot dt$$

und ebenso die drei übrigen.

In diesem Sinne hat N. Sabudski das Lösungsverfahren wieder aufgenommen und das Problem bis zu geschlossenen Formeln weitergeführt, wofür er bequeme Tabellen berechnete. Man könnte gegen diese Methode von St. Robert-Sabudski möglicherweise einwenden, daß erst nachzuweisen wäre, ob die Vernachlässigung der Glieder mit  $n^2$  gegenüber denen mit  $n$  von vornherein gestattet ist oder nicht. Denn ein solches Verfahren bedeutet, daß  $-2n \sin \gamma \cdot z$  und  $-2n \cos \gamma \sin \beta \cdot y$  gegenüber  $\xi'$ , ebenso  $2n \cos \gamma \sin \beta \cdot x$  und  $2n \cos \gamma \cos \beta \cdot z$  gegenüber  $\eta'$ , endlich  $2n \sin \gamma \cdot x$  und  $2n \cos \gamma \cos \beta \cdot y$  gegen  $\zeta'$  als genügend klein angenommen werden. Das vom Verfasser benützte Verfahren ist von jenen Vernachlässigungen frei; tatsächlich zeigt sich dann, daß für das berechnete Beispiel die beiden Verfahren ziemlich übereinstimmende Resultate liefern, so daß hierbei in der Tat von den erwähnten Tabellen Sabudski Gebrauch gemacht werden darf.

## § 54. Die regelmäßigen Seitenabweichungen der Infanteriegeschosse bei aufgestecktem Seitengewehr.

Seit langer Zeit wurde beobachtet, daß, wenn das Seitengewehr auf der rechten Seite des Laufs vorn aufgesteckt war, die Geschosse nach links abweichen. In den z. T. offiziellen Lehrbüchern der sieb-

ziger und achtziger Jahre des vorigen Jahrhunderts (Stacharowski, Neumann, Weygand, Hentsch) war dies als feststehende und allgemeine Tatsache aufgeführt (siehe Literaturnote), und es wurde nur noch nach der Erklärung dieser eigentümlichen Erscheinung gesucht.

Zunächst wurde die Linksabweichung damit erklärt, daß die aus der Laufmündung austretenden Pulvergase sich an der rechts befindlichen Seitengewehrklappe stauen und auf das vorbeifliegende Geschoß eine Rückwirkung nach links hin ausüben. Aber nachdem es sich gezeigt hatte, daß die Abweichung wegfiel, wenn ohne Seitengewehr an einer in gleichem Abstand rechts befindlichen Wand vorbeigeschossen wurde, und daß die Abweichung mitunter größer, nicht kleiner wurde, wenn man das Seitengewehr senkrecht zum Lauf befestigte, war dieser Erklärungsgrund als Hauptgrund hinfällig.

Längere Zeit, etwa 15 bis 18 Jahre, galt sodann der Rücklauf des Gewehrs und Seitengewehrs als eines einzigen starren Systems infolge der Reaktion des Gasdrucks und die Drehung dieses Systems um den rechts von der Seelenachse liegenden Gesamtschwerpunkt als Hauptgrund der Erscheinung. Eine mathematische Behandlung auf Grund der diesbezüglichen mechanischen Vorstellung wurde 1885 vom Verfasser und 1888 in einfacherer Weise, nämlich mit Hilfe des Flächensatzes, von F. Kötter durchgeführt. Allein später wurden dem Verfasser Tatsachen bekannt, die sich mit der genannten zweiten Erklärungsweise nicht vereinbaren lassen: die Erscheinung der Linksabweichung bei Seitengewehr rechts oder der Rechtsabweichung bei Seitengewehr links ist keine völlig allgemeine, sondern nur an die Mehrzahl der Gewehre desselben Systems oder an gewisse Systeme von Gewehren gebunden, nämlich von deutschen Gewehrssystemen insbesondere an das Zündnadelgewehr und an M. 71 und M. 71/84. Über österreichische Gewehre berichtet A. Ch. Minarelli-Fitzgerald, daß bei Gewehren desselben Systems, mit Seitengewehr links, teils Rechts-, teils Linksabweichungen beobachtet wurden. Gleiches fand sich beim deutschen Gewehr M. 88 (Seitengewehr rechts, am Mantel des Laufs befestigt). Wurde ferner ein Gewehr M. 71 am Rücklauf verhindert und war das Seitengewehr nicht rechts, sondern unten befestigt, so blieb eine Linksabweichung, während nach jener zweiten Erklärungsweise zu erwarten gewesen wäre, daß die Abweichung wegfällt.

So mußte nach einer dritten Erklärungsweise, nach einem weiteren Einfluß gesucht werden. Dieser Einfluß liegt in den elastischen Deformationen, in den beginnenden Transversalschwingungen des Laufs (vgl. Band III). Die Schwingungen eines Gewehrlaufs M. 71 wurden 1901 von K. R. Koch und dem Verfasser (wie früher

1899 in lotrechter Richtung, so nunmehr in wagrechter Richtung) mit photographischen Methoden untersucht (vgl. Lit.-Note). Es ergab sich dabei folgendes:

Sofort nach der Explosion beginnt der Lauf transversal zu schwingen, im Grundton und in den Obertönen. Hierbei geht die Mündung nach oben und unten und gleichzeitig nach links und rechts, die Mündung führt also elliptische Schwingungen aus. Was allein die horizontalen Schwingungen betrifft, so bewegt sich die Mündung zunächst nach links, dann durch die Gleichgewichtslage hindurch nach rechts usw. Das Geschöß tritt aus dem Lauf aus, wenn sich die Mündung schon etwas rechts befindet (der Moment des Geschößaustrittes wurde stets durch Funkenphotographie markiert). Dieser Verbiegung der Mündungsteile entsprechend saß der Schuß etwas rechts.

So verhielt sich der Lauf, wenn ohne Seitengewehr geschossen wurde. Wenn nun das Seitengewehr aufgesteckt wurde, so verlangsamten sich naturgemäß die Schwingungen, da jetzt die schwingende Masse eine größere war, und es war somit zu vermuten, daß das vordere Laufende noch nach links verbogen sei, während das Geschöß die Mündung passiert. In der Tat zeigt die photographische Aufnahme beides: die Verlangsamung der Schwingungen und die Deformation des Mündungsteils nach links in jenem Moment. Für die Abgangsrichtung des Geschosses — ob nach rechts oder nach links — erwies sich bei diesen horizontalen Schwingungen der zweite Oberton maßgebend (kombiniert mit dem ersten bzw. dritten Oberton); seine Schwingungsdauer betrug ohne Seitengewehr etwa 0,0016 sec, mit Seitengewehr 0,0036 sec. Der Schuß schlug, entsprechend der Deformation des Laufendes und entsprechend der Schwingungsphase, auf der linken Seite ein.

Die Erklärung der fraglichen Erscheinung liegt somit kurz gesagt darin, daß die elastischen Deformationen des Laufes, die beginnenden Transversalschwingungen, durch die angehängte Seitengewehrmasse abgeändert werden. Eine Bestätigung dieser Erklärungsweise war dadurch gegeben, daß gewisse Erscheinungen damit vorhergesagt werden konnten: durch allmähliche Verringerung der Pulverladung bei sonst gleichen Umständen ließ sich erzielen, daß bei demselben Gewehrexemplar M. 71 mit Seitengewehr rechts das Geschöß in immer späteren Schwingungsphasen des zweiten Obertons aus der Mündung austrat, und daß somit abwechselnd Links- und Rechtsschuß erfolgte. Die verschiedenen Gewehrexemplare desselben Systems zeigten sich übrigens auch in dieser Hinsicht etwas verschieden.



## § 55. Einseitige Abweichungen durch Geschoßrotationen.

### Abweichungen kugelförmiger Geschosse.

Bei den früheren kugelförmigen Geschossen waren die hierher gehörigen Abweichungen lange Zeit zufällige, veranlaßt durch regellose Rotation der Kugeln. Diese Rotationen hatten ihre Ursache darin, daß immer etwas Spielraum zwischen Kugel und Rohrwandung blieb und daß die Kugeln einmal oder mehrmals innerhalb des Rohres an der Wandung reflektierten oder darin, daß die Pulvergase z. T. neben der Kugel sich herausdrängten und wegen des dadurch bewirkten einseitigen Drucks die Kugel ins Rollen brachten.

Um die Rotationen der Kugel zu im voraus bestimmbar zu machen und damit die Abweichungen zu einseitigen, konstanten zu machen, wurden von etwa 1830 ab eine Zeitlang exzentrische Kugeln benützt. Wurde eine solche Kugel z. B. mit „Schwerpunkt unten“ in das Rohr gelegt und abgefeuert, so drehte sich, wenigstens anfangs, die Kugel um eine wagrechte Achse von oben über vorn nach unten (da die Resultante der Pulvergasdrücke nach dem geometrischen Mittelpunkt der Kugel gerichtet war, der oberhalb des Schwerpunktes lag, und da der Pulvergasdruck den Luftwiderstand bei weitem überwog); dann aber erfolgte eine Abweichung des Schwerpunktes der Kugel nach unten, eine Verkürzung der Flugbahn und meist eine Vergrößerung des Einfallwinkels. Mit „Schwerpunkt oben“ erfuhr die Kugel eine Abweichung nach oben und damit, bei Abgangswinkeln unter  $45^\circ$ , eine Verlängerung der Flugbahn, dagegen bei sehr großen Abgangswinkeln eine Verkürzung der Schußweite.

In einem extremen Fall, den Heim 1840 beobachtete, erfolgte sogar ein Aufschlagen der Kugel hinter dem Mörser (s. Abbildung 76).

Einige Versuchsreihen sind hier angeführt:

1. Versuche zu Metz 1839, ausgeführt von Didion, Morin und Piobert (Kaliber 22 cm; Abgangswinkel  $4^\circ 6'$ ; Exzentrizität 0,0015 m bis 0,0020 m):

Pulvergewicht	Kugelgewicht	Normale Schußweite ohne Exzentrizität	Schußweite mit Exzentrizität	
			Schwerpunkt anfangs unten	Schwerpunkt anfangs oben
1,5 kg	26,6 kg	708 m	(keine Exzentrizität, also 708 m)	
1,5 "	29,9 "	708 "	518	950, dabei 8,6 Touren pro sec
1,5 "	27,9 "	708 "	548	941, " 8 " " "
1,5 "	26,6 "	869 "	(keine Exzentrizität, also 869 m)	
1,5 "	29,9 "	869 "	712	1163, dabei 8,6 Touren pro sec
1,5 "	27,9 "	869 "	731	1009, " 8 " " "
3 "	26,6 "	1170 "	(keine Exzentrizität, also 1170 m)	
3 "	29,9 "	1170 "	1072	1557, dabei 8,6 Touren pro sec
3 "	27,9 "	1170 "	1117	1320, " 8 " " "

Dabei beträgt für die Kugel von 27,9 kg die hebende Kraft „Schwerpunkt oben“ etwa 7,1 kg.

2. Versuche von Heim, Ulm 1840, mit exzentrischen Granaten aus dem zehnpfündigen Mörser (S. 330).

3. Versuche von Heim mit exzentrischen Granaten aus der zehnpfündigen Haubitze (S. 331).

[„Die Entfernungen sind in Schritten zu 2,75 württ. Fuß angegeben. Mittlere Seitenabweichung ist der durch die Zahl der Würfe dividierte Unterschied zwischen der Summe der Abweichungen nach der einen und der Summe der Abweichungen nach der anderen Seite.

Breite des Raumes der Seitenabweichungen die Summe der größten Abweichung nach der einen und jener nach der andern Seite, wenn die Geschosse nach beiden Seiten, und der Unterschied zwischen der größten und kleinsten Abweichung, wenn sie nur nach einer Seite abwichen“, Bemerkungen von Heim.]

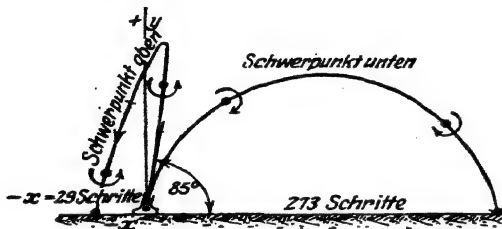


Abb. 76.

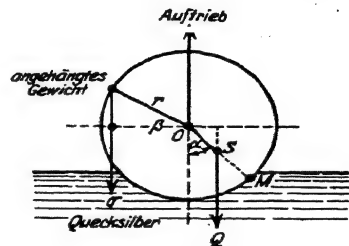


Abb. 77.

Das Nichtzusammenfallen von Schwerpunkt und Kugelmittelpunkt wurde durch Aushöhlungen bewirkt. Die Lage des Schwerpunkts innerhalb der Kugel ergab sich sodann durch zwei Versuche. Erstens ließ man die Kugel auf Quecksilber schwimmen und bezeichnete sodann den Punkt, der am höchsten lag; dessen Verbindungslinie mit dem Kugelmittelpunkt gab verlängert denjenigen Durchmesser an, auf welchem der Schwerpunkt lag; damit konnte man die Richtung von  $OSM$ . Um ferner den Abstand  $OS$  zwischen Kugelmittelpunkt  $O$  und Schwerpunkt  $S$  oder die speziell so genannte Exzentrizität  $x$  zu finden, hängte man an einer bestimmten Stelle der Oberfläche ein Gewicht  $q$  an und beobachtete die neue Gleichgewichtslage (vgl. Abbildung 77); die drei Kräfte: Gewicht  $q$  der angehängten Masse, Auftrieb und Gewicht  $Q$  der Kugel allein (im Schwerpunkt  $S$  vereinigt gedacht) hielten sich dann das Gleichgewicht; man maß die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  und hatte die Momentengleichung

$$q \cdot r \cdot \cos \beta = Q \cdot x \cdot \sin \alpha,$$

woraus die Größe  $x$  der Exzentrizität erhalten wurde.

Die Rotationsgeschwindigkeit bestimmte man entweder durch Berechnung aus Gas- und Atmosphärendruck oder sicherer durch Messung: in einer kleinen Entfernung von der Mündung wurde eine Scheibe aufgestellt; Marken, die an der Kugel angebracht waren, zeichneten sich beim Durchgang der Kugel durch die Scheibe ab, so daß man wußte, welche Stelle der Kugel während des Durchgangs sich gerade oben befand; z. B. fand man bei Kugeln von 15 cm Kaliber und bei 0,5 kg Pulverladung, daß die Kugel anfangs 18,8 Touren pro Sekunde machte; dies ist eine am Umfang gemessene Geschwindigkeit der Rotation von 5 m/sec, gleich  $\frac{1}{52}$  der Translationsgeschwindigkeit.

Ladung in Loten	Erhöhung des Geschützes in Graden	Lage des Geschosses im Rohre	Anzahl der Würfe	Mittlere Wurfweite	Unterschied zwischen der größten und kleinsten Wurfweite	Mittlere Seitenabweichung	Breite des Raums der Seitenabweichung	Zahl der nach jeder Seite abgewichenen Geschosse
12	35	Schwerp. oben	10	622	126	1,2 rechts	22	{ 6 rechts 4 links
12	35	Schwerp. unten	10	517,5	91	5,9 links	25	{ 2 rechts 8 links
12	35	Schwerp. rechts	10	561,5	126	41,2 rechts	18	10 rechts
12	55	Schwerp. oben	10	540	73	18,9 links	38	10 links
12	55	Schwerp. unten	10	523	59	13,3 links	38	{ 1 rechts 9 links
12	55	Schwerp. rechts	3	538	57	56,3 rechts	24	3 rechts
12	55	Schwerp. links	7	529	106	40,9 links	30	7 links
12	20	Schwerp. oben	10	393	81	1,5 links	5	{ 6 links 4 ohne Abweichung
12	20	Schwerp. unten	10	311	72	3,4 links	11	{ 2 rechts 8 links
12	70	Schwerp. oben	10	322	61	4,1 links	46	{ 4 rechts 5 links 1 ohne Abweichung
12	70	Schwerp. unten	10	369	60	1,3 links	36	{ 3 rechts 6 links 1 ohne Abweichung
24	80	Schwerp. oben	3	132	64	14,3 links	83	{ 1 rechts 2 links
24	80	Schwerp. unten	5	611	113	23,8 rechts	102	{ 4 rechts 1 links
24	80	Schwerp. rechts	1	375		258 rechts		
24	85	Schwerp. oben	3	29,3 negativ oder rückwärts	68	21 rechts	85	{ 2 rechts 1 links
24	85	Schwerp. unten	2	473	14	7,5 rechts	3	2 rechts
24	85	Schwerp. rechts	1	255		306 rechts		

Ladung in Pfund	Erhöhung des Geschützes in Graden	Lage des Geschosses im Rohre	Anzahl der Würfe	Mittlere Wurfweite	Unterschied zwischen der größten und kleinsten Wurfweite	Mittlere Seitenabweichung	Breite des Raums der Seitenabweichung	Zahl der nach jeder Seite abgewichenen Geschosse
$\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	Schwerp. vorn	10	717	266	0,7 links	21	$\begin{cases} 4 \text{ rechts} \\ 6 \text{ links} \end{cases}$
$\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	Schwerp. hinten	10	720	154	2,1 links	26	$\begin{cases} 3 \text{ rechts} \\ 6 \text{ links} \\ 1 \text{ ohne Ab-} \\ \text{weichung} \end{cases}$
$\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	Schwerp. oben	10	907	223	7,6 links	24	$\begin{cases} 1 \text{ rechts} \\ 9 \text{ links} \end{cases}$
$\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	Schwerp. unten	10	568	71	1 links	19	$\begin{cases} 3 \text{ rechts} \\ 7 \text{ links} \end{cases}$
$\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	Schwerp. rechts	5	646	114	38 rechts	18	5 rechts
$\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	Schwerp. links	5	613	78	30 links	11	5 links
$\frac{5}{4}$	10	Schwerp. hinten	10	1323	543	9 links	92	$\begin{cases} 5 \text{ rechts} \\ 5 \text{ links} \end{cases}$
$\frac{5}{4}$	10	Schwerp. oben	11	2316	244	15,9 rechts	173	$\begin{cases} 6 \text{ rechts} \\ 5 \text{ links} \end{cases}$
$\frac{5}{4}$	10	Schwerp. unten	10	1055	84	2 links	21	$\begin{cases} 4 \text{ rechts} \\ 6 \text{ links} \end{cases}$
$\frac{5}{4}$	10	Schwerp. links	10	1424	92	133,8 links	39	10 links

Die Erklärung der durch Rotationen bewirkten Geschößabweichungen beschäftigte seit Mitte des 18. Jahrhunderts die Ballistiker, zumal nachdem 1794 die Berliner Akademie eine diesbezügliche Preisaufgabe gestellt hatte. Zu nennen sind die Namen: Robins 1742 (die Rotation soll die Richtung des Luftwiderstandes abändern), Euler 1745 (mangelhafte Rundung der Geschosse soll der Grund sein, vielleicht dachte Euler schon an die Kreiselwirkung), Lombard 1783 (ähnlich wie später Poisson), Rhode 1795 (er suchte die Ursache in der Treibkraft des brennenden Zündsatzes), Hutton 1812, Gassendi 1819, Paixhans 1822, Terquem 1826, Neumann (die „Zentrifugalkraft des Geschosses“ sollte die Abweichung bewirken), Timmerhans 1841 (er folgert wenigstens richtig, daß der Grund der Abweichung außerhalb des Rohres liegen müsse, weil die Abweichung rascher als proportional mit der Entfernung von der Mündung wächst); Didion 1841 und Otto 1843 kamen der richtigen Erklärung sehr nahe. Z. B. Otto bemerkt: „Von je zwei Flächenelementen A und B, die beide gleich weit von dem in der Flugrichtung lie-

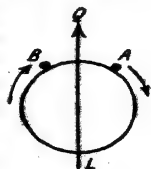


Abb. 78.

genden Durchmesser  $LQ$  abstehen, hat vor demjenigen  $B$ , dessen Geschwindigkeit durch die Umdrehung vergrößert wird, eine größere Verdichtung der Luft statt als vor demjenigen  $A$ , dessen Geschwindigkeit durch die Umdrehung vermindert wird.“ Otto hätte nur noch die der Kugel adhärierende Luftschicht herbeiziehen müssen, um endgültig das Problem für kugelförmige Geschosse gelöst zu haben.

In Betracht kommen wesentlich die Erklärungsweisen von Poisson 1839 und Magnus 1852:

S. D. Poisson ging rein rechnerisch vor; er berechnete zunächst den Einfluß der Erdrotation, von dem er nachwies, daß er zur Erklärung der großen Abweichung nicht genüge. Ferner zog Poisson den Einfluß der Verschiedenheiten der Luftdichten am Geschosß in Betracht: die Kugel rotiere z. B. um eine wagrechte Achse von oben über vorn nach unten. Dann ist auf der Vorderseite die Luftdichte eine größere als auf der Rückseite der Kugel; somit ist, schloß er, auch die Reibung zwischen Kugel und Luft vorn größer als hinten. Infolgedessen muß die Kugel in die Höhe gehen, wie eine gleichsinnig rotierende Kugel, gegen deren Vorderseite ein rauhes Polster gedrückt wird, an dem Polster aufwärts zu rollen sucht. (Ähnliche Wirkungen nimmt man bekanntlich bei Kegelskugeln, Billardkugeln usw. häufig wahr.) Diese Wirkung sei kurz als „Poisson-effekt“ oder als „Polsterwirkung“ bezeichnet.

Schon Poisson selbst und nach ihm eingehend J. P. G. v. Heim berechneten, allerdings auf Grund von unzureichenden Erfahrungen über den Einfluß der Luftdichte auf die Luftreibung, daß diese Wirkung des tangentiellen Luftwiderstands nur äußerst klein sein und die tatsächlichen Abweichungen ihrer Größe nach nicht erklären könne. (Dazu sei bemerkt, daß das Newton-Maxwellsche Gesetz über die Unabhängigkeit der Luftreibung von der Dichte nur im Intervall einer Atmosphäre experimentell bestätigt worden ist; bei Vergrößerung der Dichte und Erhöhung der Temperatur scheint die Reibung zuzunehmen). Übrigens stimmt der Sinn der Einwirkung nicht, denn in dem betrachteten Fall einer Kugel, die um eine wagrechte Achse von oben über vorn nach unten rotiert, geht die Kugel (siehe oben exzentrische Geschosse) beim Schuß tatsächlich nicht nach oben, sondern nach unten. Auch den Einfluß einer mangelhaften Rundung des Geschosses suchte Poisson in Rechnung zu ziehen.

Eine befriedigende Erklärung gab zuerst 1852 der bekannte Physiker G. Magnus auf Grund von Experimenten mit einem rotierenden Zylinder, gegen den ein Luftstrom geblasen wurde (vgl. Abb. 79):

Die Kugel bewege sich in ruhender Luft wagrecht vorwärts, etwa von links nach rechts, oder umgekehrt ruhe der Schwerpunkt

der Kugel, und dieser entgegen ströme die Luft von rechts nach links heran. Die Kugel möge sich dabei in Rotationsbewegung befinden, z. B. rotiere sie um eine wagrechte Achse durch den fest gedachten Schwerpunkt von oben über vorn (rechts) nach unten. Nun bewegt sich die an der Kugel adhärierende und mit ihr rotierende Luft unterhalb bei *C* in gleichem Sinn wie die gegen die Kugel heranströmende Luft, oberhalb bei *B* dieser entgegen. Somit entsteht nach den hydrodynamischen Gesetzen oben Vergrößerung, unten Verminderung des Luftdrucks. [Daß in der Tat bei *B* eine Luftdruckvergrößerung, bei *C* eine Luftdruckverminderung eintritt, läßt sich durch Windfahnen *A* und *D* erkennen; die Fahne *A* bewegt sich von der Kugel weg, *D* nach der Kugel hin. Bei *B* stoßen die beiden Luftströmungen aufeinander, die Luftteilchen weichen zur Seite aus und erzeugen in der Nachbarschaft eine Vermehrung des Drucks. Bei *C* geht eine raschere Luftströmung über eine langsamere

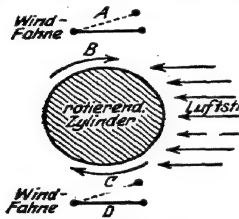


Abb. 79.

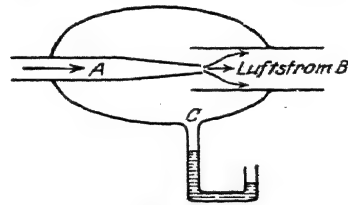


Abb. 80.

hinweg, es entsteht ein negativer Druck, ähnlich wie bei einem Zerstäuber (s. Abb. 80) bei *C* eine Druckverminderung durch den Luftstrom *AB* entsteht.] Die Folge ist ein Überdruck von oben nach unten, eine Abweichung des Schwerpunkts der Kugel von oben nach unten, wie wenn das Gewicht der Kugel vermehrt würde.

Das Ergebnis wird also sein: Abweichung nach unten (bzw. oben), wenn die Kugel um eine wagrechte Achse von oben über vorn (bzw. hinten) nach unten rotiert, und Abweichung nach rechts (bzw. links), wenn die Rotation der Kugel um eine lotrechte Achse von links über vorn (bzw. hinten) nach rechts erfolgt.

In etwas anderer Weise hat F. W. Lanchester (England) den Vorgang beschrieben. Er nimmt die Unstetigkeitsfläche zu Hilfe, die sich hinter der fliegenden Kugel erstreckt. Diese Fläche wird durch die mit der Kugel rotierende Luft gedreht. Über die näheren Einzelheiten vergleiche man die Arbeit selbst (s. Lit.-Note). Den quantitativen Ausdruck für diese Wirkung der adhärierenden Luft gewinnt man jetzt durch Überlagerung einer Zirkularbewegung der Luft, die

zur Folge hat, daß der Staupunkt, in dem die Luftgeschwindigkeit Null ist, verschoben wird (in der Abbildung nach oben); man erhält dann das Resultat, daß die auf den rotierenden Körper ausgeübte seitliche Kraft proportional der Querschnittsfläche, der Luftdichte, der Translations- und Rotationsgeschwindigkeit ist.

Eine rechnerische Theorie der Abweichung von Kugeln auf Grund dieses Einflusses der adhärierenden Luft („Magnuseffekts“) wurde schon von Hélié und besonders von Tait begonnen. Letzterer ging von den entsprechenden Abweichungen des Golf- oder Tennisballes aus und setzte die ablenkende Kraft proportional dem Produkt aus der Translationsgeschwindigkeit  $v$  und der Rotationsgeschwindigkeit, welche letztere als konstant behandelt wird. Die ablenkende Kraft setzt er alsdann proportional  $v$ ; und bei Rotation der Kugel z. B. um eine wagrechte Achse von oben über hinten nach unten, habe man in der Rechnung einfach  $g$  durch  $g - \mu v$  zu ersetzen, was übrigens schon Didion andeutete. Die Rechnung zeigt, daß man bei einer solchen Rotation eine Bahn erhält, die in der Nähe des Anfangs- und Endpunktes konkav von oben gesehen verläuft. Es ist sogar nicht ausgeschlossen, daß die Kurve eine nach oben gerichtete Spitze erhält. (Über die näheren Einzelheiten und die Literatur vergleiche das Referat von G. W. Walker über Spiel und Sport in der Encyclopädie der math. Wiss., Bd. IV 9, Nr. 2 c.)

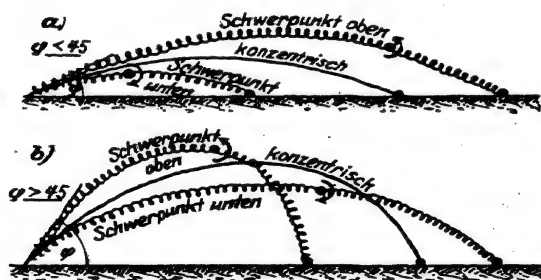


Abb. 81.

Encyclopädie der math. Wiss., Bd. IV 9, Nr. 2 c.)

Tait stellte auch Versuche mit rotierenden Holzkugeln an, die an Drähten hingen. Oberst Ludwig konstruierte 1853 eine Wurfmaschine, mittels deren der Einfluß der Rotation von Kugeln auf die Gestaltung der Flugbahn (s. Abb. 81) demonstriert werden konnte.

## § 56. Abweichungen der rotierenden Langgeschosse. Erfahrungstatsachen.

Das Bestreben, durch Vergrößerung der Geschößmasse ohne gleichzeitige Vergrößerung des Geschößkalibers mächtigere Wirkungen zu erzielen, führte auf die systematische Verwendung von Langgeschossen, und diese wieder, wegen der Notwendigkeit, den Geschossen Stabilität beim Flug in der Luft zu geben, auf die Anbringung von Schraubenzügen im Rohr, wodurch das Geschöß eine mehr oder

weniger rasche Rotation um die Längsachse erhält. (Es scheint übrigens, daß schon vor Einführung der Feuerwaffen den Wurfspeeren und Armbrustbolzen aus gleichem Grunde mitunter eine Rotation um die Längsachse erteilt wurde.)

Auch bei rotierenden Langgeschossen gibt es Abweichungen von bestimmtem Sinn, die nur durch die Geschoßrotation erzeugt sind, und zwar Abweichungen sowohl in der Schußebene als auch senkrecht dazu. Die letzteren als die wichtigsten sollen im folgenden des näheren besprochen werden.

Bei rechtsgewundenen Schraubenzügen im Rohr, bei „Rechtsdrall“, erfolgen sie im allgemeinen nach rechts, bei Linksdrall (z. B. italienisches Feldgeschütz) nach links. Sie wachsen stärker als proportional der Entfernung des Geschosses von der Mündung; die Flugbahn ist daher eine doppelt gekrümmte Kurve, die bei Rechtsdrall — wenigstens im großen ganzen und abgesehen von besonderen Umständen — rechts von der Schußebene verläuft, und deren Horizontalprojektion im allgemeinen, von der Schußebene aus gesehen, konvex gekrümmt ist. Diese Seitenabweichungen, die verhältnismäßig groß sind, werden bekanntlich in der artilleristischen Praxis durch eine entsprechende Einstellung der Seitenrichtung oder automatisch durch Schrägstellung des ganzen Aufsatzes ausgeschaltet.

Was die absolute Größe der Seitenabweichungen betrifft, so mögen zunächst für die untere Winkelgruppe, nämlich für Abgangswinkel zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$ , einige Zahlenwerte angegeben werden, speziell solche, die mit französischen Geschützen erhalten wurden.

Nach Hélie (vgl. Lit.-Note) wurden aus einer französischen 16 cm-Kanone vom Kaliber 162,3 mm und dem End-Drallwinkel  $6^\circ 30'$  im Jahr 1860 Ogivalgeschosse von 30,4 kg Gewicht, der Geschoßlänge 371 mm und dem halben Öffnungswinkel  $\gamma$  der ogivalen Spitze von  $\gamma = 41^\circ 51'$  verfeuert. Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  betrug 334 m/sec, der Abgangsfehlerwinkel  $12'$ . In der folgenden Tabelle sind die Schußweiten  $X(m)$ , die Abgangswinkel  $\varphi$ , die durch die Geschoßrotation erzeugten Seitenabweichungen  $Z(m)$  und die Schußzahlen  $n$  gegeben.

Schußweite $X(m)$	Abgangswinkel $\varphi$	Seitenabweichung $Z(m)$	Schußzahl $n$
1806	$5^\circ 24' 18''$	7,2	70
3108	$10^\circ 17' 43''$	29,0	90
5688	$25^\circ 12' 0''$	182,0	80
6579	$35^\circ 12' 0''$	324,5	60

Daß die Seitenabweichungen rascher wachsen, als die Schußweiten, also daß die Flugbahn eine doppelt gekrümmte Kurve ist,



ersieht man weiterhin aus der folgenden Tabelle für die Seitenabweichungen  $Z$  bei dem französischen Feldgeschütz M. 1897; dabei Kaliber 75 mm; konstanter Drallwinkel  $7^\circ$ ; Höchstgasdruck 2400 kg/qcm; Gewicht des Schrapnells 7,24 kg; Geschosßlänge 290 mm; Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 529$  m/sec; Abgangsfehlerwinkel  $+7'$ ; Rechtsdrall.

Schußweite $X$ (m)	Abgangs- winkel $\varphi$	Rechts- abweichung $Z$ (m)	Schußweite $X$ (m)	Abgangs- winkel $\varphi$	Rechts- abweichung $Z$ (m)
1000	$1^\circ 6'$	0,4	6000	$14^\circ 3'$	54,0
2000	$2^\circ 43'$	2,2	7000	$18^\circ 50'$	95,0
3000	$4^\circ 46'$	6,5	8000	$25^\circ 53'$	172,9
4000	$7^\circ 16'$	14,9	8500	$32^\circ 41'$	264,3
5000	$10^\circ 19'$	29,3			

Die Erfahrungen haben gezeigt, daß unter je sonst gleichen Umständen die Seitenabweichung  $Z$  im Mündungshorizont um so größer ist, je größer das Kaliber, je kleiner das Geschosßgewicht, je größer der End-Drallwinkel, je größer die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, je größer der Abgangswinkel und je stumpfer die Geschosßspitze ist. Dies gilt jedoch bezüglich des Abgangswinkels nur bis zu einer gewissen Grenze, von der nachher die Rede sein soll.

Auch bei Infanteriegeschossen, die aus gezogenen Gewehren verfeuert werden, muß eine Seitenabweichung infolge von Geschosßrotation vorhanden sein. Bei den gewöhnlich angewendeten kleinen Abgangswinkeln ist sie allerdings nur schwer nachzuweisen und wird leicht durch die natürliche Geschosßstreuung verdeckt werden. Die kleine Masse des Gewehrgeschosses folgt den unkontrollierbaren störenden Einflüssen, die an der Mündung der Waffe und bei dem Flug des Geschosses durch die Luft sich geltend machen, verhältnismäßig leichter als die große Masse des Artilleriegeschosses. Zudem handelt es sich bei Gewehren meistens um gemessene Schußweiten nur bis etwa 2000 m. Beim Infanteriegewehr M. 71 ergibt sich aus der Theorie (s. w. u.) auf 1000 m Entfernung eine Rechtsabweichung von 1,7 bis 3,4 m. Andererseits ist aber der Durchmesser des 50-prozentigen Streuungskreises auf 1000 m Entfernung bei diesem Gewehr (nach Hebler) etwa 3,1 m; also leuchtet ein, daß für das Gewehr M. 71 die „Derivation“ nicht leicht mit aller Sicherheit festgestellt werden kann.

Beobachtungen an Gewehrgeschossen liegen nur wenige vor (vgl. Lit.-Note, Thiel, Krause, Quinaux). G. Thiel hat mit einem nicht ganz einwandfreien Verfahren bei Gewehr M. 71 auf 300 m Entfernung 36 cm Derivation gefunden. Nach Krause hat man bei Gewehr M. 88 auf 1000 m Schußweite eine Rechtsabweichung von 1 m.

Bei der oberen Winkelgruppe, nämlich bei Abgangswinkeln zwischen  $45^{\circ}$  und  $90^{\circ}$  treten besondere Erscheinungen auf: Wenn man bei dem Schießen aus einem Geschütz die Pulverladung, also die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, unverändert läßt, aber den Abgangswinkel größer und größer wählt, so wächst zunächst (bei Rechtsdrall) die Rechtsabweichung mehr und mehr. Aber wenn ein bestimmter Abgangswinkel überschritten wird, so wechselt die Seitenabweichung ihr Vorzeichen (nicht sprunghaft, sondern durch Null hindurch), so daß man bei Rechtsdrall Linksabweichung, bei Linksdrall Rechtsabweichung beobachtet. Der kritische Abgangswinkel, bei dem diese Erscheinung auftritt, liegt je nach Art von Waffe und Geschosß zwischen  $45^{\circ}$  und  $85^{\circ}$ . Wächst der Abgangswinkel dann noch weiter, so nimmt die bei Rechtsdrall erhaltene Linksabweichung bzw. bei Linksdrall erhaltene Rechtsabweichung ab, bis sie schließlich beim lotrechten Schuß Null wird.

Einige Messungen, die Hélie anführt, sind die folgenden:

a) Französische 16 cm-Kanone; Kaliber 162,3 mm; Enddrallwinkel  $6^{\circ}$  (Linksdrall); Geschosßgewicht 31,49 kg; Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses 323 m/sec; Geschosßlänge 371 mm; ogivale Geschosßspitze mit halbem Öffnungswinkel des Ogivals von  $\gamma = 41^{\circ}51'$ . Versuche aus dem Jahre 1869:

Abgangswinkel $\varphi$	Seitenabweichung bei Linksdrall $Z$	$\frac{Z}{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi} =$
$45^{\circ}$	386 m nach links	0,00742
$60^{\circ}$	562 " " "	0,00726
$70^{\circ}$	715 " " "	0,00774
$75^{\circ}$	328 m nach rechts	—
$80^{\circ}$	290 " " "	—

b) Französische 10 cm-Kanone; Kaliber 100 mm; Enddrallwinkel  $6^{\circ}$ ; ogivale Geschosßspitze mit halbem Öffnungswinkel  $\gamma = 44^{\circ}26'$  des Ogivals. Versuche aus dem Jahre 1881 mit zwei verschiedenen Geschosßgewichten, Geschosßlängen und Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0$ :

Geschosßgewicht 12 kg; Geschosßlänge 343 mm; $v_0 = 535,5$ m/sec		Geschosßgewicht 14 kg; Geschosßlänge 392 mm; $v_0 = 504,5$ m/sec	
Abgangswinkel $\varphi$	Seitenabweichung bei Linksdrall $Z$ (m) =	Abgangswinkel $\varphi =$	Seitenabweichung bei Linksdrall $Z$ (m) =
$42^{\circ}4'$	525,9 nach links	$42^{\circ}4'$	430,2 nach links
$57^{\circ}4'$	533,9 " "	$57^{\circ}4'$	421,5 " "
$69^{\circ}4'$	329,0 " "	$69^{\circ}4'$	640,8 " "
$80^{\circ}4'$	365,0 " rechts	$80^{\circ}4'$	420,3 " rechts

Danach änderte bei diesen letzteren Geschützen die Abweichung ihr Vorzeichen zwischen  $70^\circ$  und  $80^\circ$  Abgangswinkel. Zugleich wurde beobachtet, daß, wenn bei Linksdrall Rechtsabweichung oder bei Rechtsdrall Linksabweichung eintrat, das Geschosß mit dem hinteren Ende zuerst auf dem Erdboden aufschlug. [Bei diesem Anlaß sei erwähnt, daß man von „Bodentreffern“ spricht, wenn die Geschosse mit dem Geschosßboden zuerst auf dem horizontalen Gelände aufschlagen; von „Bauchtreffern“, wenn die Geschosse mit wagrechter Geschosßachse aufschlagen; endlich von „Spitzentreffern“, wenn die Geschosse sich mit der Spitze in den Erdboden eingraben. Wegen richtigen Funktionierens der gewöhnlichen Zünder und wegen der Wirkung im Ziel werden Spitzentreffer angestrebt. Übrigens ist es selbstverständlich, daß der Winkel  $\alpha$  zwischen Geschosßachse und Bahntangente nicht notwendig größer als  $90^\circ$  gewesen sein muß, falls man einen Bodentreffer beobachtet hat; es kommt auch auf den spitzen Auffallwinkel  $\omega$ , also auf den Winkel an, den die Endtangente der Flugbahn mit dem Horizont bildet. Wenn z. B.  $\omega = 20^\circ$  ist und wenn im letzten Teil der Flugbahn der Stellungswinkel  $\alpha = 40^\circ$  war, so erhält man zwar einen „Bodentreffer“, aber das Geschosß flog in diesem letzten Teil der Bahn doch noch bezüglich der Bahntangente mit der Spitze voraus. Nur wenn  $\alpha$  größer als  $90^\circ$  war, kann gesagt werden, daß das Geschosß „mit dem Geschosßboden voraus“ fliegend im Mündungshorizont ankam.]

Auch bei Infanteriegeschossen muß der Theorie zufolge (s. w. u.) dieser Wechsel vorhanden sein, für das Geschosß des französischen Infanteriegewehrs etwa bei  $82^\circ$  Abgangswinkel; ungefähr bei dieser Erhöhung muß die Rechtsabweichung in Linksabweichung übergehen. Wegen der unvermeidlichen Streuungen wird sich dieser Wechsel darin zeigen, daß bei einer bestimmten Erhöhung ungefähr gleich oft Rechtsabweichung und Linksabweichung und bei weiterer Vergrößerung der Erhöhung immer häufiger Linksabweichung eintritt.

Beim Schießen lotrecht aufwärts müßte die regelmäßige Seitenabweichung wieder Null geworden sein; von rechts und links kann in diesem Fall nicht mehr gesprochen werden; tatsächlich werden nur durch den Einfluß des Windes, durch Änderungen des Abgangsfehlerwinkels, die Erdrotation usw. noch Abweichungen von der lotrechten Richtung zu bemerken sein. Im übrigen bleibt ein solches Geschosß im großen ganzen sich parallel, kommt also mit dem Geschosßboden zuerst unten wieder an.

# § 57. Wie fliegt ein rotierendes Langgeschöß? Magnuseffekt, Poissoneffekt, Kreiseleffekt. Über die Bedingungen für einen guten Geschößflug; scheinbare Pfeilwirkung.

Hier sollen zunächst rein qualitativ, ohne Rechnung, die regelmäßigen Abweichungen eines Langgeschosses besprochen werden, das aus einem etwa mit rechtsgewundenen Zügen versehenen Rohr verschossen ist. Eine Reihe von Einzelfragen, die sich auf die Art der Bewegung eines solchen Geschosses beziehen, wird der Ballistiker immer wieder von neuem zu beantworten Veranlassung haben: Wie erklärt sich die Seitenabweichung des rotierenden Langgeschosses?

Warum erhält man bei der unteren Winkelgruppe Rechtsabweichung bei Rechtsdrall, Linksabweichung bei Linksdrall? Warum nehmen die Seitenabweichungen rascher zu als die Schußweiten? Wenn das Geschöß als ein Kreisel anzusehen ist, warum bleibt die Kreiselachse (Geschößachse) nicht sich selbst parallel (Abb. 82a) und wenn das Geschöß Kreiselpendelungen (Abb. 82b) um die Tangente herum ausführt, warum weicht das Geschöß nicht abwechselnd nach rechts und nach links aus der Schuß-

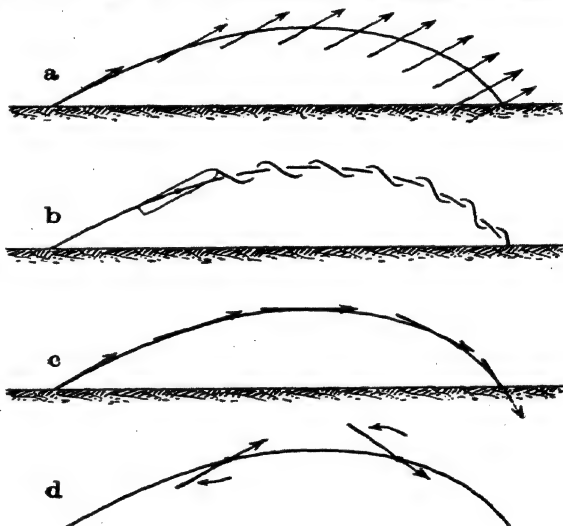


Abb. 82a, b, c, d.

ebene ab? Und woher kommt es, daß das rotierende Langgeschöß eine Flachbahn ähnlich wie ein gut konstruierter Pfeil (Abb. 82c) zurückzulegen scheint, d. h. so, daß die Geschößachse immer wieder in die Richtung der Bahntangente sich legt (Abb. 82d) und daß daher das Geschöß mit der Spitze zuerst am Erdboden ankommt und der Zünder funktionieren kann? Was ist der Grund dafür, daß von einer gewissen Erhöhung des Rohres ab die Seitenabweichung des Geschosses das Vorzeichen wechselt, also Linksabweichung trotz Rechtsdrall entsteht oder umgekehrt?

Im luftgefüllten Raum ergeben sich als Folgen der raschen Rotation, die dem Langgeschöß durch die Züge aufgezwungen ist, drei

verschiedene Wirkungen: der Magnus-Effekt, der Poisson-Effekt und der Kreiseffekt, wovon zwei bereits bei den kugelförmigen Geschossen erwähnt wurden. Im luftleeren Raum müßte einfach die Geschosßachse ihre Anfangsrichtung beibehalten, falls diese Achse zugleich Hauptträgheitsachse und anfängliche Rotationsachse ist und falls von Stoßnutationen an der Mündung vorläufig abgesehen wird. Die Schwere allein für sich kann lediglich die Krümmung der Schwerpunktsbahn innerhalb der anfänglichen Schußebene bewirken. Da aber diese Bahn tatsächlich eine doppeltgekrümmte ist und wir von der Erddrehung jetzt absehen, so müssen äußere Kräfte hinzugetreten sein, die senkrecht zur Schußebene wirken.

a) Der Magnus-Effekt (Wirkung der am Geschosß adhärierenden Luft). Man denke sich, das Langgeschosß sei etwa unter einem Abgangswinkel von  $40^\circ$  verschossen, und sein Schwerpunkt befinde sich jetzt z. B. in der Nähe des Flugbahngipfels in *S*. Es lag zunächst keine Ursache vor, daß die Achse des rotierenden Langgeschosses ihre Richtung

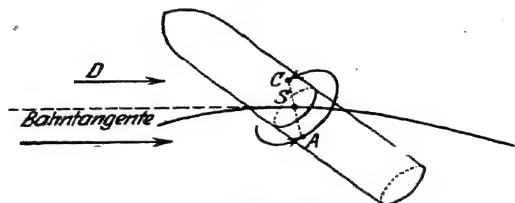


Abb. 83.

im Raum ändere; also habe sich bis jetzt ein Winkel von etwa  $40^\circ$  zwischen Geschosßachse und Bahntangente gebildet (vgl. Abbildung 83); und mit einer gegen die Bahntangente schiefgestellten Achse bewegt sich somit das Geschosß

in der als ruhig angenommenen Luft weiter. Statt dessen kann man sich vorstellen, der Geschosßschwerpunkt sei im Raum in Ruhe und die Luft ströme mit einer Geschwindigkeit gleich der des Geschosßschwerpunkts, aber in entgegengesetzter Richtung, gegen das Geschosß heran, parallel der Bahntangente. Diese Luftströmungen sind in der schematischen Abb. 83 durch die Pfeile *B* und *D* angedeutet; dabei beziehe sich für einen Beobachter, der das Geschosß von hinten, vom Geschütz her (oder, bezüglich der Abbildung gesprochen, von rechts her), betrachtet, die Strömung *B* auf die linke Seite, die Strömung *D* auf die rechte Seite des rotierenden Geschosses.

Außerdem wird aber auch Luft, die am Geschosß selbst anhaftet, mit diesem herumgeschleudert. Diese adhärierende Luft bewegt sich auf der linken Geschosßseite im Sinne des Pfeils *A*, also mit einer Geschwindigkeitskomponente in gleichem Sinne wie die Strömung *B* der zuerst genannten Luftströmung. Dagegen auf der rechten Geschosßseite bewegt sich die adhärierende Luft in Richtung des Pfeils *C*; diese Luftgeschwindigkeit ist in einer Komponente parallel und ent-

gegengesetzt gerichtet mit der gegen das Geschöß heranströmenden Luft. Man muß also hier Erscheinungen und Wirkungen haben, ähnlich denen, die in § 55 für die kugelförmigen Geschosse ausführlich besprochen wurden. Der betreffende Effekt möge deshalb auch hier der Kürze halber der „Magnus-Effekt“ genannt werden.

Dieser Effekt besteht offenbar darin, daß auf der linken Geschößseite Luftverdünnung, auf der rechten Seite Luftverdichtung eintritt. Die Folge muß bei dem hier angenommenen Rechtsdrall ein Überdruck von rechts nach links, eine Linksabweichung des Geschosses sein.

Da nun in unserem Falle tatsächlich eine Rechtsabweichung, nicht eine Linksabweichung eintritt, so folgt, daß dieser Effekt allein für sich die fragliche Erscheinung nicht erklären kann. Wohl aber kann er andere Einflüsse etwas abändern.

[Bei dieser Gelegenheit sei eine Theorie kurz erwähnt, die A. Dähne 1884 aufgestellt und verschiedentlich verfochten hat (vgl. Lit.-Note). Er nahm an, daß diese Wirkung der adhärierenden und mit dem Geschöß rotierenden Luft die Hauptsache bilde, daß aber die Resultante des Luftwiderstands hinter dem Schwerpunkt auf der Geschößachse angreife. Man hätte alsdann zwischen Schwerpunkt und Geschößboden einen Überdruck von rechts nach links. Dadurch wird der Geschößboden nach links, folglich die Geschößspitze nach rechts gedrückt. Der Luftwiderstand wirkt jetzt gegen das Geschöß wie gegen ein schiefgestelltes Segel und drückt das Geschöß als Ganzes aus der Schußebene nach rechts heraus. Diese Theorie hat zwar ihren guten Sinn. Daß sie jedoch nicht zutreffen kann, daß vielmehr der Angriffspunkt des resultierenden Luftwiderstands vor dem Schwerpunkt liegt, wurde in § 12 erörtert.]

**b) Poisson-Effekt (Luftpolsterwirkung).** Wieder sei angenommen, daß sich bereits ein von Null verschiedener Winkel zwischen Geschößachse und Bahntangente gebildet habe, und daß, wie in Abb. 83, die Geschößspitze sich oberhalb der Tangente befinde. Ferner stelle man sich wiederum vor, das Geschöß rotiere an seiner Stelle, und die Luft ströme mit der Geschwindigkeit des Geschosses (und in einer der tatsächlichen Geschößbewegung entgegengesetzten Richtung) gegen das Geschöß heran.

Es herrscht alsdann auf der Vorderseite des Geschosses, d. h. auf der nach dem Ziel zu gelegenen Seite eine Luftverdichtung, auf der Rückseite, d. h. auf der nach dem Geschütz zu gelegenen Seite eine Luftverdünnung. Die Luftreibung ist infolge davon auf der Vorderseite größer als auf der Rückseite. Und es ist, als ob gegen die Vorderseite des an seiner Stelle rotierenden Geschosses ein Luft-

polster  $PP$  gedrückt würde (vgl. schematische Abb. 84a). Man erhält also eine Wirkung, wie man sie an Billardkugeln, Kegelkugeln usw. oft beobachten kann (vgl. Abb. 84b): Das Geschöß rollt an dem festen Luftpolster ab, und zwar in unserem Falle nach rechts.

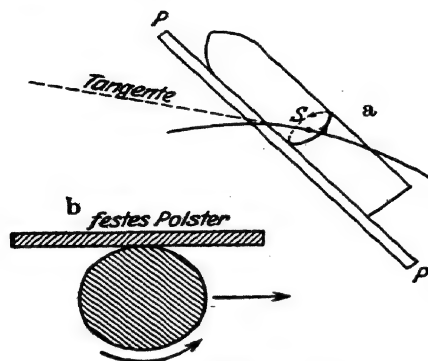


Abb. 84a u. b.

Bei Rechtsdrall, und wenn sich die Geschößspitze oberhalb der Bahntangente befindet, erhält man allein hierdurch eine Rechtsabweichung.

c) Die Kreiselwirkung. Auf die Möglichkeit, daß die Abweichungen von rotierenden Langgeschossen durch die Kreiselwirkung erklärt werden könnten, hat schon S. D. Poisson 1839 (vgl. Lit.-Note) rechnerisch hingewiesen. Erst G. Magnus (vgl. Lit.-Note)

hat jedoch 1852 durch Laboratoriumsversuche mit rotierenden Geschößmodellen, gegen die ein Luftstrom gerichtet wurde, die Erscheinung, wenigstens in der Hauptsache, endgültig aufgeklärt:

Wenn ein Kreisel (vgl. Abb. 85), um einen festen Unterstützungspunkt  $S$  drehbar angeordnet, kräftig angetrieben wird und sich infolgedessen im Sinne des eingezeichneten gekrümmten Pfeils um seine Achse  $SB$  rasch dreht, so fällt er nicht um, nachdem er freigelassen ist, sondern er zeigt die bekannte auffallende Kreiselerscheinung: Falls der Schwerpunkt  $A$  im Unterstützungspunkt liegt, behält die Kreiselachse ihre Richtung im Raum bei, auch wenn die Pfanne  $S$ , in der der Kreisel unterstützt ist, mit dem Kreisel langsam im Zimmer herumgetragen wird. Falls dagegen, wie dies in der Abb. 85 angedeutet ist, der Schwerpunkt  $A$  sich außerhalb, etwa oberhalb des Unterstützungspunktes  $S$  befindet, so beschreibt das obere Ende  $B$  des Kreisels (von Nutationen vorläufig abgesehen) langsam einen wagrechten Kreis  $BB_1B_2B_3\dots$  um die Lotrechte  $SO$  durch  $S$ . Die Kreiselachse  $SB$  beschreibt einen Kreiskegel mit  $SO$  als Kegelachse. Statt daß also, wie man etwa erwarten sollte, unter

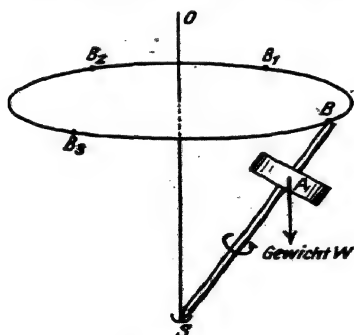


Abb. 85.

stützungspunktes  $S$  befindet, so beschreibt das obere Ende  $B$  des Kreisels (von Nutationen vorläufig abgesehen) langsam einen wagrechten Kreis  $BB_1B_2B_3\dots$  um die Lotrechte  $SO$  durch  $S$ . Die Kreiselachse  $SB$  beschreibt einen Kreiskegel mit  $SO$  als Kegelachse. Statt daß also, wie man etwa erwarten sollte, unter

der Wirkung der Schwere die Kreiselachse in der Ebene  $OSB$  um  $S$  sich dreht und der Kreisel in dieser Ebene umkippt, weicht er senkrecht zu dieser Ebene aus.

Diese Bewegung heißt die Präzessionsbewegung oder kornische Pendelung. Die Erde als Kreisel betrachtet führt eine ähnliche Bewegung unter der Wirkung hauptsächlich der Sonnenanziehung aus. Die Erdachse beschreibt in 26000 Jahren einen vollen Kegel mit dem halben Kegelwinkel von  $23\frac{1}{2}^\circ$ , so daß der Himmelspol, der Punkt am Himmel, nach dem die verlängerte Erdachse zeigt, immer andere Lagen annimmt und einen großen Kreis am Himmel um den Pol der Ekliptik als Mittelpunkt herum beschreibt. Es ist dies die Ursache für das Vorrücken der Tag- und Nachtgleichen.

Wendet man das Gesagte auf das rotierende Geschöß an, das ebenfalls einen Kreisel darstellt, und folgt man in Gedanken dem in ruhiger Luft fliegenden Geschöß, d. h. stellt man sich wiederum vor, der Schwerpunkt des Geschosses sei relativ in Ruhe und dafür ströme die Luft entgegengesetzt der Bewegungsrichtung des Geschößschwerpunkts gegen das Geschöß heran, so hat man folgendes Analogon:

Der Unterstützungspunkt  $S$  des Kreisels (vgl. die Abb. 86 a u. b) wird jetzt zum festgedachten Geschößschwerpunkt.  $SO$  ist die Bewegungsrichtung des Schwerpunkts oder die Richtung der Bahntangente; also parallel  $OS$  strömt bei festgedachtem Schwerpunkt die Luft gegen das Geschöß heran.  $SB$  ist jetzt die Geschößachse, die zur Zeit einen Winkel  $OSB$  gegen die Bahntangente  $SO$  bildet. Das Geschöß rotiert im Sinne des Pfeils um die Geschößachse, d. h. von  $S$  aus gesehen im Sinne von Rechtsdrall. Das im Kreiselschwerpunkt  $A$  angreifende Gewicht  $W$  ist zu

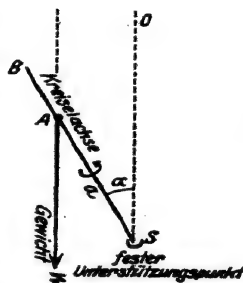


Abb. 86a.

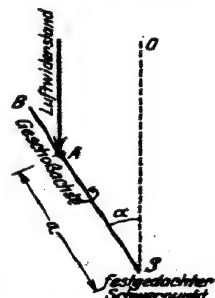


Abb. 86b.

ersetzen durch den resultierenden Luftwiderstand  $W$ , der durch die heranströmende Luft bewirkt wird und dessen Angriffspunkt  $A$  zwischen Geschößschwerpunkt  $S$  und Geschößspitze  $B$  liegt.

Folglich muß die Geschößspitze  $B$  senkrecht zur Ebene  $OSB$  ausweichen oder, von  $S$  aus gesehen, nach der rechten Seite. Wenn aber die Geschößspitze sich nach rechts wendet, wird die heranströmende Luft, bei der üblichen Form der Langgeschosse, mehr gegen die linke Seite als gegen die rechte Seite des Geschosses



drücken. Sie wirkt, wie schon oben angeführt, gegen das mit dem vorderen Ende schief nach rechts gestellte Geschoß wie gegen ein schief gestelltes Segel oder Brett und drückt das Geschoß als Ganzes nach der rechten Seite der Schußebene. Man erhält bei Rechtsdrall Rechtsabweichung.

Das ist die jetzt allgemein angenommene Erklärung für die Seitenabweichung von rotierenden Langgeschossen. Denn es läßt sich leicht zeigen, daß von den drei Wirkungen a, b, c im allgemeinen die Kreiselwirkung gegenüber den beiden andern der Größe nach überwiegt: Man stelle sich wiederum ein Langgeschloß vor, das etwa unter einem Abgangswinkel von  $40^\circ$  aus einem Geschütz mit kräftigem Enddrall (Rechtsdrall) verschossen und in der Nähe des Gipfelpunkts der Bahn angekommen ist, so daß die Geschloßspitze sich jedenfalls oberhalb der Bahntangente befindet. Die Wirkung a der adhärierenden Luft (Magnus-Effekt) würde allein für sich Linksabweichung ergeben. Da tatsächlich Rechtsabweichung erfolgt, so ist in diesem Fall die Kreiselwirkung c größer als jener Magnus-Effekt a. Die Wirkung c ist aber mutmaßlich auch größer als die Polsterwirkung b (Poisson-Effekt), die ebenfalls allein für sich eine Rechtsabweichung liefern würde. Denn bei rotierenden Kugeln sind die beiden Wirkungen a und b (Magnus-Effekt und Poisson-Effekt) unbedingt vorhanden. In Wirklichkeit aber folgt die rotierende Kugel, wie in § 55 gezeigt wurde, der Wirkung a der adhärierenden Luft, nicht der Polsterwirkung b. Diese letztere allein für sich würde den unrichtigen Sinn der Ablenkung liefern.

Man hat folglich, wenn der Schluß von der Kugel auf das Langgeschloß zutrifft, folgendes:

**Kreiselwirkung c > Wirkung a der adhärierenden Luft,  
Wirkung a der adhärierenden Luft > Polsterwirkung b,**

also

$$c + b > a.$$

Es kann somit die Kreiselwirkung durch die beiden anderen Wirkungen abgeändert werden; aber die Hauptsache ist im allgemeinen die Kreiselwirkung.

2. Es bleiben übrigens noch zahlreiche Fragen zu erledigen, die sich unmittelbar aufdrängen.

Zunächst könnte der folgende Einwand erhoben werden: Wenn der Vergleich zwischen dem Geschoß und dem gewöhnlichen Kreisel, der unter der Wirkung der Schwere seine Präzessionsbewegung ausführt, wirklich zutrifft, so muß die Geschloßspitze einen vollen Kreis um die Richtung des Luftwiderstands herum, also annähernd um die Bahntangente herum beschreiben. Die Geschloßspitze muß folglich aus der Vertikalebene durch die Bahntangente heraus sich nach rechts

wenden, abwärts gehen, sodann nach links und weiterhin wieder nach oben wandern. Man sollte danach vermuten, daß abwechselnd größere und kleinere Rechtsabweichung oder gar Rechts- und Linksabweichung erfolgt. Woher rührt es, daß in unserem Fall nicht später die Rechtsabweichung sich verringert oder in eine Linksabweichung übergeht?

G. Magnus 1852, ebenso A. Paalzow 1867 und E. Kummer 1875 (vgl. Lit.-Note) erkannten diese Schwierigkeit wohl. Und da in dem erwähnten Falle eines Abgangswinkels zwischen 0 und  $50^\circ$  nur zunehmende Rechtsabweichung bei Rechtsdrall eintritt, so nahmen sie willkürlich an, die konische Pendelung der Geschößachse gehe so langsam vor sich, daß die Geschößachse nur Zeit habe, nach rechts und etwas nach abwärts zu gehen, aber nicht mehr nach links gelangen könne, ehe das Geschöß wieder am Erdboden angekommen ist.

Diese Annahme trifft jedoch im allgemeinen nicht zu: Wenn man die betreffende, weiter unten anzuführende Formel der Kreiseltheorie auf unseren Fall anwendet, also statt des Gewichtsmoments das Luftwiderstandsmoment, statt des Kreiselimpulses den Geschößimpuls einsetzt, so erhält man das Ergebnis, daß nur im Fall eines zu großen Drallwinkels die Zeit einer vollen Präzession größer ist als die größte Gesamtflugzeit, daß aber gerade bei einem gut konstruierten Geschöß- und Geschützsystem zahlreiche volle Präzessionen während der Gesamtflugzeit ausgeführt werden können. Z. B.:

	Zeit eines vollen Präzessionsumlaufs	oder Zahl der Prä- zessionspendelungen in der Sekunde
bei einer älteren schweren Feldkanone		
a) im Anfang der Flugbahn . . .	0,7 sec	1,4
b) am Ende der Flugbahn . . .	0,3 "	3,3
bei einem Mörser . . . . .	3,7 "	$\frac{1}{4}$
bei einem Infanteriegewehr . . . .	0,11 "	9,1

Die richtige Lösung der Schwierigkeit ist vielmehr die folgende:

Der Vergleich zwischen der Bewegung eines rotierenden Langgeschosses einerseits und der Bewegung eines allein unter dem Einfluß der Schwere um einen festen Unterstützungspunkt sich bewegendes symmetrischen Kreisels andererseits ist nicht dadurch erschöpft, daß man einfach den Kreiselimpuls durch den Geschößimpuls und das Gewichtsmoment durch das Luftwiderstandsmoment ersetzt. Der Gedanke, ein durch die Luft fliegendes Langgeschöß mittels absichtlich herbeigeführter Rotationen zu stabilisieren, stellt wohl die älteste praktische Verwendung des Kreisels dar; aber unter den verschiedenen technisch verwendeten Kreiselbewegungen im weiteren Sinne (Fahrrad, Einschienenbahn, Schiffskreisel, Kreiselkompaß, Torpedokreisel usw.)

ist gerade die Geschosbewegung gleichzeitig auch die verwickeltste. Während bei dem gewöhnlichen Schwerekeisel die Schwerkraft, durch die eine Präzessionsbewegung bewirkt wird, nach Größe und Richtung konstant ist oder wenigstens ohne weiteres als eine konstante Kraft behandelt werden kann, ist bei dem fliegenden Langgeschoß der Luftwiderstand, der die Präzessionsbewegung des Geschosses erzeugt, erstens nach der Größe, zweitens nach der Richtung veränderlich, drittens ändert der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultante auf der Geschosachse seine Lage.

Die Folge davon ist, daß die Geschosachse keinen Kreiskegel beschreibt, die Geschosspitze nicht in einem vollen Kreis um die Anfangstangente oder um die veränderliche Bahntangente herum sich bewegt. Vielmehr beschreibt die Geschosspitze, von Nutationen abgesehen, im Raum eine zyklonische Kurve, die Geschosachse einen zyklonischen Kegel, der meist auf der rechten Seite der Vertikalebene durch die Tangente liegt. Oder, bezüglich der Tangente gesprochen, die Geschosspitze befindet sich, fast immer rechts von der Tangente bleibend, abwechselnd oberhalb und unterhalb der Tangente.

Dieser Umstand, daß die Geschosspitze, bei richtiger Konstruktion des Geschos- und Geschützsystems und bei nicht zu großem Abgangswinkel, fast während der ganzen Flugzeit auf der rechten Seite der Vertikalebene durch die Bahntangente bleibt, ist die Ursache dafür, daß die Rechtsabweichung nicht später in eine Linksabweichung übergeht. Und der Umstand, daß die Geschosspitze immer wieder, nach Vollendung eines Zyklonbogens, mit der Bahntangente ganz oder nahezu zusammenfällt, ist die Ursache dafür, daß das Geschos mit seiner Spitze zuerst auf dem Erdboden aufschlägt.

Die näheren Umstände der Bewegung des Geschosses um den Schwerpunkt werden in § 58 mit den Hilfsmitteln der analytischen Mechanik untersucht werden; hier soll versucht werden, eine erste Orientierung darüber mittels geometrischer Betrachtungen zu geben: Die Bewegung des Geschosses kann zerlegt gedacht werden in eine Translationsbewegung des Schwerpunkts, die so vor sich geht, wie wenn im Schwerpunkt alle äußeren Kräfte, parallel mit sich selbst versetzt, angreifen würden, und in eine Drehung des Geschosses um den Schwerpunkt, wobei diese Drehung in derselben Weise erfolgt, wie wenn der Schwerpunkt im Raum relativ fest wäre. Beide Bewegungen sind voneinander abhängig; diese beiderseitige Abhängigkeit leuchtet auch ohne Rechnung sofort ein: je größer der Winkel  $\alpha$  zwischen Geschosachse und Bahntangente ist, um so größer wird der

Luftwiderstand gegen das Geschöß, das mehr seine Langseite diesem Widerstand darbietet; dadurch wird die Schwerpunktsbahn abgeändert; andererseits, je größer die Krümmung der Bahn ist, um so mehr ändert sich der Winkel zwischen der Richtung der Bahntangente in einem beliebigen Punkt und zwischen der Richtung der Anfangstangente; um so größer werden also die Amplituden bei den Kreiselbewegungen der Geschößachse sein.

Will man sich einen Überblick über die Art der Geschößbewegung verschaffen, so ist es gut, den Weg zu beschreiben, der in § 58 als Lösung für Flugbahnen 1. Art angegeben werden wird. Der Weg ist dieser: Man löst die Gleichungen der Translationsbewegung vorerst ohne Rücksicht auf die Rotationsbewegung (also unter den Voraussetzungen von Abschnitt 4 bis 7), setzt alsdann die betreffenden Ausdrücke in die Gleichungen der Rotationsbewegung ein und integriert diese. Die so gewonnenen Integralwerte können dann rückwärts wieder dazu verwendet werden, um die Gleichungen der Translationsbewegung nachträglich mit gewissen Korrektionsgliedern zu versehen. Die folgende graphische Integrationsmethode hat der Verfasser 1898 veröffentlicht (s. Lit.-Note).

Zunächst seien mit Hilfe der üblichen ballistischen Rechnungsverfahren die Elemente  $xyv\vartheta$  und damit der Luftwiderstand  $W(v)$  zu einem beliebigen Bahnpunkt in Funktion der Zeit  $t$  ermittelt. Nun denke man sich um den Schwerpunkt  $S$  des Geschosses eine Kugel mit dem Halbmesser 1 m beschrieben und durch  $S$  Gerade gezogen parallel zu den verschiedenen Bahntangentenrichtungen, die man für die einzelnen Zeitabschnitte  $\Delta t$  zuvor berechnet hatte. Die Durchstoßungspunkte dieser Geraden mit der Kugelfläche (der Kürze halber die aufeinanderfolgenden Lagen der „Tangentenspitze“ genannt)

seien mit  $O T_1 T_2 T_3 \dots$  bezeichnet, vgl. Abb. 87; die Durchstoßungspunkte der verlängerten Geschößachse mit der Kugelfläche seien die sukzessiven Lagen der „Geschößspitze“ genannt und mit  $O O_1 O_2 O_3 \dots$  bezeichnet. Die Kugelfläche hat man sich dabei vom Mittelpunkt  $S$  aus betrachtet zu denken (und streng genommen ist die nachfolgende Konstruktion auf einer kugelförmigen Zeichenfläche auszuführen, und falls sie doch auf einem ebenen Zeichenblatt ausgeführt wird, hat man sich dabei die Kugelfläche auf dem ebenen

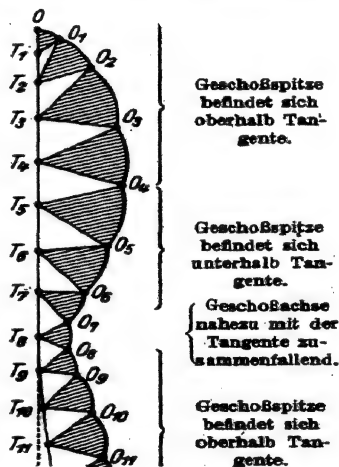


Abb. 87.

Blatt abgerollt vorzustellen). Im Anfang der Geschößbewegung befindet sich die Tangentenspitze in  $O$ ; nach der Zeit  $\Delta t$  hat sie sich nach  $T_1$  herabbewegt; nach der Zeit  $2 \cdot \Delta t$  befindet sie sich in  $T_2$  usw. Diese Punktreihe, die als durch die erwähnte Vorberechnung bekannt anzusehen ist, hat ihre kleinste Dichte in der Gegend des Gipfels der Flugbahn und geht wegen der Seitenabweichung des Geschosses schließlich etwas nach rechts. Die Geschößspitze befand sich (da Stoßnutationen an der Mündung vorläufig ausgeschlossen sein sollen) ebenfalls in  $O$ ; nach Verlauf der Zeit  $\Delta t$ , nachdem sich also die Bahntangente aus der Lage  $SO$  in die Lage  $ST_1$  gedreht hat, ist ein Winkel  $OST_1$  zwischen Geschößachse und Bahntangente  $ST_1$  entstanden, da die Achse des durch den Drall stabilisierten Geschosses in dieser Zeit  $\Delta t$  ihre Richtung zu erhalten sucht. Nunmehr ist Anlaß zu einer Präzessionsbewegung gegeben: Die Geschößachse beschreibt in der Zeit  $\Delta t$  einen kleinen Teil  $SOO_1$  eines Kreiskegels um die Tangente  $ST_1$ , oder die Geschößspitze beschreibt um  $T_1$  ein Kreisbogenstück  $OO_1$  mit dem Halbmesser  $T_1O = T_1O_1$ . Der zu dem angenommenen Zeitelement  $\Delta t$  gehörige Zentriwinkel  $OT_1O_1$  oder  $\Delta\psi$  kann mit Hilfe der Kreiseltheorie berechnet werden, wenn man für das Moment  $M$  des Luftwiderstandes während der Zeit  $\Delta t$  einen konstanten Mittelwert annimmt. Z. B. liefert die Kreiseltheorie unter Voraussetzung eines genügend großen Stabilitätsfaktors [s. § 58] für  $\Delta\psi$  die Beziehung:  $\Delta\psi = \frac{M/\sin \alpha}{C \cdot r} \cdot \Delta t$ . ( $\alpha$  der Winkel  $T_1SO_1$ ;  $C$  das Trägheitsmoment des Geschosses um seine Längsachse;  $r = \frac{v_0 \operatorname{tg} \Delta_1}{R}$  die Winkelgeschwindigkeit des Geschosses um seine Längsachse;  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit;  $2R$  das Kaliber;  $\Delta_1$  der Enddrallwinkel der Züge.) Nach einem weiteren Zeitelement  $\Delta t$  ist die Tangentenspitze in  $T_2$  angelangt; der Winkel zwischen Geschößachse  $SO_1$  und Bahntangente  $ST_2$  ist jetzt  $O_1ST_2$  geworden; es wird also nunmehr um  $T_2$  mit Halbmesser  $T_2O_1$  ein Kreisbogen  $O_1O_2$  beschrieben, dessen Zentriwinkel sich mit dem neuen Wert von  $v$  und  $\vartheta$  analog ergibt, wie zuvor, usf. Der weitere Verlauf der Konstruktion geht aus der Abbildung hervor. (Bemerkt sei noch, daß die beiden kleinen Bewegungen, das Senken der Tangentenspitze z. B. von  $O$  nach  $T_1$  und die Drehung der Stoßebene um den Winkel  $\Delta\psi$ , in Wirklichkeit natürlich nicht ruckweise nacheinander in gleichen Zeiten, sondern in derselben Zeit  $\Delta t$  gleichzeitig erfolgen; ferner daß die Bewegung der Geschößspitze damit noch nicht völlig beschrieben ist: es überlagern sich den gezeichneten Präzessionskreisen noch Nutationspendelungen, deren Verlauf ebenfalls mit Hilfe der Kreiseltheorie bestimmt werden kann. Jedoch sind die Präzessionskreise gewissermaßen die Leitlinien für diese Nutationspendelungen, die übrigens

eine im Verhältnis zur Präzessionsperiode kleine Periode und meistens, nämlich sobald der Stabilitätsfaktor genügend groß ist, nur sehr kleine Amplituden besitzen, ähnlich dem bekannten Spielkreisel, bei dem ja auch die Nutationen so klein sind, daß man sie mit dem bloßen Auge meistens gar nicht erkennen kann.)

3. Bei einem gut konstruierten Geschütz- und Geschößsystem und bei Flachbahnen bewegt sich, wie man aus der rein schematischen Abb. a sieht (durch welche übrigens keine quantitativen Verhältnisse dargestellt sein sollen), die Geschößachse zeitweilig immer wieder zur Bahntangente hin oder kommt wenigstens in deren Nähe (z. B. im Punkt  $T_3$ ); ferner sieht man, daß die Geschößspitze abwechselungsweise höher und tiefer liegt als die Tangente, d. h. abwechselungsweise oberhalb und unterhalb der Ebene durch Bahntangente und Nebennormale sich befindet, und daß bei Rechtsdrall und unter obiger Voraussetzung die Geschößspitze auf der rechten Seite der Tangente sich bewegt. Diese Konstruktion erklärt also auf die einfachste Weise nicht nur den pfeilartigen Flug des (gut konstruierten und eine Flachbahn beschreibenden) Geschosses, sondern auch die Beobachtungstatsache, daß bei Rechtsdrall nur Rechtsabweichung erfolgt, falls der Abgangswinkel unter einer bestimmten Grenze liegt und der Drall richtig gewählt ist. Das Verhalten des Geschosses entlang einer Steilbahn wird unter Absatz 4 des § 57 erwähnt werden.

Die konstruierte zyklidenartige Kurve  $OO_1O_2\dots$  der Geschößspitze ist die Präzessionskurve; sie stellt die Analogie dar zu dem Präzessionskreis, den die Spitze eines schweren Kreisels zu beschreiben scheint, welcher allein unter der Wirkung der Schwere seine Präzessionsbewegung vollführt. Die Umwandlung des Kreises zu einer Zyklode hat, wie der Verlauf der Konstruktion deutlich zeigt, ihren Grund darin, daß der Mittelpunkt des Präzessionskreises auf der Linie  $OT_1T_2T_3\dots$  nicht stillsteht, sondern wandert, d. h. darin, daß die Richtung der Bahntangente und damit auch die Richtung der Luftwiderstandsresultanten, welche die Präzession bewirkt, eine immer andere wird. (Die Kurve  $OO_1O_2\dots$  kann man sich übrigens auch durch die Rollbewegung eines Kreises erzeugt denken; der Mittelpunkt des Kreises wandert von  $O$  aus mit der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\theta}{dt}$  auf der Linie  $OT_1T_2\dots$ , und gleichzeitig dreht sich der Kreis und damit der zu dem beschreibenden Punkt des Kreisumfangs gehende Halbmesser um den Mittelpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\psi}{dt}$ ; der beschreibende Punkt des Kreisumfangs liegt anfangs in  $O$ ; der Radius des Kreises ist etwas veränderlich.)

Denkt man sich die Konstruktion unter den verschiedensten Bedingungen ausgeführt, so erkennt man, daß zweierlei möglich ist: entweder fallen entlang der Flachbahn die Zykloidenbögen zahlreich und dann klein aus (Abb. 88) oder wenig zahlreich und dann groß (Abb. 89). Ob der eine oder der andere Fall eintritt, hängt ab von dem Verhältnis zwischen der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\psi}{dt}$ , mit der die Präzessionsbewegung vor sich geht, also mit der die Stoßebene sich dreht, und zwischen der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\theta}{dt}$ , mit der die Bahntangente sich neigt, also mit der die Bahn sich krümmt. Falls die Präzessionsbewegung  $\frac{d\psi}{dt}$  verhältnismäßig schnell vor sich geht, so werden

die Bögen nach der Höhe und nach der Seite klein bleiben; die Geschosachse nähert sich dann sehr häufig wieder der Bahntangente und entfernt sich niemals weit von ihr nach oben und nach unten und nach der Seite; in diesem Fall ist also der Flug des Geschosses am meisten ähnlich demjenigen eines gut fliegenden Pfeils, und die Seitenabweichungen bleiben klein. Wenn dagegen die Präzessionsbewegung verhältnismäßig langsam sich vollzieht, so

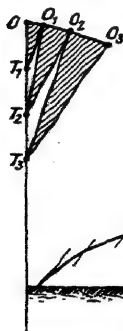


Abb. 89.

kann der Fall (Abb. 89) eintreten, daß die Punkte  $O O_1 O_2 \dots$  nahe zusammenrücken im Vergleich zu der Punktreihe  $O T_1 T_2 \dots$  und daß infolge davon die Geschosspitze überhaupt nicht mehr in die Nähe der Tangente gelangt, während das Geschos die Luft durchfliegt, in diesem Fall muß für einen Beobachter, der die Flugbahn von der Seite her betrachtet, die Geschosachse nahezu sich selbst parallel bleibend erscheinen; das Geschos ist überstabilisiert und kommt als Bauch- oder Bodentreffer am Erdboden an. Welcher Fall zu erwarten ist, kann durch die Ausführung der erwähnten Konstruktion

entschieden werden; näherungsweise durch die Berechnung des Verhältnisses

$f = \frac{d\psi}{dt} : \frac{d\theta}{dt}$ . Dieses Verhältnis möge der Folgsamkeitsfaktor

oder der Einstellungsfaktor heißen; er wird zweckmäßigerweise speziell für den Gipfelpunkt der Bahn berechnet werden, da sich in dieser Gegend die Bewegungsrichtung der Schwerpunktsbahn am raschesten ändert.

Nun ist  $\frac{d\psi}{dt} = \frac{M/\sin \alpha}{C \cdot r}$  (hier in der Nähe des Gipfels ist bei Steilbahnen immer die der Formel zugrunde liegende Voraussetzung eines

großen Stabilitätsfaktors erfüllt) und  $\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{g \cdot \cos \vartheta}{v}$  oder im Gipfelpunkt dem Absolutwert nach  $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{g}{v_s}$ . Somit ist dieser erste Faktor, der für einen guten Geschößflug genügend groß bleiben muß, der folgende:

$$\text{Folgsamkeitsfaktor } f = \frac{M/\sin \alpha \cdot v_s}{C \cdot r \cdot g}. \quad (1)$$

Andererseits muß aber auch die Stabilität des Geschosses eine genügende sein. Diese ist definiert durch den in der Kreiseltheorie abgeleiteten Faktor  $\sigma$ , der für den Abgangspunkt berechnet wird:

$$\text{Stabilitätsfaktor } \sigma = \frac{(C \cdot r)^2}{4 A \cdot M/\sin \alpha}. \quad (2)$$

Hier bedeutet  $A$  das Trägheitsmoment des Geschosses um eine Querschse durch den Schwerpunkt ( $M$ ,  $C$ ,  $r$  sind bereits oben erwähnt).  $\sigma$  muß jedenfalls größer als 1 sein; und wenn dies für den Abgangspunkt der Fall ist, dann ist es weiterhin sicher der Fall. Je größer  $\sigma$  ist, um so mehr besteht Sicherheit gegen unzulässig große Amplituden von Nutationen, die daß Geschöß bei seinem Fluge durch die Luft ausführt. Wie groß  $f$  und  $\sigma$  mindestens sein müssen, damit ein guter Geschößflug gewährleistet ist, läßt sich am einfachsten ermitteln, indem man in dem betreffenden konkreten Fall die Faktoren für  $f$  und  $\sigma$  für ein möglichst ähnliches Geschütz- bzw. Gewehrssystem berechnet, bei dem ein guter Geschößflug bereits beobachtet worden ist. Bei der Berechnung bereitet am meisten Unsicherheit der Faktor  $M/\sin \alpha$ , da alle bisherigen Theorien hierfür versagt haben (vgl. § 12). Falls keine aerodynamischen Messungen für die betreffende Geschößform vorliegen, wird man in roher Annäherung (die übrigens um so weniger zutrifft, je mehr sich  $\alpha$  dem Wert  $90^\circ$  nähert), den Faktor  $M/\sin \alpha$  als das Produkt  $W_0 \cdot a$  berechnen, wo  $W_0$  den in den Abschnitten 4 bis 7 sog. Luftwiderstand und  $a$  den mittleren Abstand zwischen dem Schwerpunkt und dem Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten auf der Achse bedeutet; nach P. Charbonnier wird man  $a$  gleich der Entfernung zwischen Schwerpunkt und Mitte der Geschößspitze nehmen, (eine wenig davon verschiedene Berechnungsart für  $a$  hat E. Rögglä 1912 gegeben). So fand sich z. B. für das Inf.-Geschöß M/71:  $\sigma = 9$ ,  $f = 76$ ; für das Inf.-Geschöß M/88:  $\sigma = 8,2$ ,  $f = 72$ ; für das S-Geschöß:  $\sigma = 10$ ,  $f = 57$ ; für das Feldhaubitzzgeschöß 05 der I.F.H.:  $\sigma = 48$ ,  $f = 4,9$ ; für die 10-cm-Granate 96 der 10-cm-Kan. 04:  $\sigma = 3,5$ ,  $f = 8$ ; für das Geschöß der s.F.-K. 73:  $\sigma = 3,1$ ,  $f = 27$  usw.

Der Stabilitätsfaktor  $\sigma$  wird vergrößert, d. h. die stoßfreien Nutationspendelungen des Geschosses bei dessen Flug in der Luft werden verringert durch folgende Maßnahmen: Vergrößerung des Träg-



heitsmoments um die Längsachse; Vergrößerung des Enddrallwinkels; Verkleinerung der Geschosßlänge; Verlegung des Schwerpunkts nach der Spitze zu. Der Folgsamkeitsfaktor  $f$  wird vergrößert, d. h. das Geschosß wird dazu gebracht, sich bei gleicher Rohrerhöhung besser in die Bahntangente einzustellen, durch: Vergrößerung der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses; Vergrößerung der Geschosßlänge; Verlegung des Schwerpunkts nach hinten; Verkleinerung des Enddrallwinkels; Verkleinerung des Trägheitsmoments  $C$  um die Längsachse. Man sieht also, daß nahezu durch dieselben Maßnahmen, jedoch nach verschiedenen Gesetzen, die Stabilität des Geschosses verbessert bzw. verringert und gleichzeitig die Einstellung der Geschosßachse in die Bahntangente verringert bzw. verbessert wird. Folglich wird man in allen Fällen, in denen gleich großer Wert auf einen pfeilartigen Geschosßflug gelegt werden muß, wie auf die Stabilität des Geschosses, bei der Konstruktion des Geschützes und Geschosses gewissermaßen einen Kompromiß abzuschließen haben; d. h. man wird dafür sorgen, daß beide Faktoren, der Stabilitätsfaktor  $\sigma$  und der Folgsamkeitsfaktor  $f$ , genügend größer als 1 bleiben, so wie es die sonstigen Erfahrungen der Praxis nahelegen.

4. Die im vorigen beschriebenen Folgen des Kreiseffekts auf die Drehbewegungen des Geschosses um seinen Schwerpunkt gestatten nun auch, die etwas mannigfacheren Verhältnisse bei Steilbahnen zu überblicken. Beim aufsteigenden Ast einer Steilbahn liegen die Verhältnisse wie bei Flachbahnen: der Quotient  $\frac{d\psi}{dt} : \frac{d\vartheta}{dt}$  ist groß, da  $\vartheta$  sich nur langsam ändert ( $\frac{d\vartheta}{dt}$  klein), dahingegen  $\frac{d\psi}{dt}$  groß ist; denn es ist in  $\frac{d\psi}{dt} = \frac{M/\sin\alpha}{C \cdot r}$  sowohl  $M$  groß wegen der anfangs noch großen Geschwindigkeit  $v$ , als auch  $\alpha$  klein. Im Anfang einer Steilbahn wird also der Verlauf der Präzessionsbewegung qualitativ durch die Abb. 88 gekennzeichnet sein. — Je mehr sich jedoch das Geschosß dem Gipfel der Bahn nähert, um so größer wird die Änderungsgeschwindigkeit  $\frac{d\vartheta}{dt}$  des Winkels  $\vartheta$ , um so kleiner wird die Geschwindigkeit  $v$ , somit das Moment  $M$  und damit die Änderungsgeschwindigkeit  $\frac{d\psi}{dt}$  des Winkels  $\psi$ . Das heißt, es tritt die durch Abb. 89 gekennzeichnete Erscheinung mehr und mehr auf: die Geschosßspitze  $O$  kann dem Tangentenpunkt  $T$  immer weniger folgen. Dadurch wird der Winkel  $\alpha$  zwischen Geschosßachse und Bahntangente immer größer, was seinerseits eine weitere Verkleinerung von  $\frac{d\psi}{dt}$  bewirkt, und zwar nicht nur dadurch, daß  $\sin\alpha$  im Nenner der Formel für  $\frac{d\psi}{dt}$  steht,

sondern auch dadurch, daß  $M$  für größere Winkel  $\alpha$  mit wachsendem  $\alpha$  kleiner und kleiner wird (bis es für einen in der Nähe von  $90^\circ$  gelegenen Wert von  $\alpha$  überhaupt verschwindet). — Am Gipfel hat der Winkel  $\alpha$  unter allen Umständen einen Wert kleiner als  $90^\circ$ ; denn der Höchstwert, den  $\alpha$  dann überhaupt haben kann, ist der, welcher eintreten würde, wenn das völlig stabile Geschöß sich selbst parallel geblieben wäre: dann wäre am Gipfel  $\alpha$  gleich dem Abgangswinkel. So fällt also im ersten Teile des absteigenden Astes die Entscheidung, ob das Geschöß folgsam sein wird, d. h.  $\alpha$  kleiner als  $90^\circ$  bleibt oder nicht. Ist das Geschöß folgsam, so führt eine erst langsame und allmählich schneller werdende Präzessionsbewegung die Geschößspitze (in Richtung der Bahntangente gesehen) erst auf gleiche Höhe, dann unterhalb der Bahntangente und, wenn nicht vorher schon der Aufschlag des Geschosses auf den Boden erfolgte, so vollführt nun die Geschößspitze eine verschlungene Zykloidenbewegung um die Bahntangente, die immer schneller und immer kreisförmiger wird. Daß diese Präzessionsbewegung schneller und schneller wird, also  $\frac{d\psi}{dt}$  größer und größer wird, liegt an dem mit der Geschwindigkeit  $v$  wachsenden Moment  $M$ . Die Zykloidenbewegung aber wird immer kreisförmiger, weil der letzte Teil der Steilbahn immer geradliniger wird. (Die Bewegung des Geschosses ist dann mehr und mehr die eines schweren Kreiseles, nur daß beim Geschöß die Präzessionsgeschwindigkeit nicht konstant ist wegen des wachsenden Momentes  $M$ .) — Ist das Geschöß nicht folgsam, so wird die Bewegung der Geschößachse um die Bahntangente ihren Drehsinn umkehren oder beibehalten, je nachdem das Moment  $M$  seinen Drehsinn umkehrt oder beibehält, d. h. je nachdem der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten, bei  $\alpha > 90^\circ$  ist, in Richtung der Bahntangente gesehen, vor oder hinter dem Schwerpunkt liegt. Der weitere Verlauf der Bewegung ist qualitativ im übrigen der des folgsamen Geschosses. — Die Abb. 90a und 90b geben je eine maßstäbliche Darstellung der Rotationsbewegung eines nicht folgsamen und eines folgsamen Geschosses; ersteres unter der Annahme, daß der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten auch für  $\alpha > 90^\circ$ , in Richtung der Bahntangente gesehen, vor dem Schwerpunkt liegt. Die Abbildungen sind Ergebnisse von Berechnungen, die W. Schmundt für 7,7-cm-Granaten bei verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten und Drallwinkeln durchführte. Die Bewegung im Anfang der Bahnen ist nicht wiedergegeben; ihre Wiedergabe würde der erforderlichen Maßstabsvergrößerungen wegen einen allzu großen Raum einnehmen: für die Bahn der Abb. 90b z. B. wurden für die Strecke  $\vartheta = 70^\circ$  bis  $\vartheta = 50^\circ$  26 Zykloidenbögen errechnet, von denen allein 18 auf das Intervall

zwischen  $70^{\circ}$  und  $69^{\circ}$  fallen (dabei die größten Werte  $\alpha$  wachsend von  $25''$  bis  $2'$ ); weitere 6 Bögen kommen auf das Intervall  $69^{\circ}$  bis  $67^{\circ}$  ( $\alpha_{\max} = 2'$  bis  $10'$ ), die restlichen beiden auf das Intervall  $67^{\circ}$  bis  $60^{\circ}$  ( $\alpha_{\max} = 10'$  bis  $1^{\circ}$ ); bei  $60^{\circ}$  beginnt der große, sich nun bis  $-60^{\circ}$  erstreckende Bogen; von etwa  $69^{\circ}30'$  an kommt die Geschosßachse nicht mehr mit der Bahntangente zusammen, während sie bei den ersten 8 Bögen sogar verschlungene Zykloiden um die Bahntangente beschreibt. Die Abbildungen sind so zu verstehen, daß die

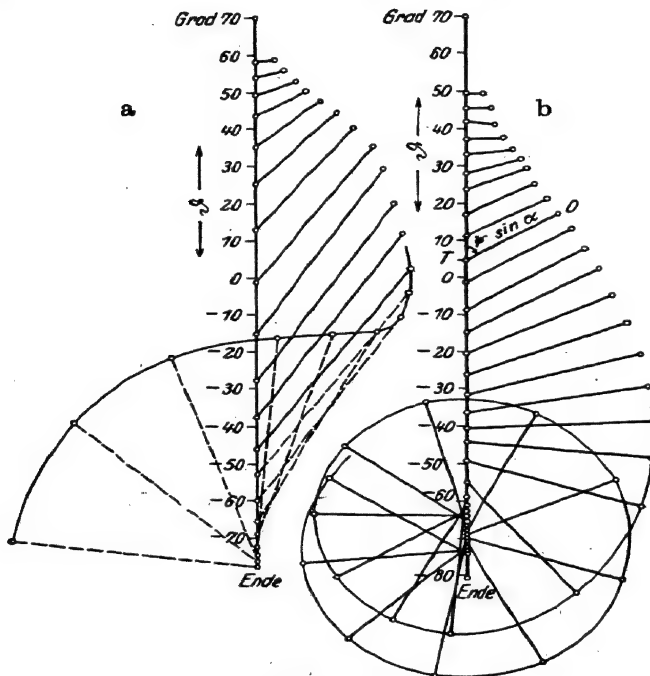


Abb. 90a u. b.

Geraden  $TO$  die Werte  $\sin \alpha$  darstellen; es ist also die Zeichenebene für jeden Punkt  $T$  die in ihm an die gedachte Einheitskugel um  $S$  gelegte Tangentialebene, und  $TO$  ist die Projektion der Geschosßachse von Schwerpunkt bis Spitze auf die jeweils zu  $T$  gehörige Ebene. Für  $\alpha > 90^{\circ}$  sind die Geraden  $TO$  gestrichelt.

Und nun kommen wir zurück auf die oben erwähnte Tatsache, daß von einem gewissen Abgangswinkel ab die bei Rechtsdrall vorher beobachtete Rechtsabweichung in eine Linksabweichung übergeht. Diese Erscheinung erklären sich die Ballistiker

noch jetzt folgendermaßen: Wenn der Abgangswinkel größer und größer gewählt ist, so wird in der Gegend um den Flugbahngipfel der Anstellwinkel  $\alpha$  zwischen Geschößachse und Tangente einmal gleich  $90^\circ$ ; das Drehmoment  $M$  des Luftwiderstands wird Null; die Kreiselwirkung hört dann auf. Aber die Geschößspitze steht immer noch rechts von der Vertikalebene durch die Tangente; und wenn nun auf dem absteigenden Ast der Winkel  $\alpha$  größer als  $90^\circ$  geworden ist, so fliegt das Geschöß mit dem Bodenteil voraus weiter; der Geschößboden ist nach links gerichtet und infolge davon ist die Wirkung des Luftwiderstands derart, wie wenn ein mit stumpfem Vorderteil versehenes Geschöß mit Linksdrall verfeuert wäre, man erhält eine Abweichung nach der linken Seite der Schußebene.

Diese Erklärungsweise hat zur notwendigen Voraussetzung, daß  $\alpha$  größer als  $90^\circ$  ist. Wenn also einmal  $\alpha < 90^\circ$  konstatiert wird und trotzdem bei Rechtsdrall und rechtsgerichteter Geschößspitze Linksabweichung des Geschosses am Ende der Bahn beobachtet wird, so ist diese Erklärungsweise als unhaltbar nachgewiesen. Dies ist nun in der Tat der Fall. C. Cranz und W. Schmudt haben mit Holzgeschossen von 7,8 cm Kaliber und 39,5 cm Länge (2 Kaliber Abrundungsradius der ogivalen Spitze) eine Reihe von Schießversuchen angestellt ( $v_0 = 23,6$  m/sec, Drallwinkel  $45^\circ$ ), bei denen sich schon mit einem Abgangswinkel von  $45^\circ$  eine Linksabweichung von durchschnittlich 7,0 m bei einer durchschnittlichen Schußweite von 35 m trotz Rechtsdrall ergab und bei denen mehrere Beobachter, die von der Seite der Flugbahn her den Flug des Geschosses verfolgten, gleichzeitig feststellten, daß der Anstellwinkel  $\alpha$  zwischen Geschößachse und Bahntangente kleiner als  $90^\circ$  blieb. Hierdurch und durch die analytische Berechnung von § 58 scheint erwiesen zu sein, daß sich die Linksabweichung bei Rechtsdrall bzw. die Rechtsabweichung bei Linksdrall, wenn sie am Ende der Bahn bei einem gewissen größeren Abgangswinkel beobachtet wird, einfach durch den Magnus-Effekt erklärt, der den Kreiseleffekt überwog.

Bisher war man nämlich der Ansicht, daß der Magnus-effekt unter allen Umständen neben dem Kreiseleffekt zu vernachlässigen sei. Ob dies der Fall ist oder nicht, hängt jedoch von der Größe des Anstellwinkels  $\alpha$  ab: Wenn  $\alpha = 0$  ist, so ist der Kreiseleffekt (nämlich die Luftwiderstands-Komponente  $W_x$ ) und ebenso der Magnus-effekt gleich Null. Ist  $\alpha$  von Null verschieden, aber klein, so sind beide Effekte klein; dies ist der Grund dafür, daß, wenn es sich um eine Flachbahn und um ein gut konstruiertes Geschöß handelt, das ballistische Problem als ein solches im engeren Sinne behandelt werden darf (vgl. die Abschnitte 4 bis 7), bei dem das Geschöß als ein Massenpunkt gilt, auf den in der vertikalen Richtung die Schwere und in

der negativen Tangentenrichtung der Luftwiderstand wirkt; in der Tat ergeben in solchen Fällen die besten der üblichen Rechenmethoden, bei denen jene Voraussetzung benützt ist, in der Berechnung der Schußweite Fehler, die im allgemeinen über 1 % nicht hinausgehen. Wenn der Anstellwinkel  $\alpha$  weiterwächst, so ist zunächst der Magnuseffekt kleiner als der Kreiseffekt, welcher letzterer sich in der Größe von  $W$ , und  $M$  geltend macht; in der Tat erhält man aus diesem Grund zunächst Rechtsabweichung bei Rechtsdrall. Wenn jedoch  $\alpha$  sich dem Werte  $90^\circ$  nähert, so kehrt sich das Größenverhältnis um; dies ist ohne weiteres verständlich, wenn man berücksichtigt, daß bei  $\alpha = 90^\circ$   $W$ , und  $M$  wieder ganz oder nahezu Null geworden sind und daher der Kreiseffekt ganz oder nahezu ganz verschwindet, dagegen die Magnuskraft bei  $\alpha = 90^\circ$  ihr Maximum erreicht.

Auch die Tatsache, daß mit wachsendem Abgangswinkel die einmal eingetretene Linksabweichung bei Rechtsdrall zunächst wächst, läßt sich nur dann erklären, wenn man die Magnuskraft als die Ursache der Linksabweichung ansieht. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man bedenkt, daß die die Seitenabweichung bewirkende Komponente der Magnuskraft um so größer ist, je kleiner  $\psi$ , d. i. der Winkel zwischen Stoßebene und Vertikalebene durch die Flugbahntangente, ist, daß dahingegen für die die Seitenabweichung bewirkende Komponente des Luftwiderstandes das Gegenteil gilt.

5. An der Mündung der Waffe treten häufig Stoßnutationen auf. Wenn diese nicht weiterhin sich abdämpfen, verlaufen sie so,

daß die oben besprochene Präzessionskurve die Leitlinie für sie bildet, und zwar immer im Drehsinn des Dralls (s. Abb. 91a, b, c. Dabei bezieht sich Abb. 91a auf den Fall von größeren, Abb. 91b auf den Fall kleinerer



Abb. 91a.



Abb. 91b.

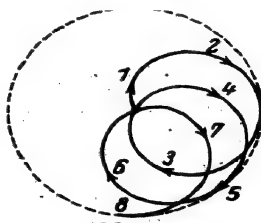


Abb. 91c.

Nutationsamplituden, Abb. 91c auf den Fall des vertikalen Schusses). Diese Nutationen haben ihre Entstehungsursache entweder in einem Stoß durch die mit dem Geschoß aus der Mündung austretenden

Pulvergase oder durch Vibrationen des Rohrs oder und meistens durch das Bucken des Rohrs: Falls die Mündung dabei aufwärts buckt, so wird während des Geschoßaustritts der Geschoßboden aufwärts, die Geschoßspitze abwärts gestoßen. Bei Rechtsdrall müssen alsdann die Stoßnutationen so verlaufen, daß die Geschoßspitze abwärts, links, aufwärts, rechts usw. geht. Daher dürfte es rühren, daß mitunter die Minenwerfergeschosse im Anfang der Flugbahn eine Linksabweichung bei Rechtsdrall aufweisen. H. Güldner (s. Lit.-Note) hat darüber zahlreiche Beobachtungen mitgeteilt. Wenn das Geschoß seine Flachbahn durchlaufen hat und, mit dem Kopfteil voraus, mit der Längsachse annähernd in der Bahntangente, am Erdboden ankommt, so wird das Aufschlagen meist so erfolgen, daß die Geschoßspitze nach oben gestoßen wird; die entstehenden Nutationspendelungen müssen sich dann wiederum im Sinne des Dralls abspielen; folglich wird bei Rechtsdrall die Geschoßspitze zuerst nach oben und rechts gehen. Dies ist wohl der Grund dafür, daß bei Rechtsdrall die aufschlagenden und nach kurzem Eindringen wieder in der Luft weitergehenden Geschosse in der Mehrzahl der Fälle, auf ruhiger Wasseroberfläche sogar stets nach rechts abspringen und daß die in Erde oder Sand eindringenden Geschosse mitunter eine stark gekrümmte Bahn innerhalb dieses Materials beschreiben.

Die Nutationen, die von einem seitlichen Drehstoß oder auch von einer Unsymmetrie in der Massenverteilung des Geschosses herrühren, lassen sich zwar theoretisch behandeln; da jedoch über die Größe dieser Stöße nichts Gesetzmäßiges bekannt ist und da die Lage der Hauptträgheitsachsen im Geschoß nur selten experimentell festgestellt wird, so konnte eine rechnerische Behandlung nicht zahlenmäßig durchgeführt werden. Daher soll hier nicht näher darauf eingegangen werden; in der 3. und 4. Auflage dieses Bandes findet man einige weitere Ausführungen über diesen Gegenstand; ebenso in dem Lehrbuch von Th. Vahlen.

6. Zum Schlusse soll noch die allgemeine Regel angegeben werden, mit deren Hilfe man in jedem Falle leicht entscheiden kann, nach welcher Seite sich infolge der Kreiselwirkung die Geschoßspitze wenden wird: Die Geschoßachse liege so, daß sich die Geschoßspitze ein wenig oberhalb der Tangente der Schwerpunktsbahn befindet. Nun denke man sich auf der Geschoßachse einen Vektor aufgetragen, der die Winkelgeschwindigkeit des Geschosses um seine Längsachse nach Größe und Richtung angibt; bei Rechtsdrall wird dieser Vektor vom Schwerpunkt aus nach der Spitze zu aufgetragen (also nach derselben Seite, nach welcher sich ein Korkzieher vorwärts bewegt, wenn er in den Kork eingeschraubt wird); dies sei der Vektor 1. Der resultierende Luftwiderstand greift zwischen Schwerpunkt und

Spitze auf der Geschosßachse an; er sucht also das Geschosß so zu drehen, daß sich die Spitze weiter hebt; dabei wird die Geschosßachse gedreht um eine horizontale Querachse durch den Schwerpunkt, also um die Binormale; den entsprechenden Drehungsvektor 2 denke man sich vom Schwerpunkt aus auf der Binormalen aufgetragen und zwar für einen Beobachter, der vom Geschütz aus nach dem Geschosß blickt, nach der rechten Seite. Diese beiden Vektoren 1 und 2 setzen sich zusammen zu einem resultierenden Vektor 3, der nach vorwärts und zugleich nach rechts zeigt. In dieser Richtung wird sich die Geschosßachse einzustellen suchen. Die analoge Überlegung hat man in jedem anderen Falle anzustellen.

## § 58. Berechnung von Flugbahnen rotierender Langgeschosse.

(von C. Cranz und W. Schmudt).

In den Abschnitten 3 bis 7 ist das ballistische Problem als dasjenige im engeren Sinne, d. h. unter der Voraussetzung behandelt worden, daß die Längsachse des Geschosses dauernd in der Bahntangente liege. Mit dem ballistischen Problem im weiteren Sinne, also unter Berücksichtigung der Schiefstellungen der Geschosßachse, haben sich zahlreiche Ballistiker, als Erster wie es scheint N. Mayevski 1855, unter Verwendung analytischer Hilfsmittel beschäftigt (die Literatur ist in der Lit.-Note erwähnt). Durchweg sind bei der analytischen Behandlung mehr oder weniger beschränkende Annahmen gemacht worden; teils wurde vorausgesetzt, daß der Anstellwinkel  $\alpha$  zwischen Geschosßachse und Bahntangente entlang der ganzen Flugbahn klein bleibe, teils wurden lediglich Flachbahnen zugrunde gelegt. Immer aber ist von der Einrechnung der Magnuskraft abgesehen worden. Zwar hat M. de Sparre 1911 die Magnuskraft anfangs in seinen Gleichungen geführt, aber später in den Endformeln hat auch er den Magnuseffekt neben dem Kreiseffekt vernachlässigt. Was die seit dem Erscheinen der 4. Auflage veröffentlichte Literatur betrifft, die uns bekannt geworden ist, so hat R. Grammel in seinem Kreiselbuch der Kreiselbewegung geworfener Körper einen durch Einfachheit und Klarheit der Darstellung ausgezeichneten kurzen Abschnitt gewidmet; darin beschränkt er sich auf solche Fälle, wo die Geschosßachse nach Vollendung einer Präzessionszykloide jedesmal wieder genau mit der Bahntangente zusammenfällt, so daß für die aufeinanderfolgenden Zykloiden dasselbe Gleichungssystem verwendet werden kann, nur mit anderen Zahlenwerten für die Zeiten. Am weitesten ist das Problem durch A. Sommerfeld und F. Nöthier gefördert worden; bemerkt sei, daß die Arbeit zwar in rein mathematischer Hinsicht durch die Wahl der Parameter, die Reihenentwicklungen und die Diskussion mittels komplexer Integration dem Leser einen hohen geistigen Genuß gewährt, daß aber auch hier vom Magnuseffekt ganz abgesehen wird und daß die schließlichen Linksabweichungen bei Rechtsdrall in der bisher üblichen Weise erklärt und berechnet werden, die wir, wie schon erwähnt, nicht mehr für zutreffend ansehen können. H. König und Th. Vahlen setzen wieder voraus, daß der Anstellwinkel  $\alpha$  klein bleibe; dies trifft jedoch nur für Flachbahnen und den größten Teil des aufsteigenden Astes der Steilbahnen zu. Neuerdings haben die englischen Ballistiker Fowler, Gallop, Lock und Richmond in ihrer schon oben (§ 12) erwähnten Arbeit eine vollständige Theorie der Bewegung eines rotierenden Langgeschosses entwickelt, in die sie, allerdings nicht zahlenmäßig, auch die Magnus-

kraft einbeziehen und außerdem, was unseres Wissens bisher noch von keiner Seite geschehen ist, das durch die Drehgeschwindigkeit der Geschosbachse hervorgerufene Luftwiderstandsmoment. In den ausgeführten Flugbahnberechnungen beschränken sich jedoch auch jene Forscher auf Flachbahnen (mit Winkeln zwischen Geschosbachse und Bahntangente  $\alpha < 10^\circ$ ), vernachlässigen daher die Magnuskraft und behalten nur die Luftwiderstandskomponenten und die beiden Luftwiderstandsmomente bei. Freilich vermuten auch sie, daß die Magnuskraft für größere Winkel  $\alpha$ , wie sie bei Steilbahnen auftreten, nicht mehr vernachlässigt werden darf.

1. Ansätze für die Komponenten und das Moment des Luftwiderstandes und für die Magnuskraft. Die Komponenten  $W_t$  bzw.  $W_s$  des Luftwiderstandes parallel bzw. senkrecht zur Bahntangente, sowie das Drehmoment  $M$  um eine Querachse durch den Schwerpunkt seien im folgenden als bekannte Funktionen von Geschwindigkeit  $v$  und Anstellwinkel  $\alpha$  vorausgesetzt. (Hierüber s. § 12.) In der dort gegebenen Bezeichnungsweise ist also

$$W_t = W_0 \cdot \lambda_t; \quad W_s = W_0 \cdot \lambda_s; \quad M = W_0 \cdot s \cdot \lambda_m.$$

Dabei ist  $W_0$  der für ein und dasselbe Geschos nur von  $v$  und der Luftdichte  $\delta$  abhängige Luftwiderstand, wenn  $\alpha = 0$  ist;  $s$  ist der Abstand des Schwerpunktes von der Mitte der Geschosspitze;  $\lambda_t, \lambda_s, \lambda_m$  sind nur von  $\alpha$  abhängige Koeffizienten.

Die Magnuskraft  $K$  nehmen wir nach dem Vorgang von P. G. Tait proportional der zur Geschosbachse senkrechten Komponente  $v \cdot \sin \alpha$  der Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts und der Luftdichte  $\delta$ ; ferner, soweit ein Flächenelement  $dO$  des Geschosses in Betracht kommt, proportional  $dO$  und der Umfangsgeschwindigkeit  $\varrho \cdot r$  dieses Flächenelements, so daß  $K = \mu \cdot v \sin \alpha \cdot \int \varrho \cdot r \cdot dO$  ist. Nun ist, wenn  $\varrho$  die Entfernung des Flächenelements  $dO$  von der Geschosbachse,  $H$  die ganze Geschoslänge,  $dh$  ein Element der Mantellinie und  $r$  die Winkelgeschwindigkeit des Geschosses um seine Längsachse bedeutet,  $dO = 2\pi \varrho \cdot dh$ , somit ist

$$K = \mu \cdot \frac{\delta}{2} \cdot v \sin \alpha \cdot 2\pi r \cdot \int_{h=0}^{h=H} \varrho^2 \cdot dh.$$

(Der Anteil des Geschosbodens ist als unbedeutend vernachlässigt.) Was die Richtung von  $K$  anlangt, so ist diese Kraft senkrecht zur Ebene durch Geschosbachse und Bahntangente oder senkrecht zur „Stoßebene“ gerichtet. Und der Richtungssinn kann am einfachsten so ermittelt werden: Ein „Rechtssystem“ (d. h. das System: Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand, wenn diese Finger zu drei aufeinander senkrechten Koordinatenachsen gestellt werden) wird in dieser Reihenfolge aus folgenden drei Vektoren gebildet: a) der Geschwindigkeitskomponente  $v \cdot \sin \alpha$  der Schwer-



punktsbahn senkrecht zur Geschoßachse (Daumen); b) dem Vektor, der Magnuskraft (Zeigefinger); c) dem Vektor der Drehgeschwindigkeit um die Geschoßachse (Mittelfinger). Dabei denke man sich den Vektor der Drehgeschwindigkeit bei Rechtsdrall positiv in der Richtung vom Schwerpunkt nach der Geschoßspitze hin; also in derselben Richtung, in der ein Korkzieher in den Kork eingeschraubt wird).

Den Koeffizienten  $\mu$  haben wir empirisch durch Schießversuche bestimmt, wobei von der Plattform eines Hausdaches aus in horizontaler Richtung geschossen wurde: der Drallwinkel der Züge war  $45^\circ$  (Rechtsdrall); das Geschoß war ein hölzerner Kreiszyylinder von  $2R = 0,078$  m Kaliber,  $H = 0,395$  m Länge und  $P = 1,23$  kg Gewicht; die Anfangsgeschwindigkeit war  $v_0 = 23,6 \pm 0,9$  m/sec (Mittel aus 8 Versuchen). Gemessen wurde außerdem die Schußweite  $X$ , die Seitenabweichung  $Z$  und die Flugzeit  $T$  (mittels der Löbnerschen Tertienuhr); die Höhe der Seelenachse des Rohrs über dem horizontalen Erdboden betrug  $Y = 23,2$  m. Ein Koordinatensystem sei angenommen, dessen Ursprung der Fußpunkt des Lots von der Mündung auf den Erdboden ist; die  $x$ -Achse horizontal und positiv in der Schußrichtung; die  $y$ -Achse vertikal und positiv nach oben; die  $z$ -Achse horizontal und positiv nach rechts, so daß die  $xyz$ -Achsen ein Rechtssystem bilden. Wird der Luftwiderstand in Anbetracht der Kleinheit der Geschwindigkeiten proportional der Schwerpunktschwindigkeit  $v$  angenommen, so sind, wegen  $v \cdot \sin \alpha = -\frac{dy}{dt}$ , die Differentialgleichungen der Geschoßbewegung:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f \cdot \frac{dy}{dt} + g = 0; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} - \mu \cdot \frac{g}{P} \cdot 2\pi R^2 \cdot H \cdot r \cdot \frac{dy}{dt} = 0.$$

$$\text{Für } t=0 \text{ ist: } y=Y; \quad z=0; \quad \frac{dy}{dt}=0; \quad \frac{dz}{dt}=0;$$

$$\text{" } t=T \text{ " } y=0; \quad z=Z.$$

Diese sechs Grenzbedingungen liefern sechs Gleichungen zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten und der beiden unbekannten Koeffizienten  $f$  und  $\mu$ . Die Schießversuche, die angestellt wurden, und bei denen der Holzzyylinder ohne erhebliche Nutationschwankungen sich selbst parallel flog und platt auf dem Erdboden aufschlug, ergaben durchweg Linksabweichung; die Messungsergebnisse waren bzw. die folgenden:

Schußweite  $X = 48,7; 40,4; 47,5; 45,0; 47,4; 48,5; 47,4; 47,4$  m;

Seitenabweichung  $-Z = 3,95; 3,62; 4,75; 4,34; 5,45; 5,70; 5,30; 5,40$  m;

Flugzeit  $T = 2,55; 2,46; 2,55; 2,47; 2,48; 2,52; \dots; 2,51$  sec.

Die Berechnung ergab im Mittel:

$$\mu = 0,014 \text{ m}^{-1} \text{ kg sec}^2.$$

<sup>2)</sup> (Hinzufügung während des Drucks von Band I): Unsere Schießversuche zur Ermittlung des Koeffizienten  $\mu$  für die Magnuskraft  $K$  wurden Frühjahr 1923 abgeschlossen. Seitdem hat der Magnuseffekt, welcher früher fast ausschließlich zur Erklärung von ballistischen Erscheinungen eine gewisse Rolle gespielt hatte und auch in der Ballistik bisher nicht genügend berücksichtigt worden war (vgl. § 57), durch die Flettnersche Erfindung des Rotorschiffs in den weitesten Kreisen Beachtung gefunden. Dabei hat Herr L. Prandtl in seiner Göttinger aerodynamischen Versuchsanstalt Messungen angestellt und

[Unter den von J. Didion mitgeteilten Schießversuchen mit exzentrischen Kugeln ergab der Versuch mit: Kugelgewicht 27,9 kg; Kaliber 22 cm; Abgangswinkel  $4^{\circ} 6'$ ; Flugweite ohne Exzentrizität 1170 m; Flugweite mit Schwerpunkt unten 1117 m; Flugweite mit Schwerpunkt oben 1320 m; Drehzahl  $8,0 \text{ sec}^{-1}$  bei der Berechnung den Wert  $\mu = 0,0146$ ; die übrigen Didionschen Versuche ergaben sehr untereinander abweichende Werte  $\mu$ , weshalb nicht angenommen werden kann, daß die dabei mitgeteilte Drehzahl, zumal diese jedenfalls schwierig festzustellen war, durchweg  $8,0 \text{ sec}^{-1}$  betragen hat. Die zahlreichen Versuche von Heim mit exzentrischen Kugeln und die französischen Versuche mit diskusartigen Geschossen konnten zur Berechnung nicht beigezogen werden, da die Drehzahl nicht angegeben ist.]

2. Die Transformationsgleichungen. Wir nehmen die drei rechtwinkligen Koordinatensysteme (Rechtssysteme) an: System 1 mit dem Ursprung  $O$  in der Geschützöffnung und den Einheitsvektoren  $i_1, j_1, k_1$ ;  $i_1$  horizontal in der Schußebene, nach vorn gerichtet;  $j_1$  vertikal in der Schußebene nach oben gerichtet;  $k_1$  horizontal nach rechts gerichtet bezüglich eines Beobachters, der vom Geschütz aus in der Schußrichtung blickt. System 2 mit dem Ursprung in dem Schwerpunkt  $S$  des fliegenden Geschosses; von den Einheitsvektoren  $i_2, j_2, k_2$ , die ein Rechtssystem bilden, liegt  $i_2$  in der Bahntangente, nach vorn gerichtet;  $j_2$  in der Binormalen und für jenen Beobachter nach rechts gerichtet;  $k_2$  in der Hauptnormalen der Flugbahn und

gefunden, daß der Koeffizient  $\mu$  nicht konstant ist, sondern einerseits von dem Verhältnis zwischen Länge und Durchmesser des rotierenden Zylinders, andererseits von dem Verhältnis  $\varphi$  zwischen der Umfangsgeschwindigkeit  $R \cdot r$  und der Geschwindigkeitskomponente  $v \cdot \sin \alpha$  senkrecht zur Zylinderachse abhängt.

Das Verhältnis zwischen Länge und Durchmesser des Zylinders war bei den Prandtlischen Versuchen 4,7:1, bei unseren Flugbahnberechnungen 4,2:1, somit wenigstens von derselben Größenordnung.

Was jedoch die Abhängigkeit des Koeffizienten  $\mu$  von dem Verhältnis  $\varphi$  anlangt, so fand Herr Prandtl für  $\varphi = 1, 2, 3$  die folgenden Werte von  $\mu$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{sec}^{-2}$ ):

für $\varphi = 1,0$	2,0	3,0
$\mu = 0,0220$	0,03222	0,0278.

Dagegen bei unseren im folgenden zu besprechenden drei Flugbahnberechnungen war das Verhältnis  $\varphi$  in den entscheidenden Teilen der 3 Bahnen, nämlich zwischen Gipfel- und Auffallpunkt, wesentlich kleiner als  $\varphi = 1,0$ ; nämlich bei allen 3 Bahnen nahm  $\varphi$  ab von 0,38 bis 0,14. Es fehlten uns somit zum Vergleich die Prandtlischen  $\mu$ -Werte für solche kleinere Werte von  $\varphi$ . Auf eine Anfrage des Verfassers hatte Herr Prandtl die Güte, uns mitzuteilen, daß die niedrigsten von ihm benützten Werte des Verhältnisses  $\varphi$  waren: 1,3 und 0,66 und daß er für diese den Koeffizienten  $\mu$  gemessen habe zu bzw. 0,0278 und 0,0138. Die ganzen Göttinger Versuche seien übrigens vorläufiger Art, genauere Versuche kommen noch.

Diesen Mitteilungen zufolge scheint es, daß der von uns benützte Mittelwert  $\mu = 0,0140$  in seiner Anwendung auf die 3 Flugbahnberechnungen in guter Übereinstimmung mit den Prandtlischen Messungen steht, die natürlich am meisten Vertrauen verdienen.

nach außen gerichtet. System 3 mit den Einheitsvektoren  $i_3 j_3 k_3$ , die mit dem fliegenden Geschos fest verbunden zu denken sind; Ursprung im Schwerpunkt  $S$ ;  $k_3$  in der Geschosachse und nach der Geschosspitze hin gerichtet;  $i_3$  und  $j_3$  im Geschos fest und auf der Geschosachse und aufeinander senkrecht; in der Reihenfolge  $i_3 j_3 k_3$  ein Rechtssystem bildend. Die Ebenen  $(i_1 j_2)$  und  $(i_3 j_3)$  schneiden sich in einer Geraden, der Knotenlinie, welcher der Einheitsvektor  $p$  zugeordnet sei;  $k_2 k_3 p$  bilden ein Rechtssystem.  $q_2$  sei ein Einheitsvektor senkrecht zu  $p$  in der Ebene  $(i_2 j_2)$ ;  $q_3$  sei ein solcher senkrecht zu  $p$  in der Ebene  $(i_3 j_3)$ ;  $p q_2 k_2$  und  $p q_3 k_3$  bilden Rechtssysteme, vgl. die Abb. 92, wo die positiven Richtungen durch Pfeile angedeutet sind.

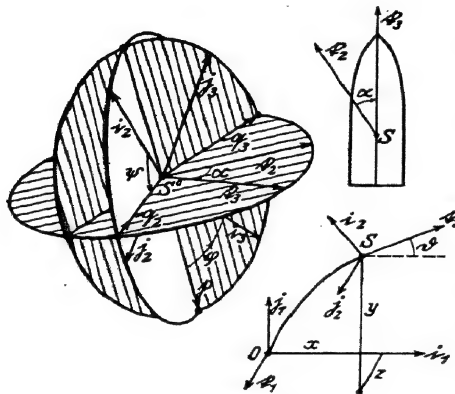


Abb. 92.

Wir machen die Voraussetzung, daß die Vertikalebene  $(i_2 k_2)$  durch die jeweilige Bahntangente mit der anfänglichen Schußebene  $(i_1 j_1)$  einen so kleinen Winkel bilde, daß dieser Winkel und dessen zwei erste Ableitungen nach der Zeit vernachlässigt werden können (Annahme 1, aus der folgt, daß  $j_2 = k_1$  ist). Diese Voraussetzung

ist in der Praxis der Artillerie- und Infanteriegeschosse im allgemeinen genügend erfüllt. Unter dieser Voraussetzung genügen die folgenden Koordinaten zur eindeutigen Festlegung der Systeme 2 und 3 in dem System 1:  $xyz$  als Koordinaten des Geschoschwerpunkts  $S$ ;  $\vartheta = i_1 \wedge k_2$  als Richtungswinkel der Bahntangente;  $\alpha = i_2 \wedge k_3$  als Anstellwinkel der Geschosachse gegen die Bahntangente;  $\psi = i_2 \wedge (-q_2)$ ;  $\varphi = p \wedge i_3$ .  $\alpha$ ,  $\psi$  und  $\varphi$  sind die bekannten Eulerschen Winkel; im besonderen ist  $\alpha$  der Nutationswinkel und  $\psi$  der Präzessionswinkel.

Die Beziehungen zwischen den Einheitsvektoren der 3 Systeme lassen sich aus den Abbildungen ablesen; sie sind

$$i_2 = -i_1 \cdot \sin \vartheta + j_1 \cos \vartheta; \quad j_2 = k_1; \quad k_2 = i_1 \cdot \cos \vartheta + j_1 \cdot \sin \vartheta. \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= i_1 \sin \vartheta \cdot \sin \psi - j_1 \cos \vartheta \cdot \sin \psi + k_1 \cos \psi; \\ q_2 &= i_1 \sin \vartheta \cdot \cos \psi - j_1 \cos \vartheta \cdot \cos \psi - k_1 \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} i_3 &= -p \cdot \sin \psi - q_2 \cos \alpha \cdot \cos \psi + k_2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \psi \\ j_3 &= +p \cdot \cos \psi - q_2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \psi + k_2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \psi \\ k_3 &= +q_2 \sin \alpha + k_2 \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Mit  $\bar{\omega}$  sei der Vektor der Drehgeschwindigkeit des Systems 3 ( $i_3, j_3, k_3$ ) gegen das System 1 ( $i_1, j_1, k_1$ ) bezeichnet. Es ist zweckmäßig,  $\bar{\omega}$  durch seine drei Komponenten  $pqr$  in dem System ( $p, q, r$ ) darzustellen; diese seien durch die Vektorgleichung definiert:

$$\bar{\omega} = p \cdot p + q \cdot q_3 + r \cdot k_3. \quad (4)$$

$\bar{\omega}$  läßt sich ausdrücken als die vektorielle Summe aller hier möglichen Drehungen des Systems 3 gegen das System 1, nämlich

$$\bar{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot j_3 + \frac{d\alpha}{dt} \cdot p + \frac{d\psi}{dt} \cdot i_3 + \frac{d\varphi}{dt} \cdot k_3.$$

Formt man diese Gleichung mit Hilfe der Transformationsgleichungen (3) so um, daß sie nur noch die Einheitsvektoren  $p, q_3, k_3$  enthält, so findet man durch Vergleichung mit (4) die Komponenten  $pqr$ :

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \cos \psi + \frac{d\alpha}{dt} \\ q &= -\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \alpha \\ r &= \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \psi + \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \alpha + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (4a)$$

Für die Drehgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_4$  des Systems ( $p, q_3, k_3$ ), das als System 4 bezeichnet sei, ergibt sich

$$\bar{\omega}_4 = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot j_3 + \frac{d\alpha}{dt} \cdot p + \frac{d\psi}{dt} \cdot i_3$$

$$\text{oder} \quad \bar{\omega}_4 = p \cdot p + q \cdot q_3 + \left( r - \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot k_3. \quad (5)$$

Damit sind alle im folgenden benötigten kinematischen Beziehungen entwickelt. Es sind nun die Differentialgleichungen für die Bewegung des Geschosses aufzustellen; wie schon oben erwähnt wurde, teilt sich diese Bewegung in eine Translationsbewegung des Schwerpunkts und eine Drehbewegung um den Schwerpunkt.

3. Die Gleichungen der Translationsbewegung des Schwerpunkts. Es sei  $\bar{Q}$  die Vektorsumme der äußeren Kräfte, die auf das Geschöß wirken;  $\bar{v}$  der Vektor der Geschwindigkeit des Schwerpunkts;  $m$  die Geschößmasse, so ist nach dem Schwerpunktsatz der Mechanik:

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt} (m \bar{v}). \quad (I)$$

Als äußere Kräfte wirken: Luftwiderstand  $\bar{W}$ , Magnuskraft  $\bar{K}$ , Schwerkraft  $\bar{P}$ :

$$\bar{Q} = \bar{W} + \bar{K} + \bar{P}. \quad (6)$$

Hier ist:  $\bar{W} = -W_t \cdot i_1 - W_s \cdot q_3$ ;  $\bar{K} = -K \cdot p$ ;  $\bar{P} = -P \cdot i_1$

Die Komponenten der Kräfte im ruhenden System 1 erhält man daraus mit Hilfe der Transformationsgleichungen (1) und (2):

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= i_1 \cdot [-W_t \cos \vartheta - W_s \cos \psi \sin \vartheta] \\ &\quad + i_1 \cdot [-W_t \sin \vartheta + W_s \cos \psi \cos \vartheta] + i_1 \cdot [W_s \sin \psi] \\ \bar{K} &= i_1 \cdot [-K \sin \psi \sin \vartheta] \\ &\quad + i_1 \cdot [K \sin \psi \cos \vartheta] \qquad \qquad \qquad + i_1 \cdot [-K \cos \psi] \\ \bar{P} &= \qquad \qquad i_1 \cdot [-P] \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

$W_t$ ,  $W_s$  und  $K$  sind ihrer Größe nach in Funktion von  $v$ ,  $\alpha$  und  $y$  gegeben. (Letzteres wegen der Luftdichte, die von der Höhe  $y$  über dem Erdboden abhängt.) Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist, in Komponenten angeschrieben,

$$\bar{v} = i_1 \cdot \frac{dx}{dt} + i_1 \cdot \frac{dy}{dt} + i_1 \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (7)$$

Wir machen weiter die Voraussetzung, daß das System 1 oder ( $i_1$   $i_1$   $i_1$ ) ruhe, daß also von der Erdrotation abgesehen werden kann und daß nicht etwa von einem Flugzeug od. dgl. aus, sondern vom Erdboden aus geschossen werde (Annahme 2). Unter dieser Voraussetzung und derjenigen einer konstanten Masse  $m$  des Geschosses wird die rechte Seite der Gleichung (I):

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = i_1 \cdot m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + i_1 \cdot m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + i_1 \cdot m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (8)$$

Mit Gleichung (6) und (8) wird dann die Beziehung (I) für die Bewegung des Schwerpunkts:

$$\left. \begin{aligned} -m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= W_t \cdot \cos \vartheta + W_s \cdot \cos \psi \cdot \sin \vartheta + K \cdot \sin \psi \cdot \sin \vartheta \\ -m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} &= W_t \cdot \sin \vartheta - W_s \cdot \cos \psi \cdot \cos \vartheta - K \cdot \sin \psi \cdot \cos \vartheta + P \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} &= W_s \cdot \sin \psi - K \cdot \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (Ia)$$

4. Die Gleichungen für die Rotationsbewegung um den Schwerpunkt. Es sei  $\bar{M}$  das Moment der äußeren Kräfte;  $\bar{J}$  der Drall oder Drehimpuls des Geschosses; beide bezogen auf den Schwerpunkt. Der Flächensatz gibt für die Rotationsbewegung:

$$\bar{M} = \frac{d\bar{J}}{dt}. \quad (II)$$

Wir sehen davon ab, die Beiträge von Magnuskraft und Luftreibung zum Moment, sowie das durch die Drehgeschwindigkeit der Geschosßachse hervorgerufene Moment in die Rechnung einzubeziehen (s. hierüber weiter unten unter 7.), vielmehr betrachten wir diese drei Momente als vernachlässigbar klein (Annahme 3). Danach bleibt

als wirksames Moment dasjenige des Luftwiderstandes:

$$\bar{M} = M \cdot p; \quad (9)$$

$M$  ist als Funktion von  $v$ ,  $\alpha$  und  $y$  gegeben. Zum Zweck der Auflösung der Gleichung (II) in die entsprechenden Komponentengleichungen wird man mit Rücksicht auf (9) das System 4 oder ( $p \ q_3 \ \mathfrak{I}_3$ ) benützen. Es bezeichnen  $A$  das Trägheitsmoment des Geschosses um eine Querachse durch den Schwerpunkt,  $C$  dasselbe um die Längsachse, so ist mit Rücksicht auf (4) der Drehimpuls des Geschosses:

$$\bar{J} = p \cdot A \cdot p + q_3 \cdot A \cdot q + \mathfrak{I}_3 \cdot C \cdot r. \quad (10)$$

Die Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit wird am besten mit Hilfe der Eulerschen Formel bestimmt:

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \left[ \frac{d\bar{J}}{dt} \right]_4 + \overline{\omega_4 \cdot \bar{J}}. \quad (11)$$

Hier bedeutet  $\left[ \frac{d\bar{J}}{dt} \right]_4$  die Änderung des Drehimpulses bezogen auf das System 4;  $\overline{\omega_4 \cdot \bar{J}}$  das vektorielle Produkt aus der Drehgeschwindigkeit  $\overline{\omega_4}$  dieses Systems gegenüber dem raumfesten System 1 und aus dem Drall  $\bar{J}$ . Führt man mit Hilfe der Gleichungen (10) und (5) die Operation (11) aus, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}}{dt} = & p \cdot \left[ A \cdot \frac{dp}{dt} + q \left( Cr - A \left( r - \frac{d\varphi}{dt} \right) \right) \right] \\ & + q_3 \left[ A \frac{dq}{dt} + p \left( A \left( r - \frac{d\varphi}{dt} \right) - Cr \right) \right] + \mathfrak{I}_3 \cdot C \frac{dr}{dt}. \end{aligned} \quad (11a)$$

(9) und (11a) in (II) eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{dp}{dt} + q \cdot \left[ Cr - A \left( r - \frac{d\varphi}{dt} \right) \right] &= M \\ A \cdot \frac{dq}{dt} + p \cdot \left[ A \left( r - \frac{d\varphi}{dt} \right) - Cr \right] &= 0 \\ C \cdot \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (IIa)$$

$pqr$  sind durch (4a) gegeben. Die Gleichungen (Ia) und (IIa) geben bei den Annahmen 1, 2, 3 und mit den erwähnten Ansätzen für die wirkenden Kräfte die Bewegungen des Geschosses; sie enthalten die 8 Variablen  $xyzv\theta\alpha\varphi$  und den Parameter  $t$ . Die Beziehungen

$$\frac{dx}{dt} = v \cdot \cos \vartheta; \quad \frac{dy}{dt} = v \cdot \sin \vartheta \quad (12)$$

reduzieren die Zahl der Unbekannten auf 6, entsprechend der Zahl der Gleichungen des Systems (Ia) und (IIa). (Der zutage tretende Gegensatz zwischen (12) und (7) beruht auf der Annahme 1.)

5. Die Lösung der Bewegungsgleichungen. Zwei Merkmale charakterisieren die Art der Geschößbewegung: das eine ist die

Größe des Anstellwinkels  $\alpha$ , das andere ist der Typus der Kreiselbewegung des Geschosses, die entweder als pseudoreguläre Präzession aufgefaßt werden kann oder nicht. Dieses zweite Merkmal wird bestimmt durch die Größe des schon oben erwähnten Stabilitätsfaktors  $\sigma$

$$\sigma = \frac{C^2 \cdot r^2}{4 A \cdot M / \sin \alpha}. \quad (13)$$

Für  $\sigma \geq 1$  ist die Kreiselbewegung stabil. Wir unterscheiden nun 4 Fälle, von denen jeder eine andere Lösung der Bewegungsgleichungen erfordert: 1. Fall:  $0 < \alpha < 5^\circ$ ;  $\sigma > 20$ ; 2. Fall:  $0 < \alpha < 5^\circ$ ;  $1 < \sigma < 20$ ; 3. Fall:  $\alpha > 5^\circ$ ;  $\sigma > 20$ ; 4. Fall:  $\alpha > 5^\circ$ ;  $1 < \sigma < 20$ .

Die hier angegebenen Grenzen  $\alpha = 5^\circ$  und  $\sigma = 20$  sind als ganz rohe Anhaltswerte zu betrachten; ihre Zweckmäßigkeit ist durch einige Erfahrungen erprobt. Die Beschränkung auf Winkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $5^\circ$  (oder bei Zulassung größerer Fehler auch wohl noch zwischen  $0^\circ$  und  $30^\circ$ , wie Nöther vorschlägt), gestattet, in den Ausdrücken für  $W_t$  und  $W_s$ ,  $\lambda_t = 1$  und  $\lambda_s = 0$  und in denjenigen für  $K$   $\sin \alpha = 0$  zu nehmen.

Damit wird  $W_s = 0$ ;  $K = 0$  und  $W_t$  wird von  $\alpha$  unabhängig; (Ia) wird zu:

$$-m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = W_t \cdot \cos \vartheta; \quad -m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = W_t \sin \vartheta + P. \quad (\text{Ib})$$

D. h. die Bahn des Schwerpunkts wird, unabhängig von den Gleichungen (IIa) der Rotation, einfach nach einer der früheren Methoden (Abschnitt 4 bis 7) berechnet, wodurch man  $xyv\vartheta$  in Funktion der Zeit  $t$  erhält. Ferner die Beschränkung  $\sigma > 20$  besagt, daß die Art der Kreiselbewegung eine pseudoreguläre Präzession ist (F. Klein und A. Sommerfeld geben in ihrem Kreiselbuch als Grenzwert  $\sigma = 25$  an). In diesem Fall können die Komponenten des Impulsvektors  $\vec{J}$  senkrecht zur Figurenachse  $\mathfrak{t}_3$  vernachlässigt werden, und es wird (10) zu

$$\vec{J} = C \cdot r \cdot \mathfrak{t}_3. \quad (10a)$$

Deshalb vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (IIa) wie folgt:

$$C \cdot r \cdot q = M; \quad -C \cdot r \cdot p = 0; \quad C \cdot \frac{dr}{dt} = 0.$$

Von diesen Gleichungen liefert die letzte durch Integration

$$C \cdot r = \text{konst.} = N; \quad (14)$$

und die beiden anderen ergeben wegen (4a)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{M}{N \cdot \sin \alpha} + \frac{\sin \psi}{\tan \alpha} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIb})$$

Diese Gleichungen ergeben  $\alpha$  und  $\psi$  in Funktion von  $t$ , da durch die Lösung des Gleichungssystems (Ib)  $v$  und  $\vartheta$  für jedes  $t$  als bekannt anzusehen sind.

Bemerkt sei noch, daß die Gleichungen (IIb), die schon N. Mayevski analytisch abgeleitet hat, für kleine  $\alpha$  auch durch einfache geometrische Infinitesimalbetrachtungen gewonnen werden können (vgl. darüber die Auflage von 1910, S. 328). Zu diesem Zweck sei an die in § 57 erwähnte graphische Konstruktion erinnert; s. Abb. 93. Die Tangentenspitze, die zu Anfang einer Präzessionsperiode in  $O$  war, sei jetzt in  $T$  angelangt; die Geschößspitze, die anfangs ebenfalls in  $O$  lag, möge sich jetzt, zur Zeit  $t$ , im Punkt  $A$  befinden. Wenn die Bahntangente ihre Richtung im Raum beibehielte, müßte die Geschößachse um die Bahntangente  $ST$  herum einen Kreiskegel beschreiben; es wäre dann die partielle Änderung  $\delta\psi$  des Winkels  $\psi$  in der Zeit  $dt$  gegeben durch

$\delta\psi = \frac{M/\sin\alpha}{C \cdot r} \cdot dt$ . Tatsächlich bewegt sich jedoch gleichzeitig das Ende  $T$  der

Bahntangente in der Zeit  $dt$  nach  $T_1$  abwärts. Der Neigungswinkel  $\vartheta$  der Tangente nimmt dabei ab um  $d\vartheta$  (in der Figur Großkreisbogen  $TT_1 = -d\vartheta$ ). Wenn man also voraussetzt, daß für das Zeitdifferential  $dt$  diese beiden Bewegungen voneinander unabhängig seien, so gelangt zuerst, bei gleichbleibender Lage von  $T$ , die Geschößspitze von  $A$  nach  $B$ , und hierauf rückt, bei gleichbleibender Lage von  $B$ ,  $T$  abwärts nach  $T_1$ . Der Winkel  $TT_1B$  der Stoßebene gegen die Vertikalebene durch die Bahntangente ist somit nach Verlauf der Zeit  $dt$  im ganzen zu  $\psi + d\psi$  geworden; und gleichzeitig ist dadurch der Anstellwinkel zwischen Tangente und Geschößachse, der vorher  $TA = \alpha$  war, nunmehr zu  $T_1B = \alpha + d\alpha$  geworden. Die Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck  $TB_1T_1$  gibt  $(\alpha + d\alpha) : \alpha = \sin(\psi + d\psi) : \sin(\psi + \delta\psi)$ .

oder 
$$d\psi = \frac{M/\sin\alpha}{C \cdot r} \cdot dt - \operatorname{tg}\psi \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Fällt man ferner das Lot von  $T$  auf  $T_1B$ , so folgt:  $d\alpha = -\cos\psi \cdot d\vartheta$ . Damit hat man wieder die obigen Gleichungen (IIb) für kleine  $\alpha$ .

Dem obigen zufolge kann man die Schwerpunktsbahn statt durch die genauen Gleichungen (Ia) zunächst in erster Annäherung mit den Gleichungen (Ib) berechnen, falls  $\alpha < 5^\circ$  ist.

Und falls  $\sigma > 20$  ist, können die Pendelbewegungen des Geschosses um den Schwerpunkt statt durch die genauen Rotationsgleichungen (IIa) mittels der einfacheren Gleichungen (IIb) berechnet werden. Danach gestaltet sich die Berechnung in den einzelnen Fällen wie folgt:

a) Erster Fall:  $\alpha < 5^\circ$ ;  $\sigma > 20$ . Dieser Fall umfaßt alle Flachbahnen und den ersten Teil aller Steilbahnen von eingeführten Geschossen bis auf das erste sich an die Geschützöffnung anschließende mehr oder weniger kurze Stück, das dem zweiten Falle angehört. (Wie bei Behandlung des zweiten Falles gezeigt werden wird, läßt sich der erste Fall auf Bahnen bis  $\sigma > 1,5$  ausdehnen.)

Man hat für diesen Fall die vereinfachten Gleichungen (Ib) und (IIb) zu verwenden. Aus (Ib) erhält man  $v$  und  $\vartheta$  in Funktion von  $t$ . Damit gewinnt man  $\alpha$  und  $\psi$  aus (IIb). Jetzt ist man imstande,

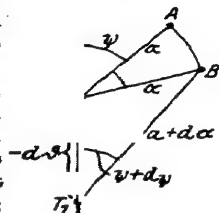


Abb. 93.



mit Hilfe von (Ia) die durch die Geschoßrotation bewirkten Änderungen der Koordinaten, insbesondere die Änderung der Schußweite und die Seitenabweichung zu ermitteln.

Eine Lösung der Gleichungen (IIb) in geschlossener Form ist von F. Noether angegeben. Dabei wird die mit (Ib) gewonnene Schwerpunktsbahn durch eine Parabel angenähert und das Luftwiderstandsmoment  $M$  proportional  $v^2 \cdot \sin \alpha$  angenommen. Unter den für diesen ersten Fall gegebenen Einschränkungen erscheinen diese Näherungen durchaus erlaubt, zumal gegenüber dem Resultat einer geschlossenen Lösung der Gleichungen (IIb), daß eine mühevoll stückweise Integration überflüssig macht, die durch die Näherungen verursachten, sicherlich nicht sehr großen Fehler gerne in Kauf genommen würden. Jedoch ist dieses Resultat recht kompliziert und müßte zum praktischen Gebrauch jedenfalls noch umgearbeitet werden. Um die Seitenabweichung zu erhalten, muß die Lösung von (IIb) in (Ia) eingesetzt werden. Dieses geht nun bei Noether nicht ohne weitere vereinfachende Annahmen, die in ihrer Wirkung schwer zu übersehen sind. Die Brauchbarkeit dieses vielversprechenden Verfahrens müßte zunächst durch praktische Beispiele an Hand der Erfahrung erprobt werden, was bisher noch nicht geschehen ist.

Das sicher zum Ziele führende Verfahren ist das der stückweisen Integration. Besonders einfach dient hierfür das bereits in § 57 und kurz zuvor besprochene Cranzsche graphische Verfahren. Der Grundgedanke ist der folgende: Man wählt ein Zeitintervall  $\Delta t$ , für welches 1. die (durch die bereits erfolgte Lösung von (Ib) bekannte) Flugbahn geradlinig, 2. die Funktion  $P = M \sin \alpha$  als konstant angesehen werden kann. Zu Beginn des Zeitelements sind in graphischer Darstellung nach Art der Abb. 93 gegeben:  $\vartheta_0$  (in der Abb.  $OT$ ),  $\alpha_0$  ( $TA$ ),  $\psi_0$  (Winkel  $OTA$ ); während der Zeit  $\Delta t$  sind  $\vartheta = \vartheta_0$ ,

$v = v_m$ , somit nach (IIb):  $\alpha = \alpha_0$  und  $\Delta \psi = \frac{P_0}{Cr} \cdot \Delta t$ , wobei  $P_0 = \frac{M(v_m, \alpha_0)}{\sin \alpha_0}$  ist.

$\Delta \psi$  wird in der graphischen Konstruktion an  $TA$  in  $T$  angetragen (als Winkel  $ATB$ ). Die Anfangswerte für das nächste Zeitelement  $\Delta t$  sind dann  $\alpha_1 = T_1B$ ,  $\psi_1 = OT_1B$ , wenn  $OT_1$  der diesem Zeitelement entsprechende Anfangswert  $\vartheta$ , von  $\vartheta$  ist. — Nun genügt es aber nicht,  $\Delta t$  nur den beiden angeführten Bedingungen zu unterwerfen; vielmehr müßte man verlangen, daß  $\Delta \psi$  eine gewisse Größe nicht überschreitet (etwa  $\Delta \psi < 30^\circ$ ). Dadurch würde nun aber  $\Delta t$  praktisch in vielen Fällen außerordentlich eingeschränkt, da, zumal solange  $\alpha$  sehr klein ist, die Präzessionsgeschwindigkeit  $\frac{d\psi}{dt}$  sehr groß sein kann.

In solchen Fällen empfiehlt es sich,  $\Delta t$  trotzdem nur durch die beiden erst angegebenen Bedingungen einzuschränken, nun aber das errechnete  $\Delta \psi$  durch eine ganze Zahl so zu teilen, daß die einzelnen Teile kleiner sind als etwa  $30^\circ$ . Man teilt dann die dem Zeitintervall  $\Delta t$  gehörige Strecke  $\Delta \vartheta$  in ebensoviele Teile und führt die Konstruktion entsprechend oft durch, wobei man für das Intervall keinerlei weitere Rechnungen anzustellen hat. Allerdings ist dann  $\alpha$  für jeden Einzelteil verschieden; doch kann man dessen ungeachtet in der Formel für  $\Delta \psi$  die Größe  $P_0$  mit dem Werte  $\alpha_0$  berechnen, da in der Tat für kleine Werte von  $\alpha$   $M \sin \alpha$  sich nur wenig mit  $\alpha$  ändert. — Hat man  $\alpha$  und  $\psi$  für die ganze Bahn gewonnen, so erhält man die Flugbahnkorrekturen und die Seitenabweichung aus der Gleichung (Ia) durch numerische oder graphische Verfahren der stückweisen Integration.

Über die Größe des Momentes  $M$  und der Kräfte  $W_i$ ,  $W_e$  ist in § 12 gesprochen. Sind diese Kraftgrößen nicht experimentell im

Luftkanal oder auf anderem Wege gewonnen, so wird man hier, wo es sich um kleine Winkel  $\alpha$  handelt, zur Not den Ansatz machen:

$$W_t = W_0, \quad W_s = W_0 \cdot \sin \alpha, \quad M = W_0 \cdot s \cdot \sin \alpha.$$

b) Zweiter Fall:  $\alpha < 5^\circ$ ;  $1 < \sigma < 20$ . Der zweite Fall schließt in sich den ersten mehr oder weniger kurzen Teil aller Bahnen. Wegen  $\alpha < 5^\circ$  erhält man die Schwerpunktsbahn in erster Näherung mit den Gleichungen (Ib). Zur Bestimmung der Elemente  $\alpha, \psi$  der Rotationsbewegung aber hat man wegen  $1 < \sigma < 20$  nun nicht das vereinfachte Gleichungssystem (IIb), sondern das System (IIa) zu integrieren. Da die praktische Lösung von (IIa) jedoch nicht ohne reichliche Mühe und Rechenarbeit möglich ist, und da im allgemeinen das weitaus größte Stück einer Flugbahn mit kleinem  $\alpha$  zum ersten Fall und nur ein kleines Stück zum zweiten Fall gehört, so wird man in den meisten Fällen, in denen es sich um die Berechnung von Flugbahnen handelt, für das diesem zweiten Fall angehörige Stück der Bahn auf die Kenntnis der Rotationsbewegung verzichten. Andererseits aber muß man danach trachten, die Grenze zwischen dem ersten und zweiten Falle möglichst zu kleineren Werten von  $\sigma$  hin zu verschieben. Durch ein Fehlerabschätzungsverfahren, wie Klein und Sommerfeld es in ihrer Kreiseltheorie angegeben haben und das auf Reihenentwicklung beruht, läßt sich nun in der Tat ein Korrekturwert für die nach der Näherungsformel berechneten Werte von  $\Delta\psi$  entwickeln. Diese Korrekturwerte sind in der nachstehenden Tabelle angegeben. Sei  $\Delta\psi_0$  der nach der Näherungsformel gewonnene Wert  $\Delta\psi_0 = \frac{M/\sin \alpha}{C \cdot r} \cdot \Delta t$ , so ist der korrigierte Wert  $\Delta\psi = \Delta\psi_0 (1 - \mu)$ . Für kleine Winkel  $\alpha$ , wie diese hier im ersten und zweiten Falle vorausgesetzt sind, ist dann  $\mu$  wie folgt in Abhängigkeit von  $\sigma$  gegeben:

$\sigma = 30$	20	15	10,0	8,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,8	1,6
$100 \cdot \mu = 2,4$	3,6	4,7	7,0	8,5	11,1	12,9	15,9	19,6	26,5	29,2	33,0

(Die drei letzten Werte beanspruchen keine unbedingte Genauigkeit.)

Somit sind alle Flugbahnen mit  $\sigma$  zwischen 1,5 und 20 der stückweisen Integrationsmethode des ersten Falles übergeben. Handelt es sich jedoch nicht um die Berechnung von Bahnen, will man vielmehr das Verhalten eines Geschosses auf dem ersten Stück seines Weges nach Verlassen der Geschützöffnung studieren, für welches Stück bei größeren Geschwindigkeiten stets sehr nahe  $\sigma \approx 1$  ist, so wird man von der Krümmung der Bahn überhaupt absehen, also  $\vartheta = \vartheta_0$  und  $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$  setzen. Dann fallen in den Glei-

chungen (4a) für  $pqr$  die Glieder mit  $\frac{d\vartheta}{dt}$  fort:

$$p = \frac{d\alpha}{dt}; \quad q = \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \alpha; \quad r = \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \alpha + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Werden diese Ausdrücke in (IIa) eingesetzt, so erhält man der Art nach die Gleichungen des symmetrischen schweren Kreisel. Die ersten Integrale dieser Gleichungen lassen sich ohne Schwierigkeiten aufstellen; sie lauten in der von Klein und Sommerfeld angegebenen Form:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sqrt{U} \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{n - N \cdot u}{A(1 - u^2)}; \end{cases}$$

dabei ist

$$u = \cos \alpha; \quad N = C \cdot r (= \text{konst.}),$$

$$U = \frac{1}{A^2} \left[ (1 - u^2) \left( k - N^2 - 2 \frac{AM}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u \right) - (n - Nu)^2 \right].$$

Der Ausdruck für  $\frac{d\varphi}{dt}$  interessiert hier nicht.  $n$  und  $k$  sind Integrationskonstanten. Man wird, um formal in Übereinstimmung mit den Kreiselgleichungen zu kommen, den Ansatz machen:  $M = P \cdot \sin \alpha$ . Beschränkt man sich dann auf Bahnstücke, für welche  $P = \text{konst.}$  genommen werden kann, so sind die Gleichungen völlig in Übereinstimmung mit den Kreiselgleichungen und können also mittels elliptischer Funktionen an Hand der Kreiseltheorie, wie man sie z. B. in dem klassischen Werk von Klein und Sommerfeld findet, gelöst werden. Grammel gibt eine Erweiterung dieser Lösung für den Fall, daß  $P$  eine analytische Funktion von  $u = \cos \alpha$  ist, was die Lösung in diesem Falle verbessert, da der oft nicht unbedeutenden Nutationspendelungen wegen  $P$  unter Umständen über das zulässige Maß hinaus mit  $\alpha$  schwanken kann.

Es muß bemerkt werden, daß man beim Studium des ersten Stückes der Bahn die Anfangsbedingungen zu beachten hat. Man kann an der Geschützöffnung wohl  $\alpha = 0$ ,  $\psi = 0$ , allenfalls noch  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  annehmen, sicherlich aber wird im allgemeinen  $\frac{d\alpha}{dt}$  einen von Null verschiedenen Wert haben. (Über diese sogenannten Stoßnutationen ist unter § 57, 5 bereits gesprochen.)

c) Dritter Fall:  $\alpha > 5^\circ$  und  $\sigma > 20$ . Dieser Fall umfaßt alle Steilbahnen mit Ausnahme ihres ersten Teils, der zum ersten oder zweiten Fall gehört, und gegebenenfalls ihres letzten Teils, der zum vierten Fall gehören kann.

Man hat die Gleichungssysteme (Ia) und (IIb) zu verwenden. Da (Ia) nicht unabhängig von (IIb) ist, so bleibt nichts anderes

übrig, als beide gemeinsam mit einem Verfahren der stückweisen Integration zu behandeln; dies sei das folgende:

Die Indizes 0 mögen sich beziehen auf den Anfang des betr. Zeitelements  $\Delta t$ , die Indizes 1 auf das Ende von  $\Delta t$ , die Indizes  $m$  mögen Mittelwerte für das Zeitelement  $\Delta t$  bedeuten. Gegeben seien  $t_0, \vartheta_0, \alpha_0, \psi_0, v_0, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, x''_0, y''_0, z''_0$  und  $\delta(y_0)$ . Gewählt wird  $\Delta t$ , so daß  $t_1 = t_0 + \Delta t$ . Man schätzt nun  $\vartheta_1, v_1, \psi_m$  und  $\delta(y_1)$ . Damit hat man  $\Delta \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0$ , ferner  $\Delta \alpha = -\Delta \vartheta \cdot \cos \psi_m$  (wegen der zweiten Gleichung (IIb)), weiter  $\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta \alpha$ ;  $\alpha_m = \alpha_0 + \frac{1}{2} \Delta \alpha$ ;  $v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$  und  $\delta(y_m)$ . Jetzt läßt sich der von  $v_m, \alpha_m$  und  $\delta(y_m)$  abhängende Mittelwert  $M_m$  gemäß § 12 berechnen:  $M_m = \lambda_0(v_m) \cdot v_m^2 \cdot \pi R^2 \cdot \frac{\delta(y_m)}{\delta_0} \cdot s \cdot \lambda_m(\alpha_m)$ , folglich auch

(wegen der ersten Gleichung (IIb)) die Änderung  $\Delta \psi = \frac{M_m}{N \cdot \sin \alpha_m} \cdot \Delta t + \frac{\sin \psi_m}{\tan \alpha_m} \cdot \Delta \vartheta$ .

Daraus ergibt sich  $\psi_1 = \psi_0 + \Delta \psi$ ; und als Probe hat man  $\psi_m = \psi_0 + \frac{1}{2} \Delta \psi$ , was mit dem geschätzten Wert  $\psi_m$  übereinstimmen muß. Nun wird für  $t = t_1$  der Wert von  $W_t$  und  $W_s$  und  $K$  berechnet (gemäß § 12 ist dies für  $W_t$  und  $W_s$ , wie ja auch für  $M$ , nur möglich, falls aerodynamische Messungen ( $\lambda_t, \lambda_s, \lambda_m$ ) vorliegen). Es ist dann:

$$W_{t_1} = \lambda_0(v_1) \cdot v_1^2 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta(y_1)}{\delta_0} \cdot \lambda_r(\alpha_1),$$

$$W_{s_1} = \lambda_0(v_1) \cdot v_1^2 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{\delta(y_1)}{\delta_0} \cdot \lambda_s(\alpha_1),$$

$$K_1 = \mu \cdot v_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \int_{h=0}^{h=H} \rho^2 \cdot dh \cdot \frac{\delta(y_1)}{\delta_0}$$

So erhält man gemäß (Ia)  $x_1'' y_1'' z_1'$  mit den für  $t = t_1$  geltenden Werten. Damit wird

$$\Delta x' = \frac{1}{2}(x_0'' + x_1'') \cdot \Delta t, \quad \text{somit} \quad x_1' = x_0' + \Delta x',$$

$$\Delta y' = \frac{1}{2}(y_0'' + y_1'') \cdot \Delta t, \quad \quad \quad y_1' = y_0' + \Delta y'.$$

Als Probe wird erhalten

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}, \text{ in Übereinstimmung mit dem geschätzten } v_1, \\ \vartheta_1 = \arctg \frac{y_1'}{x_1'}, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vartheta_1. \end{array} \right.$$

(Falls die Übereinstimmung nicht genügend ist, wird natürlich die Rechnung wiederholt.) Endlich wird berechnet:

$$\Delta z' = \frac{1}{2}(z_0'' + z_1'') \cdot \Delta t; \quad \text{hieraus} \quad z_1' = z_0' + \Delta z',$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(x_0' + x_1') \cdot \Delta t; \quad \quad \quad x_1 = x_0 + \Delta x,$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}(y_0' + y_1') \cdot \Delta t; \quad \quad \quad y_1 = y_0 + \Delta y,$$

$$\Delta z = \frac{1}{2}(z_0' + z_1') \cdot \Delta t; \quad \quad \quad z_1 = z_0 + \Delta z.$$

Diese Werte  $x_1, y_1, z_1$  gelten dann als Anfangswerte für das nächste Zeitintervall  $\Delta t$  usw. Die Schätzung der Werte  $\vartheta_1, v_1, \psi_m$  und  $\delta(y_1)$  geschieht am sichersten durch graphische Extrapolation. Bei den letzten Integrationen der  $x y z$  genügt es übrigens meistens, über zwei oder gar vier Zeitelemente auf einmal zu integrieren.

Die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens ist an den Umstand geknüpft, daß die Zeitelemente  $\Delta t$  genügend groß gewählt werden

können. Dazu ist aber notwendig, daß während des Zeitelements  $\Delta t$  die Mittelwerte  $\psi_m \alpha_m v_m$  genügend genau als Konstante anzusehen sind. Daß die  $\alpha$  und  $v$  eine genügend große Wahl von  $\Delta t$  zulassen, läßt sich einsehen; doch zeigt sich, daß im Bereiche dieses dritten Falles, wo  $\alpha > 5^\circ$  und  $\sigma > 20$  ist, auch die Änderung von  $\psi$  so langsam erfolgt, daß die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens gewährleistet ist.

Im Anfang jeder Flugbahn (eingeführte Geschosse vorausgesetzt) ist  $\alpha$  sehr klein; für die praktische Berechnung von Steilbahnen genügt es völlig, diesen Teil ausschließlich mit den Gleichungen (Ib) zu behandeln (also ohne Rücksicht auf die Rotationsbewegung); erst wenn  $\Delta \vartheta$  etwa  $3^\circ$  geworden ist, geht man zu der eben erwähnten Methode des dritten Falls über, indem man mit  $\psi_0 = 0^\circ$  beginnt; den bisher gewonnenen Erfahrungen zufolge ist dann  $\sigma$ , das anfangs klein ist (weil  $M$  groß), bereits  $> 20$  geworden.

d) Vierter Fall:  $\alpha > 5^\circ$ ;  $\sigma$  zwischen 1 und 20. Wegen  $\alpha > 5^\circ$  ist (Ia) und wegen  $1 < \sigma < 20$  ist (IIa) zu verwenden. Die stückweise Integration dieser beiden Gleichungssysteme würde eine ganz erhebliche Rechenarbeit erfordern und praktisch sogar unmöglich sein, da die rasche Änderung von  $\psi$  nicht gestatten würde,  $\Delta t$  genügend groß zu wählen. Aber wenn man voraussetzt, daß es sich um Geschosse handle, deren Länge, Form und Schwerpunktslage dem Drallwinkel der Züge einigermaßen angepaßt ist, so daß unzulässig große Anfangsnutationen ausgeschlossen sind, so scheint diesem vierten Fall für den weitaus größten Teil aller Geschosßbahnen überhaupt keine Bedeutung zuzukommen. Nur für den letzten Teil einer Steilbahn kann dieser Fall eine Rolle spielen, da hier  $\alpha$  groß und  $\sigma$  wegen der wachsenden Geschwindigkeit  $v$  (des wachsenden Moments  $M$ ) erheblich klein sein kann. In § 57 wurde schon erläutert, daß auf diesem Teile der Bahn das Geschosß ähnlich einem schweren Kreisel sehr rasche, mehr und mehr kreisförmige Präzessionsbewegungen um die Bahntangente beschreibt, deren Richtung sich nur mehr wenig ändert. Daher wird man diesen letzten Teil einer steilen Bahn eben dieser Verhältnisse wegen mit genügender Annäherung so behandeln: Man betrachtet  $\alpha$  als konstant und nimmt an, daß alle Kraftkomponenten senkrecht zur Bahntangente sich im Verlauf der Bewegung je in ihrer Wirkung aufheben. Das bedeutet, daß in der Gleichung (Ia) alle Glieder, die  $W_x$  und  $K$  enthalten, fortfallen, daß also (Ia) formal in (Ib) übergeht und daher unabhängig von der Rotationsbewegung behandelt werden kann. Der Unterschied gegenüber der Gleichung (Ib), wie sie bisher gebraucht wurde, besteht darin, daß dort der Koeffizient  $\lambda_z$  von  $W_z = 1$  gesetzt war,

während hier  $\lambda_t = \lambda_t(\alpha_c)$  ist, wenn  $\alpha_c$  der für diesen letzten Teil der Bahn als konstant angenommene Wert von  $\alpha$  ist.

6. Zahlenbeispiele zur Berechnung von Geschößteilhahnen. Die im folgenden angeführten Ergebnisse von Steilhahn-berechnungen sind nach der für den dritten Fall angegebenen Methode durchgeführt.

Die Daten des den Berechnungen zugrunde gelegten Geschosses sind:  $2R = 0,250$  m;  $P = 97$  kg; Geschößlänge  $H = 1,05$  m; Entfernung von Schwerpunkt bis Mitte Spitze  $0,430$  m; ogivale Spitze von 2 Kal. Abrundungsradius; Trägheitsmomente  $A = 0,246$  mkgsec<sup>2</sup>,  $C = 0,0926$  mkgsec<sup>2</sup>. Die Koeffizienten der Luftwiderstandsgrößen  $\lambda_t$ ,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_m$  für dieses Geschöß entstammen Versuchen, die im Göttinger Luftkanal von Prandtl ausgeführt sind, und sind in § 12 bereits mitgeteilt. In der nachstehenden Tabelle sind die Rechnungsergebnisse angeführt, soweit sie die Seitenabweichung des Geschosses betreffen. Die lineare Zusammensetzung der Beschleunigungsgrößen in den Gleichungen (1a) gestattet die Trennung der Einflüsse von Kreiselekt und Magnuseffekt, was für die Beurteilung ihrer Größe lehrreich ist. Die Schußtafel, welcher die Vergleichswerte entnommen sind, enthält keine Angaben über die Anfangsgeschwindigkeiten. Es sind daher die Werte von Schußweite und Seitenabweichung für mehrere Ladungen angeführt, soweit die Schußtafel sie enthält.

Herkunft	Ladung	Flugbahn	Abgangswinkel	Anfangsgeschwindigkeit	Flugzeit	Schußweite	Seitenabweichung	Beitrag des Luftwiderstandes	Beitrag der Magnuskraft
		Nr.	$\vartheta_0$ Grad	$v_0$ m/sec	$T$ sec	$X$ m	$Z$ m	$Z_w$ m	$Z_k$ m
Schußtafel	III	—	60	—	—	544	28	—	—
"	II	—	60	—	—	441	21	—	—
"	I	—	60	—	—	357	11	—	—
Rechnung	—	1	60	64	11,6	350	8,6	13,6	-5,0
Schußtafel	III	—	63	—	—	496	27	—	—
"	II	—	63	—	—	410	21	—	—
"	I	—	63	—	—	328	5,5	—	—
Rechnung	—	2	63	64	11,9	322	2,5	8,3	-5,8
Schußtafel	I	—	66	—	—	296	-2,6	—	—
Rechnung	—	3	66	64	21,1	293	-1,8	4,8	-6,6

Die weniger gute Übereinstimmung von Rechnung und Schußtafel bei der Flugbahn Nr. 3 hat ihren Grund darin, daß für diese Bahn der Winkel  $\alpha$  auf einer längeren Strecke größer als  $90^\circ$  ist, die Koeffizienten  $\lambda$  jedoch nur für  $\alpha \leq 90^\circ$  ermittelt sind, so daß für dieses Stück der Bahn gewisse mehr oder weniger willkürliche Annahmen über diese Koeffizienten gemacht werden mußten. Doch findet man Einzelheiten hierüber und insbesondere auch den Verlauf der  $x y z v \vartheta \alpha \psi$  in der Originalarbeit (Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. S. 449, 1924).

Aus den hier angeführten Zahlen läßt sich erkennen, daß der Magnuseffekt eine immer größere Rolle spielt, je steiler die Bahn ist: Bei den Abgangswinkeln  $60^\circ$  und  $63^\circ$  ist noch Rechtsabweichung; der Kreiselekt

überwiegt noch den Magnuseffekt. Dagegen bei  $\vartheta_0 = 66^\circ$  haben sich schon die Verhältnisse umgekehrt; der Kreiseffekt allein für sich würde eine Rechtsabweichung (+4,8 m) liefern; jedoch der Magnuseffekt ergibt für sich allein eine Linksabweichung (-6,6 m), so daß im ganzen eine Linksabweichung resultiert (-2,6 m nach der Schußtafel, -1,8 m nach der Rechnung).

7. Es bleibt noch einiges über die durch Annahme 3 (s. den 4. Abschnitt dieses § 58) vernachlässigten drei Momente zu sagen. Während die drei Kräfte  $W_z$ ,  $W_y$ ,  $K$  und das Moment  $M$  prinzipiell, zum mindesten für Unterschallgeschwindigkeiten, bestimmbar sind ( $W_z$ ,  $W_y$ ,  $M$  für jedes Geschosß im Luftkanal,  $K$  mit dem oben angegebenen Faktor  $\mu = 0,014 \text{ m}^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{sec}^2$ ), so ist dies mit den angeführten drei Momenten gegenwärtig noch nicht möglich.

Die Bestimmung des von der Magnuskraft herrührenden Momentes ist bislang weder theoretisch noch praktisch in Angriff genommen. Es läßt sich von ihm zunächst nicht mehr aussagen, als daß es sicherlich sehr klein ist, da die Magnuskraft sehr nahe dem Geschosßschwerpunkt angreifen wird. Die Erfahrung scheint diese Vermutung zu bestätigen und läßt es zum mindesten als voll berechtigt erscheinen, das Moment in den Rechnungen auch dann zu vernachlässigen, wenn die Magnuskraft selbst große Werte aufweist:

Bei den früher erwähnten Schießversuchen mit Holzgeschossen zeigte sich folgende Erscheinung. Von einem gewissen Abgangswinkel ab ergab sich durch weg Linksabweichung bei Rechtsdrall. Die Linksabweichung zeigte sich hauptsächlich auf dem letzten Teil des absteigenden Bahnastes, und wenn dabei der Winkel zwischen Geschosßachse und Bahntangente etwa ein rechter war, so glitt das Geschosß ganz auffallend sich selbst parallel bleibend und ohne jegliche Pendelungen nach links ab. (Die Schußweiten gingen dabei bis über 300 m.) Aus dieser auffallenden Erscheinung schließen wir: das Moment der Magnuskraft ist so gering, daß es keinen wahrnehmbaren Einfluß auf die Rotationsbewegung des Geschosses hat; denn sonst hätte es gerade in dem angeführten Falle unbedingt zu Pendelungen Anlaß geben müssen. Das Luftwiderstandsmoment stört in diesem Falle die Erscheinungen nicht, da es bei einem in der Nähe von  $90^\circ$  liegenden Wert des Anstellwinkels  $\alpha$  gleich Null ist.

Rechnet man das — mit  $\bar{L}$  bezeichnete — Moment der Magnuskraft positiv, wenn die Magnuskraft an einem zwischen Schwerpunkt und Spitze gelegenen Punkt der Geschosßachse angreift, dann ist in der oben eingeführten Vektorschreibweise:

$$\bar{L} = -L \cdot q_s.$$

Das Moment der Luftreibung bewirkt eine Bremsung der Geschosßrotation um seine Längsachse, also eine Verkleinerung der Rotationsgeschwindigkeit  $r$ . Was die Größe dieses Momentes anbetrifft, so liegen zwar einige Messungen von Neesen in Deutschland und von Hill in England, ebenso eine Theorie von E. Röggle (Österreich) darüber vor (vgl. Band III), aber die experimentellen

Unterlagen sind zu wenig ausgedehnt, um einen genügend sicheren Anhalt zu Berechnungen abzugeben.

Rechtsdrall vorausgesetzt, ist die Lage dieses mit  $\bar{R}$  bezeichneten Momentes der Luftreibung gekennzeichnet durch die Gleichung:

$$\bar{R} = -R \cdot \mathbf{i}_3.$$

Das durch die Drehgeschwindigkeit der Geschoßachsenlage im Raum verursachte Luftwiderstandsmoment, das mit  $\bar{H}$  bezeichnet sei, haben (wie eingangs dieses § 58 erwähnt) die Engländer Fowler usw. zahlenmäßig zu bestimmen gesucht. Sie erhalten bei einem Ansatz:  $H = \rho \cdot v \cdot w \cdot R^4 \cdot \lambda_h$  Werte für den Faktor  $\lambda_h$  zwischen 30 und 90 bei einer Genauigkeit von etwa 50% und bei Geschwindigkeiten  $v$  von 300 bis 700 m/sec. In der Formel sind:  $\rho$  die Luftdichte;  $v$  die Schwerpunktseschwindigkeit;  $2R$  das Kaliber;  $w$  die Rotationsgeschwindigkeit der Geschoßachse um die Bahntangente. In unserer Schreibweise ist  $w$  zu bestimmen aus der Vektorgleichung:

$$\bar{w} = p \cdot \frac{d\alpha}{dt} + q_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \alpha; \text{ also ist } w = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin^2 \alpha}.$$

Die Lage des Momentes  $\bar{H}$  ist gekennzeichnet durch die Gleichung:

$$\bar{H} = -H_1 \cdot p - H_2 \cdot q_3.$$

Hierin sind  $H_1$  der von  $\frac{d\alpha}{dt}$ ,  $H_2$  der von  $\frac{d\psi}{dt} \cdot \sin \alpha$  gelieferte Beitrag zu dem Momente  $H$ .

Man wird berücksichtigen müssen: das Moment  $\bar{L}$  bei Steilbahnen (Fall 3) (vorausgesetzt, daß man es überhaupt zu berücksichtigen braucht, was wir auf Grund der mitgeteilten Erfahrungstatsachen verneinen), das Moment  $\bar{R}$  bei Fernbahnen, das Moment  $\bar{H}$  bei raschen Präzessionen und größeren Nutationen, d. h. bei kleinem Stabilitätsfaktor  $\sigma$  (Fall 2).

Es seien nun noch die vollständigen Bewegungsgleichungen des Geschosses angeschrieben. Mit Berücksichtigung der drei Zusatzmomente wird das Gesamtmoment  $\bar{M}_0$  der äußeren Kräfte:

$$\bar{M}_0 = p \cdot (M - H_1) - q_3 \cdot (L + H_2) - \mathbf{i}_3 \cdot R.$$

Die Grundgleichung (II) (in welcher nun  $\bar{M}$  durch  $\bar{M}_0$  zu ersetzen ist) wird dann mit Rücksicht auf (IIa) zu (IIc):

$$(IIc) \quad \begin{cases} A \cdot \frac{dp}{dt} + q \cdot \left[ C \cdot r - A \cdot \left( r - \frac{dq}{dt} \right) \right] = M - H_1, \\ A \cdot \frac{dq}{dt} + p \cdot \left[ A \cdot \left( r - \frac{dq}{dt} \right) - C \cdot r \right] = -L - H_2, \\ C \cdot \frac{dr}{dt} = -R. \end{cases}$$



Hierin sind  $p, q, r$  gemäß Gleichung (4 a) Funktionen der Elemente  $\theta, \alpha, \psi, \varphi$  und deren Ableitungen nach der Zeit.

Unter den in den Abschnitten 2. und 3. dieses § 58 gemachten Annahmen 1 und 2 bilden die Gleichungen (Ia) und (IIc) die allgemeinsten Bewegungsgleichungen des Geschosses.

8. Bisher waren die Betrachtungen so angestellt, daß es sich bei gegebenen Luftwiderstands- usw. Funktionen um die Berechnung der Flugbahnelemente handelte. Umgekehrt, wenn es gelingen würde, in Funktion der Zeit  $t$  nicht nur die Bahnelemente  $xyz\theta$  des Geschosßschwerpunkts in dessen Flugbahn, sondern auch die Winkel  $\alpha$  und  $\psi$ , welche die jeweilige Stellung der Geschosßachse gegenüber der Bahntangente angeben, photographisch festzulegen, so würden die drei Gleichungen (Ia) die Bestimmung der Kräfte  $W_z, W_s, K$ , die drei Gleichungen (IIc) die Bestimmung des Momentes  $M$  und noch eines der Zusatzmomente zulassen. (Die dritte Gleichung von (IIc) dient zur Bestimmung von  $r$ , in dem das unbekannte  $\varphi$  enthalten ist.) Bei Flachbahnen des Falles 1 wird man  $L$  und  $H$  vernachlässigen und  $R$  bestimmen; bei Steilbahnen (Fall 3) wird man  $H$  und  $R$  vernachlässigen und  $L$  bestimmen; endlich bei Flachbahnen des Falles 2 wird man  $L$  und  $R$  vernachlässigen und  $H$  bestimmen,  $H_1$  und  $H_2$  lassen sich ja auf eine Unbekannte, nämlich  $\lambda_\lambda$ , zurückführen. Dies dürfte das einzige Mittel sein, um die Abhängigkeiten und Gesetzmäßigkeiten der Kraftgrößen in Rücksicht auf Geschosßform und Drallwinkel sowohl, wie auf Geschwindigkeit  $v$  und Anstellwinkel  $\alpha$  einwandfrei zu gewinnen. Das Bestreben der Experimentalballistiker sollte daher auf diesen Punkt gerichtet sein.

Die ersten Anfänge zu einer solchen Ermittlung hat in Deutschland Jansen 1890 gemacht (s. Lit.-Note zu §§ 55 bis 60); in Japan 1908 M. Okochi, T. Terada und S. Yokota (s. Lit.-Note zu § 57); sehr bemerkenswert sind die neuerdings (1920) in England von Fowler, Gallop, Lock, Richmond angestellten Versuche (s. Lit.-Note zu §§ 55 bis 60). Diese letzteren Ballistiker bestimmten bei Flugbahnen auf einer kurzen Strecke (nahe der Geschützöffnung), welche der Geschosßbewegung der zweiten Art angehörte ( $\sigma \cong 1$ ), die Rotationsbewegung des Geschosses durch Beobachtung von Scheibendurchschlägen. Gemäß der vorigen Betrachtung konnten sie also die Momente  $M$  und  $H$  bestimmen. Zudem erreichten sie durch Schwerpunktsverlagerung bei ein und derselben Geschosßart die Bestimmung der Luftwiderstandskomponente  $W_z$  senkrecht zur Geschosßachse ( $W_s$  und  $M$  hängen ja durch eine Gleichung  $M = W_z \cdot a$  zusammen, wenn  $a$  der Abstand des Angriffspunktes der Luftwiderstandsergebnisse vom Schwerpunkt ist). Freilich ist zu bedenken, daß diese Methode nicht  $W_z$  und nicht  $W_s$  liefert. Ihre Ergebnisse reichen also nur für die Berechnung von Flachbahnen aus, bei denen  $\alpha$  klein ist, daher  $W_s \cong W_z$  und  $W_z(\alpha) \cong W_z(0) = W_0$  gesetzt werden kann.

## § 59. Näherungsformeln für die durch Geschoßrotation bewirkten Seitenabweichungen von Flachbahngeschossen.

### 1. Empirische Formel von Hélie

$$Z = A \cdot v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi; \quad \text{wobei} \quad A = 551 \cdot \frac{(2R)^2}{P} \cdot \text{tg } \Delta_1 \cdot \sin \gamma; \quad (1)$$

dabei ist  $Z$  (in m) die Abweichung des Geschosses im Mündungshorizont;  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit (in m/sec);  $\varphi$  der Abgangswinkel;  $P$  das Geschößgewicht (kg);  $\Delta_1$  der Enddrallwinkel des Rohrs;  $\gamma$  der halbe Öffnungswinkel an der Spitze des ogivalen Geschosses. Für dasselbe Geschütz- und Geschößsystem soll  $A$  („Ablenkungswert“ genannt) eine Konstante sein. Nach W. Heydenreich ist für die Turmhaubitze mit 21 cm Schrapnell  $A = 0,0166$  (verhältnismäßig kurzes Geschöß aus einem Rohr mit starkem Drall); für die schwere Feldkanone  $A = 0,0030$  (verhältnismäßig bedeutende Geschößlänge bei schwachem Drall).

2. E. Bravetta schlägt vor (s. Lit.-Note), bei großen Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  den Faktor  $A$  als lineare Funktion der Schußweite  $X$  zu nehmen,

$$Z = (A_1 + A_2 \cdot X) \cdot v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi \quad (2)$$

und  $A_1$  und  $A_2$  aus den Beobachtungen von  $Z$  für zwei verschiedene Werte von  $X$  zu berechnen.

3. P. Bertagna (s. Lit.-Note) gibt an, durch größere Versuchsreihen nachgewiesen zu haben, daß am besten die Formel zutrefte:

$$Z = \text{konst.} \cdot X \cdot \sin \varphi; \quad (3)$$

von anderer Seite ist dies bestritten worden.

4. Nach P. Haupt (1876) und P. Charbonnier soll, wenn mit  $\omega$  der spitze Einfallwinkel bezeichnet wird, bei großen Anfangsgeschwindigkeiten sein:

$$Z = \text{konst.} \cdot (\varphi + \omega) \cdot T \quad (4)$$

und nach P. Charbonnier bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten:

$$Z = \text{konst.} \cdot \varphi \cdot T. \quad (5)$$

5. E. Hamilton hat 1908 die Formel aufgestellt:

$$Z = \text{konst.} \cdot \frac{R^2 \cdot \text{tg } \Delta_1}{m} \cdot (\varphi + \omega) \cdot \sec \varphi. \quad (6)$$

6. C. Cranz hat 1898 in der Zeitschr. f. Math. u. Phys., 43. Jahrg., Heft 3 und 4 gelegentlich seiner in § 57 erwähnten graphischen Konstruktion der Geschößpendelungen (Abb. 87) die folgende Überschlagsrechnung zur Ermittlung der Seitenabweichungen angestellt:

Die beiden Gleichungen, die oben aus der betr. Konstruktionsfigur 93 (unter Voraussetzung kleiner Winkel  $\alpha$ ) abgelesen wurden, waren

$$d\psi = \frac{M/\sin \alpha}{C \cdot r} \cdot dt - \frac{\operatorname{tg} \psi \cdot d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad da = -\cos \psi \cdot d\vartheta$$

Wenn man hier  $\frac{M}{\sin \alpha}$  durch  $W \cdot a$  ersetzt und bedenkt, daß allgemein  $d\vartheta = -\frac{g \cdot \cos \vartheta}{v} \cdot dt$  ist, so wird

$$\frac{d(\sin \psi)}{d\alpha} + \sin \psi \cdot \cotg \alpha = f, \quad \text{wo} \quad f = \frac{v \cdot W \cdot a}{C r g \cos \vartheta}.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zwischen  $\sin \psi$  und  $\alpha$ . Der Faktor  $f$ , der mit dem oben benutzten „Folgsamkeitsfaktor“  $f$  identisch ist, kann wenigstens entlang eines einzelnen Zyklidenbogens als annähernd konstant behandelt werden, falls es sich um zahlreiche kleine Zyklidenbogen, also um eine genügende Folgsamkeit des Geschosses und damit um kleine Winkel  $\alpha$  handeln soll. Im Anfang eines solchen Bogens ist  $\psi = 0$  und, da immer wieder, nämlich im Anfang und am Ende eines solchen Bogens die Geschosachse mit der Bahntangente zusammenfällt, auch  $\alpha = 0$ . Damit ist die Integrationskonstante bestimmt, und es ist

$$\sin \psi = f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Wenn die Geschosachse in die Ebene durch Binormale und Bahntangente gekommen, also  $\psi = 90^\circ$  geworden ist, hat  $\alpha$  seinen Maximalwert entlang des Zyklidenbogens erreicht; dieser Wert oder die Pfeilhöhe des Zyklidenbogens ist also bestimmt durch die Beziehung  $\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_{\max}}{2} \right) = \frac{1}{f}$ ; bei kleinen Winkeln  $\alpha$  ist also  $\alpha_{\max} = \frac{2}{f}$ ; der Durchschnittsbetrag  $\frac{1}{f}$ .

Nun sei  $u$  oder  $\frac{dz}{dt}$  die Geschwindigkeit, mit der das Geschos (dessen Masse  $m$  ist) senkrecht zur Schußebene getrieben wird, dann ist  $m \cdot \frac{du}{dt}$  gleich der Ablenkungskraft, und diese kann proportional dem Luftwiderstand und dem Winkel  $\alpha$  gesetzt werden; somit hat man  $m \cdot \frac{du}{dt} = \text{konst.} \cdot W \cdot \frac{1}{f}$ ;  $du = \text{konst.} \cdot \frac{W \cdot C r \cdot g \cos \vartheta}{m \cdot v \cdot W \cdot a} \cdot dt$ , oder, da sich  $W$  weghebt,  $du = -\text{konst.} \cdot \frac{C \cdot r}{m \cdot a} \cdot d\vartheta$ . Also bleibt, falls wir  $r$  und  $a$  in erster Näherung als konstant betrachten, eine Differentialgleichung allein zwischen  $u$  und  $\vartheta$ . Da im Abgangspunkt, also für  $t = 0$ ,  $u = 0$  und  $\vartheta = \varphi$  ist, so hat man

$$u = \frac{dz}{dt} = \text{konst.} \cdot \frac{C \cdot r}{m \cdot a} \cdot (\varphi - \vartheta); \quad (7)$$

hieraus

$$z = \text{konst.} \cdot \frac{C \cdot r}{m \cdot a} \left( \varphi \cdot t - \int_0^t \vartheta \cdot dt \right). \quad (8)$$

Hier bedeutet, um dies zu wiederholen:  $C$  das Trägheitsmoment des Geschosses um die Längsachse;  $r$  die Winkelgeschwindigkeit des Geschosses um dieselbe Achse, wobei anfangs  $r = \frac{v_0 \operatorname{tg} \Delta_1}{R}$ ;  $\Delta_1$  den Enddrallwinkel der Züge;  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses;  $2R$  das Kaliber;  $m = \frac{P}{g}$  die Geschößmasse;  $P$  das Geschößgewicht;  $a$  den mittleren Abstand zwischen dem Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten auf der Achse und dem Schwerpunkt;  $\vartheta$  den Horizontalneigungswinkel der Bahntangente zur Zeit  $t$ ;  $z$  die Seitenabweichung zur Zeit  $t$ , positiv bei Rechtsdrall; konst. einen empirisch zu ermittelnden Wert. Durch eine Vorbereitung nach Art von Abschnitt 4 bis 7 sei  $\vartheta$  als Funktion von  $t$  erhalten; das Integral wird alsdann graphisch oder mit Hilfe des Integrativen mechanisch ausgewertet.

Eine für die Praxis geeignetere Formel ergibt sich aus (7) durch die folgende rohe Näherungsberechnung: Für ein zylindrisches Geschöß wäre  $C = m \cdot \frac{R^2}{2}$ . Ein Mittelwert von  $a$  ist bei kleinen Anstellwinkeln ungefähr proportional der Geschößlänge  $L$  oder  $2R \cdot l$ , wo  $l$  die Geschößlänge in Kalibern bedeutet.  $\vartheta$  ist anfangs  $= \varphi$ ; im Auffallpunkt ist  $\vartheta = -\omega$ ; somit ist  $\varphi - \vartheta$  anfangs  $= 0$ , im Auffallpunkt gleich  $\varphi + \omega$ ; das arithmetische Mittel ist  $\frac{1}{2}(\varphi + \omega)$ . Somit ergibt sich die Seitenabweichung  $Z(m)$  im Auffallpunkt des Mündungshorizonts zu:

$$Z = \lambda \cdot \frac{v_0 \operatorname{tg} \Delta_1}{l} \cdot (\varphi + \omega) \cdot T; \quad (9)$$

$\lambda$  ist ein empirisch zu bestimmender Faktor, der für die meisten Geschütze zwischen 0,005 und 0,01 liegt, wenn die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in m/sec, die Geschößlänge  $l$  in Kalibern, der Abgangswinkel  $\varphi$  und der spitze Auffallwinkel  $\omega$  in Graden, die Gesamtflugzeit in sec gemessen wird.

Diese Ableitung der Gleichung (9) zeigt, daß diese Formel schon wegen der Annahmen über  $C$ ,  $r$  und  $a$  nur einen Anhalt für die Bemessung der voraussichtlichen Seitenabweichung geben kann; aber die Gleichung (7), woraus (9) entstanden ist, läßt durch die Art ihrer Entstehung erkennen, daß sie nur unter der Voraussetzung einer durchgängigen Folgsamkeit der Geschößachse, also nur dann gelten kann, wenn die Geschößspitze unter Beschreibung zahlreicher und

kleiner Zykloidenbögen immer wieder ganz oder nahezu zur Bahntangente zurückkehrt, so daß  $\alpha$  dauernd klein bleibt.

**Zahlenbeispiel.** Für das Gewehr M. 71 sei angenommen:  $v_0 = 440$  m/sec;  $l = 2,6$  Kaliber; bei der Schußweite 1000 m sei  $\varphi = 3^\circ 20'$ ;  $\omega = 5^\circ 13'$ ;  $T = 3,92$  sec; Drallwinkel  $\Delta_1 = 3^\circ 36'$  (Rechtsdrall); danach ist die Rechtsabweichung:

$$Z = (0,005 \text{ bis } 0,01) \cdot \frac{440 \cdot \operatorname{tg} 5^\circ 13'}{2,6} \cdot (3^\circ 20' + 5^\circ 13') \cdot 3,92 = 1,7 \text{ bis } 3,4 \text{ m.}$$

Dies ist ein Betrag, der, wie früher erwähnt, leicht durch die zufällige Geschoßstreuung verdeckt werden kann.

7. E. Muzeau hat die Formel entwickelt:

$$Z = \text{konst.} \cdot X \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot f(\xi); \quad (10)$$

dabei ist

$$f(\xi) = \frac{4}{15\xi(\xi-1)} \cdot \left\{ \frac{2}{21} \cdot \frac{(3\xi-2)^{\frac{3}{2}} - 1}{\xi-1} - 1 \right\}; \quad \xi = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g \cdot X}.$$

Werte der Funktionen  $M$  und  $B$  von  $u$

(Tabelle von Langenskiöld).

$u$	$10^5 \cdot M(u)$	$10^4 \cdot B(u)$	$u$	$10^5 \cdot M(u)$	$10^4 \cdot B(u)$
700	00	00	400	1399	94560
690	14	34	390	1543	107560
680	29	137	380	1706	122670
670	45	317	370	1893	140870
660	62	580	360	2118	162230
650	80	935	350	2391	189670
640	99	1392	340	2724	224600
630	119	1953	330	3133	269600
620	140	2635	320	3640	328400
610	163	3448	310	4270	406000
600	188	4404	300	5060	510300
590	214	5516	290	6050	651000
580	242	6801	280	7234	832500
570	272	8274	270	8651	1065800
560	305	9953	260	10356	1366400
550	340	11863	250	12422	1755300
540	377	14027	240	14950	2262000
530	417	16467	230	17990	2910000
520	460	19216	220	21610	3725000
510	507	22305	210	25950	4746000
500	557	25774	200	31200	6035000
490	612	29659	190	37820	7667000
480	672	34020	180	45550	9744000
470	737	38897	170	55450	12409000
460	807	44357	160	68990	15862000
450	884	50470	150	84090	20390000
440	968	57320	140	105120	26420000
430	1060	64990	130	133140	34550000
420	1161	73590	120	171300	45780000
410	1273	83330	110	224600	61640000
400	1399	94560	100	301300	84690000

8. Endlich sei, ohne Ableitung, die von Mayevski-Vallier aufgestellte Formel für die Seitenabweichung  $z$  (m) in der Entfernung  $x$  (m) erwähnt:

$$z = \frac{1}{400} \cdot \psi \cdot \mu^2 \cdot \operatorname{tg} A \cdot \frac{1}{i(v_0)} \cdot \frac{1}{\beta \cdot R^2} \cdot v_0 \cdot x \left\{ \frac{B(u) - B(v_0)}{D(u) - D(v_0)} \cdot M(v_0) \right\} \cdot \sec^3 \varphi. \quad (11)$$

Hier ist  $\mu$  der Trägheitsradius des Geschosses um seine Längsachse in Halbkalibern;  $A$  der Enddrallwinkel;  $P$  das Geschößgewicht in Tonnen;  $R$  das Halbkaliber in m;  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit in m/sec;  $\psi$  eine Konstante gleich etwa 0,41, die übrigens für das betreffende Geschützsystem am besten empirisch ermittelt wird;  $i(v_0)$ ,  $\beta$ ,  $u$ ,  $D(u)$ ,  $D(v_0)$  beziehen sich auf das Lösungssystem Tabelle 10a des Anhangs;  $M(v_0)$  ist durch die obige Tabelle von Langenskiöld gegeben, ebenso  $B(u)$  und  $B(v_0)$ .

Beispiel.  $2R = 0,27$  m;  $P = 0,180$  t;  $v_0 = 505$  m/sec; Geschößlänge = 2,5 Kal.;  $\mu = 0,8$  Halbkaliber;  $\psi = 0,41$ ;  $A = 4^\circ$ . Für  $\varphi = 1^\circ 11'$  und  $x = 1000$  m wird  $z = 0,4$  m; für  $\varphi = 14^\circ 10'$  und  $x = 7000$  m wird  $z = 49,9$  m (beobachtet nach Vallier 47,7 m).

## § 60. Demonstrationsmittel zur Lehre von den Geschoßpendelungen und Geschoßabweichungen.

### A. Apparat von Perrodon.

Auf einer krummen Schienenbahn von der Form der Flugbahn läßt man eine Art von Wagen laufen, auf dem sich ein Bohnenberger-sches Maschinchin mit einem Geschoßmodell befindet. Das Langgeschoß hängt frei beweglich in kardanischer Aufhängung und wird rasch rotiert. Der Luftwiderstand wird nachgeahmt durch den Druck einer Spiralfeder, die in der Richtung der Wagenachse (entsprechend der Richtung der jeweiligen Flugbahntangente) wirkt. Auf diese Weise wird konische Pendelung erhalten, und Perrodon sucht so eine Beziehung für die Geschoßstabilität.

### B. Vorlesungsapparat von Pfaundler.

Er dient dazu, die Stabilität der Achse eines rotierenden Geschosses und die mit der Rotation verbundene konische Pendelung zu demonstrieren. Ein Spitzgeschoß wird in einem wagrechten Rahmen, der leicht beweglich aufgehängt ist, in Rotation versetzt. Am hinteren Ende kann ein Windflügel angeschraubt und in jede beliebige Lage gebracht werden. Damit soll sich die konische Pendelung zeigen lassen, die nach der einen oder anderen Seite erfolgt, je nach dem Sinn der Rotation und der Stellung des Flügels.

**C. Stoßapparat von Ludwig (vgl. Lit.-Note).**

Ein kleines Geschosßmodell aus Holz wird auf das eine Ende der Drehachse des Apparats aufgesteckt, der von Hand in Bewegung zu setzen ist. Durch Hammerschlag auf das andere Ende der Achse wird das Geschosßmodell fortgestoßen.

**D. Vorlesungsapparat von A. von Obermayer und V. v. Niesiolowski.**

Aus einem kräftigen Ventilator wird ein Luftstrom von großem Querschnitt gegen ein Geschosßmodell geblasen, das in kardanischer Aufhängung um den Schwerpunkt drehbar ist; damit wird die durch den Luftwiderstand bewirkte Präzessionsbewegung gezeigt.

Auch Verwendung von magnetischen Kräften wurde von anderer Seite verschiedentlich vorgeschlagen (vgl. Lit.-Note).

**E. Der Verfasser verwendete von 1909 ab die folgenden Mittel zur Demonstration der Geschosßpendelungen und Geschosßabweichungen:**

a) Werfen mit Holzscheiben oder flachen Steinen. Mit einer kreisrunden Holzscheibe von etwa 8 cm Durchmesser und  $\frac{1}{2}$  cm Dicke oder mit einem glatten und flachen Stein läßt sich auf einem freien Platz von 60 bis 80 m Länge ein Teil der Kreiselbewegungen der Geschosse deutlich zeigen. Die Scheibe sei, wie dies beim Werfen eines solchen Körpers üblich ist, zwischen Daumen und Mittelfinger gehalten und teilweise vom Zeigefinger umfaßt. Ihre Ebene stehe senkrecht zur beabsichtigten Flugbahnebene und bilde gegen den Horizont einen Winkel von etwa  $30^\circ$ . Beim Abschleudern der Scheibe rollt diese am Zeigefinger ab und dreht sich folglich, falls mit der rechten Hand geworfen wird, um eine schief nach unten und vorwärts gerichtete Drehachse. Damit ist die Anfangslage des Impulsvektors gegeben. Die Luftwiderstandsresultante greift an der Vorderseite der Scheibe an, sucht folglich die Scheibe zu drehen und zwar um eine wagrechte Achse, die nach der rechten Seite der Wurfebene gerichtet ist. Damit ist auch der in Gedanken anzubringende resultierende Vektor (vgl. § 57 Schluß) seiner Lage nach gegeben. Es läßt sich durch diese Überlegung also vorhersagen, wie sich die Scheibe drehen und nach welcher Seite sie abweichen muß. In der Tat ist die bei dieser Geschosßform (Diskusform) auftretende Linksabweichung (bei Werfen mit der rechten Hand, bzw. Rechtsabweichung bei Werfen mit der linken Hand) schon auf 40 m Wurfweite sehr augenfällig wahrzunehmen.

b) Mörsermodell mit Holzgeschossen. In ein aufklappbares Holzgestell, das als Lafette dient, kann irgendeines von vier vorhandenen Mannesmannrohren eingelegt werden. Diese sind mit Zinkeinguß in

Form von erhöhten Zugleisten, einer Vorrichtung zum Einlegen von kleinen Schwarzpulverladungen (bis 10 g) und mit einem Bajonettverschluß versehen. Zwei der Rohre besitzen Rechtsdrall (Drallwinkel a)  $43^{\circ}40' = 3,3$  Kal., b)  $17^{\circ}39' = 10$  Kal.), die beiden anderen Linksdrall mit denselben Drallwinkeln. Das Kaliber beträgt 7,9 cm.

Die Geschosse sind aus Rotbuchenholz gefertigt und enthalten Zugeinschnitte, entsprechend den Zugleisten der Rohre. Ihre Länge ist verschieden (30,27; 35,5; 40 cm); eins der Geschosse besitzt eine Längsbohrung, in der ein Eisenstück entweder vorn oder in der Mitte oder hinten festgelegt werden kann, so daß es möglich ist den Einfluß der Schwerpunktlage zu beobachten. Der Erhöhungswinkel wird mit dem Quadranten gemessen. Die Zündung der Pulverladung erfolgt mittels einer Zündschnur. Für die Ausführung der Versuche ist ein freier Platz von etwa 400 m Länge erforderlich; es muß nahezu Windstille herrschen, da die leichten Holzgeschosse durch Wind stark beeinflußt werden.

Einige der Versuchsergebnisse sollen im folgenden angeführt werden. Diese beziehen sich, wo nichts anderes gesagt ist, auf das GeschöÙ von 30,27 cm Gesamtlänge (Kaliber 7,9 cm; Länge des zylindrischen Teils 23,70 cm; Gewicht 0,930 kg; Trägheitsmoment um die Längsachse  $C = 0,00012$  mkgsec<sup>2</sup>; Trägheitsmoment um die Querachse durch den Schwerpunkt  $A = 0,000515$  mkgsec<sup>2</sup>; Anfangsgeschwindigkeit bei 5 g Ladung  $v_0 = 23,88$  m/sec; bei 10 g Ladung  $v_0 = 41,4$  m/sec).

I. Rohr mit dem schwächeren Rechtsdrall (Drallwinkel  $17^{\circ}39'$ ); 5 g Ladung.

Das GeschöÙ fliegt pfeilartig, und zwar bis zu einem Abgangswinkel  $\varphi = 71^{\circ}$ . Von der Seite der Flugbahn her läßt sich deutlich verfolgen, wie die Längsachse des Geschosses, anscheinend genau, in der Bahntangente liegt. Das GeschöÙ schlägt daher mit der Spitze zuerst auf dem Erdboden auf. Schußweite bei  $\varphi = 45^{\circ}$  107 m, Flugzeit  $T = 5,3$  sec. Bei allmählich zunehmendem Abgangswinkel steigert sich die Rechtsabweichung  $Z$ . Übergang zur Linksabweichung und zu einem Aufschlagen des Geschosses mit dem Bodenteil voraus erfolgt bei  $\varphi = 71^{\circ}$ .

II. Dasselbe Rohr. 10 g Ladung.

Bei  $\varphi = 45^{\circ}$  Maximalschußweite  $X = 321$  m; Flugzeit  $T = 9,3$  sec; Rechtsabweichung  $Z = 39$  m.

Bei  $\varphi = 70^{\circ}$  Schußweite 183 m;  $T = 12,4$  sec;  $Z = 61$  m.



Übergang von Rechtsabweichung zu Linksabweichung bei einem Abgangswinkel  $\varphi$ , der zwischen  $77^\circ$  und  $80^\circ$  liegt. Bei  $\varphi = 80^\circ$  fällt das Geschosß mit dem Bodenteil zuerst auf (einmal erfolgte dies auch in flacher Lage, die Spitze dabei nach rechts gewendet). Linksabweichung bei  $\varphi = 80^\circ$  gleich 66 m (einigemal auch weniger). Dabei ist vom Schießgerüst aus wahrzunehmen, daß bei einem solchen Abgangswinkel von  $80^\circ$  das Geschosß bis zum Gipfel der Flugbahn hin eine leichte Rechtsabweichung erfährt und daß erst hinter dem Gipfelpunkt die Linksabweichung einsetzt, die sich alsdann rasch steigert.

### III. Rohr mit dem stärkeren Rechtsdrall (Drallwinkel $13^\circ 40'$ ).

Die Geschosßachse bleibt für alle Abgangswinkel anscheinend sich selbst parallel (man glaubt bei genauer Beobachtung vom Schießgerüst aus wahrnehmen zu können, daß die Geschosßspitze ein wenig nach rechts weist). Übergang von der Rechtsabweichung zur Linksabweichung bei ungefähr  $\varphi = 53^\circ$ , und zwar sowohl bei 5 g Ladung, als bei 10 g Ladung. Die Schußweite bei  $\varphi = 45^\circ$  und bei 5 g Ladung ist 55 m ( $T = 4,26$  sec), bei  $\varphi = 45^\circ$  und 10 g Ladung 180 m ( $T = 8,24$  sec). Der Drallwinkel ist also für dieses Geschosß zu groß.

Bei Verwendung dieses Rohrs mit dem stärkeren Drall ergab sich einigemal die Schußweite etwas größer, als nach der Rechnung auf Grund der Messungen von  $v_0$  und  $\varphi$  für den luftleeren Raum folgen würde; es scheint also eine Tragflächenwirkung der Luft gegen das Geschosß vorhanden gewesen zu sein.

### IV. Dasselbe Rohr. Schuß lotrecht aufwärts.

Das Geschosß fliegt sich selbst nahezu parallel bleibend (nach Art des Diabolokreisels), kommt also, durch starkes Sausen sich ankündigend, in fast lotrechter Stellung zurück und schlägt mit dem flachen hinteren Ende zuerst auf dem Erdboden auf.

### V. Rohr mit dem schwächeren Rechtsdrall (Drallwinkel $17^\circ 39'$ ); Geschosse von der größeren Länge 35,5 cm.

Es erfolgen sehr heftige Nutationspendelungen. Die Geschosßspitze beschreibt anscheinend Vollkreise um die Bahntangente herum; das Geschosß erscheint, vom Schießgerüst aus gesehen, wie eine große Scheibe. Der Drall reicht also für diese Geschosßlänge nicht aus.

Bei Verwendung der Rohre mit Linksdrall kehren sich die betreffenden Vorzeichen der Seitenabweichungen, der Drehungssinn der Pendelungen usw. um. (Eingehende Meßversuche, u. a. auch die oben erwähnten, wurden von Hörer Oblt. von Rudolphi ausgeführt.)

## Zehnter Abschnitt.

**Zufällige Geschosßabweichungen. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Ballistik.****§ 61. Einleitendes.**

Wenn gegen dasselbe Ziel  $M$  auf einer lotrechten Scheibe unter sonst gleichen Umständen geschossen wird und wenn dabei die sämtlichen feststellbaren, einseitigen Abweichungen ausgeschaltet sind, so schlagen die Geschosse bekanntlich doch nicht sämtlich in  $M$  ein sondern die Durchschlagspunkte zeigen Abweichungen, die ihren Grund in unbekannten Zielfehlern, kleinen Schwankungen des Luftgewichts und der Windgeschwindigkeit und -richtung, des Geschosßgewichts und der Massenverteilung, bei Gewehren ferner in kleinen Schwankungen der Laufschwingungen, in kleinen unvermeidlichen Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit usw. haben. Diese Abweichungen heißen, da sie nicht feststellbar sind, zufällige. Sie verlaufen von Schuß zu Schuß scheinbar völlig regellos. Aber die Häufigkeit einer Abweichung von bestimmter Größe bei einer größeren Schußzahl unterliegt ganz bestimmten Gesetzen, denselben Gesetzen, die bei allen exakten Messungen der Physik und Technik, bei den Glücksspielen usw. zutage treten, und die z. B. in den Lebensversicherungs-, Pensionskassen-, Invalidenkassen-Berechnungen eine fruchtbare Anwendung gefunden haben. Vom einzelnen Schuß kann nicht vorausgesagt werden, ob er mehr oder weniger weit nach rechts oder links, nach oben oder unten vom beabsichtigten Treffpunkt  $M$  einschlagen werde, ebenso wie es keinen Sinn hat, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermitteln zu wollen, wann einen einzelnen Menschen der Tod ereilt, dagegen wissen wir mit einiger Genauigkeit, wieviel von 100 Schüssen aus einem bekannten Gewehr höchstens 20 cm nach rechts oder links vom Zielpunkt abweichen werden; ebenso wie es uns bekannt ist, daß von 100 000 gleichzeitig Geborenen des männlichen bzw. weiblichen Geschlechts im Alter von 70 Jahren noch 17 750 Männer, bzw. 21 901 Frauen am Leben sein werden.

Die folgenden Betrachtungen gelten übrigens keineswegs ausschließlich für Geschosßabweichungen, sondern für alle quantitativen Bestimmungen der Ballistik, die unkontrollierbaren Schwankungen unterworfen sind, also z. B. für die Messung von Gasdrücken, von Geschosßgeschwindigkeiten, von Hülseninhalten, von Pulverkonstanten u. a. m.; nur der leichteren Vorstellung halber sind den Betrachtungen meistens die Geschosßabweichungen zugrunde gelegt.

**Das Wichtigste aus der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre.**

Die betreffenden Definitionen, Sätze und Regeln mögen hier kurz zusammengestellt werden; die Beweise der letzteren sind in den folgenden Beispielen zum Teil angedeutet.

a) (Definition:) Die mathematische oder absolute Wahrscheinlichkeit  $a$  für das Eintreten eines Ereignisses  $A$  ist das Verhältnis aus der Zahl  $t$  der für das Eintreten von  $A$  günstigen Fälle (Chancen, Treffer) zu der Zahl  $n$  der hierbei überhaupt in Betracht kommenden möglichen Fälle;  $a = \frac{t}{n}$ ; z. B. = Trefferzahl: Schußzahl.  $a$  ist also ein echter Bruch, der gleich 1 ist im Fall der Gewißheit, gleich 0 ist im Fall der Unmöglichkeit für das Eintreten von  $A$ .

Die Wahrscheinlichkeit für das entgegengesetzte Ereignis „nicht  $A$ “, also dafür, daß  $A$  nicht eintritt, ist  $1 - a$ .

1. Beispiel. Was ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln mit 2 Würfeln die Summe 7 zu werfen? Die Zahl der möglichen Fälle ist  $n = 36$ , denn jede der 6 Seiten des einen Würfels kann mit jeder der 6 Seiten des anderen oben liegen. Die Summe 7 jedoch liegt, wenn die beiden Würfel folgendes zeigen 6 und 1; 5 und 2; 4 und 3; 3 und 4; 2 und 5; 1 und 6; also 6 günstige Fälle,  $a = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ . Dafür, daß die Summe 7 jedoch nicht liegt, ist die Zahl der günstigen Fälle  $36 - 6 = 30$ , also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht die Summe 7 zu werfen,  $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ .

Ebenso findet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, die Summe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 zu werfen, gleich  $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$ . Am größten ist somit die Wahrscheinlichkeit für die Summe 7, das Mittel aus den äußersten Werten 2 und 12.

2. Beispiel. Eine bedeckte Urne enthält 20 Kugeln, nämlich 7 weiße, 5 schwarze und 8 rote; was ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen beliebigen Griff in die Urne eine schwarze Kugel zu ziehen?  $a = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ .

3. Beispiel. Eine Urne enthält 7 weiße und 6 schwarze Kugeln. Man greift in die Urne und faßt 5 Kugeln; was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von den ergriffenen 5 Kugeln drei weiß und somit zwei schwarz sind?

Berechnung von  $n$ : Aus den 13 Kugeln lassen sich auf  $\binom{13}{5}$  verschiedene Weisen Gruppen zu je 5 bilden, also  $n = \binom{13}{5}$ .

Berechnung von  $t$ : Man denke sich die 7 weißen Kugeln mit Nummern 1 bis 7 bezeichnet, die schwarzen mit 8 bis 12. An solchen Kombinationen der weißen Kugeln, die für den Erfolg günstig sind, gibt es im ganzen  $\binom{7}{3}$ . Es kann z. B. Kugel 1 mit 2 und 3 zusammen gezogen werden, ebenso 1 mit 3 und 4 usw. Die Zahl der dem Erfolg günstigen Kombinationen von schwarzen Kugeln ist analog  $\binom{6}{2}$ . Jede günstige weiße Kombination kann mit jeder günstigen schwarzen Kombination zusammen den gewünschten Erfolg herbei-

führen. Also ist die Zahl aller günstigen Fälle  $\binom{7}{3} \cdot \binom{6}{2}$ . Die gesuchte

Wahrscheinlichkeit ist also  $\alpha = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{13}{5}}$ .

b) Die Wahrscheinlichkeit des „Entweder — oder“: Wenn die Ereignisse  $A, B, C, \dots$  bzw. die absoluten Wahrscheinlichkeiten  $a, b, c, \dots$  ihres isolierten Eintretens für sich haben und wenn sich die Ereignisse ausschließen, so daß keines gleichzeitig mit einem der andern eintreten kann, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß entweder  $A$  oder  $B$  oder  $C \dots$  eintritt, gleich der Summe  $a + b + c \dots$  der betreffenden absoluten Wahrscheinlichkeiten.

1. Beispiel. Wahrscheinlichkeit dafür, beim Würfeln mit 2 Würfeln entweder die Summe 2 oder 3 oder 4 zu werfen? Die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Summe 2, bzw. 3, bzw. 4 sind  $a = \frac{1}{36}$ ,  $b = \frac{2}{36}$ ,  $c = \frac{3}{36}$ ; die Zahl der günstigen Fälle für das Ereignis „entweder 2 oder 3 oder 4“ ist  $1+2+3$ , also

$$\frac{t}{n} = \frac{1+2+3}{36} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = a + b + c = \frac{1}{6}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, entweder die Summe 2 oder 3 oder 4 ... bis 12 zu werfen, ist Gewißheit,  $\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \dots = 1$ .

2. Beispiel. Es handle sich darum, eine Scheibe zu treffen. Letztere denke man sich in unendlich viele unendlich schmale lotrechte Streifen eingeteilt; die Wahrscheinlichkeit, den ersten Streifen zu treffen, sei  $dy_1$ , den zweiten zu treffen  $dy_2$  usw.; so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, die ganze Scheibe zu treffen, gleich derjenigen, entweder den ersten oder den zweiten usw. Streifen zu treffen, also  $= dy_1 + dy_2 + \dots = \sum dy = \int dy$ , das Integral erstreckt sich vom äußersten Streifen links bis zum äußersten Streifen rechts. Davon wird nachher Gebrauch gemacht werden. Die Bedingung des Satzes, daß die Ereignisse sich ausschließen müssen, liegt in diesem Fall in der Voraussetzung, daß das Geschloß nicht in Stücke geht; also sind z. B. Mantelreißer ausgeschlossen.

c) Die Wahrscheinlichkeit des „Miteinander“ oder „Nacheinander“ (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit). Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mehrere voneinander unabhängige Ereignisse  $A, B, C \dots$ , für deren isoliertes Eintreten bzw. die Wahrscheinlichkeiten  $a, b, c \dots$  bestehen, gleichzeitig oder auch in bestimmter Reihenfolge nacheinander eintreten, ist gleich dem Produkte  $abc \dots$  ihrer absoluten Wahrscheinlichkeiten. — Sind dagegen die Ereignisse voneinander abhängig, so bedeutet das Produkt  $abc \dots$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zuerst  $A$ , dann  $B$ , dann  $C$  eintritt, nur unter der Voraussetzung, daß unter  $b$  die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von  $B$  nach Eintreten von  $A$ , unter  $c$  die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von  $C$  nach Eintreten von  $A$  und  $B$  usw. verstanden ist.

1. Beispiel. Zwei Personen  $P_1$  und  $P_2$  würfeln gleichzeitig mit je 2 Würfeln. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $P_1$  die Summe 2 und  $P_2$  gleichzeitig die Summe 4 wirft? Die absolute Wahrscheinlichkeit  $a$  dafür, daß  $P_1$  die Summe 2 wirft, ist  $a = \frac{t_1}{n_1} = \frac{1}{36}$ ; die absolute Wahrscheinlichkeit  $b$  dafür, daß vor  $P_2$  die Summe 4 liegt, ist  $b = \frac{t_2}{n_2} = \frac{3}{36}$ ; die Zahl der für das Zusammentreffen der beiden Würfe 2 und 4 günstigen Fälle ist  $t_1 \cdot t_2 = 1 \cdot 3$ , die Zahl der dabei möglichen Fälle  $n_1 \cdot n_2 = 36 \cdot 36$ , also ist die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{t_1 t_2}{n_1 n_2} = \frac{t_1}{n_1} \cdot \frac{t_2}{n_2} = a \cdot b = \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{432};$$

die Wahrscheinlichkeit des Gegenteils  $\frac{431}{432}$ , oder es ist nur mit 1 gegen 431 zu wetten, daß jener Fall eintrete.

2. Beispiel. Ein Schüler schätzt die Wahrscheinlichkeit, zu Ostern versetzt zu werden, auf  $\frac{2}{3}$  und die Wahrscheinlichkeit, zu Ostern ein Fahrrad zu bekommen, auf  $\frac{1}{2}$ , was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er zu Ostern versetzt wird und ein Fahrrad erhält? (Beispiel von H. Schubert.)

Falls das zweite Ereignis vom ersten nicht unabhängig ist, so wird die Antwort  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  nur dann richtig sein, wenn  $\frac{1}{2}$  die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß der Schüler ein Fahrrad erhält, nachdem seine Versetzung gesichert ist.

3. Beispiel. Ein Mann  $A$  ist 35 Jahre alt, seine Frau  $B$  28 Jahre. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren a) beide leben, b) mindestens eines von beiden tot ist (nicht beide leben), c)  $A$  lebt,  $B$  tot ist, d)  $A$  tot ist,  $B$  lebt, e) beide tot sind, f) wenigstens eines noch lebt (nicht beide tot sind)? — Nach der deutschen Sterbetafel sind von 100 000 gleichzeitig Geborenen männlichen Geschlechts mit 35 Jahren noch 51815 und mit 55 Jahren noch 36544 am Leben; von 100 000 gleichzeitig Geborenen weiblichen Geschlechts mit 28 Jahren noch 58647 und mit 48 Jahren noch 46605 am Leben. Also ist die Wahrscheinlichkeit von  $A$ , noch 20 Jahre zu leben,  $a = \frac{36544}{51815}$ , diejenige von  $B$ , noch 20 Jahre zu leben,  $b = \frac{46605}{58647}$ . Also Antwort zu a)  $a \cdot b = 0,56$ , zu b)  $1 - a \cdot b = 0,44$ , zu c)  $a(1 - b) = 0,145$ , zu d)  $(1 - a) \cdot b = 0,234$ , zu e)  $(1 - a)(1 - b) = 0,061$ , zu f)  $1 - (1 - a)(1 - b) = 0,94$ . Die Wahrscheinlichkeiten zu a), c), d), e) geben zusammen = 1, da einer dieser Fälle jedenfalls eintreten muß.

4. Beispiel. Beim Einschießen der Artillerie sei die Wahrscheinlichkeit eines Kurzsusses gleich  $a$ , diejenige eines Weitsusses gleich  $b$  oder  $1 - a$ , die Wahrscheinlichkeit einer falschen Beobachtung sei konstant gleich  $c$  (nach Magnon  $c = 0,1$ ). Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kurzschuß beobachtet wird, identisch mit der Wahrscheinlichkeit dafür, daß entweder ein Kurzschuß wirklich vorliegt und richtig als solcher beobachtet wird oder daß ein Weitschuß vorliegt, aber irrümlicherweise als ein Kurzschuß beobachtet wird, folglich gleich  $a(1 - c) + (1 - a)c$ .

5. Beispiel. Mit der Erhöhung für 4000 m sei die Wahrscheinlichkeit eines Kurzsusses (—) gleich  $\frac{3}{4}$ , also die eines Weitsusses (+) gleich  $\frac{1}{4}$ , mit der Erhöhung für 4100 m sei die Wahrscheinlichkeit von + gleich  $\frac{4}{5}$ , die von — also gleich  $\frac{1}{5}$ .

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine richtige Gabel (4000— und 4100+) zu erhalten? Sie ist gleich der Wahrscheinlichkeit, gleichzeitig 4000— und 4100+ zu bekommen, also  $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$ .

b) Die Wahrscheinlichkeit, eine unrichtige Gabel zu erhalten, ist diejenige,

entweder  $4000 +$  und gleichzeitig  $4100 +$  zu haben (diese ist gleich  $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{20}$ ),

oder  $4000 -$  " "  $4100 -$  " " ( " " "  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ ),

oder  $4000 +$  " "  $4100 -$  " " ( " " "  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ ).

Sieht man von der letzteren Möglichkeit ab, so ist die Wahrscheinlichkeit einer falschen Gabel  $= \frac{4}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$ . Auf 12 richtige Gabeln kommen also 7 unrichtige.

Die Aufgabe a) kann dahin erweitert werden, daß auch die falschen Beobachtungen berücksichtigt werden, so daß die Aufgabe lautet: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine richtige Gabel zu beobachten?

Diese ist gleich der Wahrscheinlichkeit, zu haben:

entweder  $4000 -$  u. richt. beobacht. als  $-$ , gleichz.  $4100 +$  u. richt. beobacht. als  $+$ ,

oder  $4000 +$  " falsch " "  $-$ , "  $4100 -$  " falsch " "  $+$ ,

oder  $4000 -$  " richt. " "  $-$ , "  $4100 -$  " " " "  $+$ ,

oder  $4000 +$  " falsch " "  $-$ , "  $4100 +$  " richt. " "  $+$

oder  $4000 +$  " richt. " "  $+$ , "  $4100 -$  " " " "  $-$ ,

oder  $4000 -$  " falsch " "  $+$ , "  $4100 +$  " falsch " "  $-$ ,

oder  $4000 -$  " " " "  $+$ , "  $4100 -$  " richt. " "  $-$ ,

oder  $4000 +$  " richt. " "  $+$ , "  $4100 +$  " falsch " "  $-$ .

## § 62. Einige Sätze aus der Wahrscheinlichkeitslehre.

### A. Wiederholte Versuche.

Es handle sich um die zwei Ereignisse  $A$  und  $B$ , von denen jedenfalls das eine eintreten müsse (z. B. Treffen und Nichttreffen), mit den absoluten Wahrscheinlichkeiten  $a$  und  $b$  (wobei  $b = 1 - a$ ). Wenn der betreffende Versuch z. B. dreimal nacheinander ausgeführt wird, so ist folgendes möglich:

a) Dreimal nacheinander tritt  $A$  ein, die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $a \cdot a \cdot a = a^3$ .

b) Zweimal  $A$ , einmal  $B$ , die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$ ; dagegen wenn die Reihenfolge gleichgültig ist, so handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit dafür, daß entweder zuerst  $A$ , dann  $A$ , dann  $B$  oder, daß  $A$ , dann  $B$ , dann  $A$  oder, daß  $B$ , dann  $A$ , dann  $A$  eintritt; die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $aab + aba + baa = 3a^2b$ .

c) Einmal  $A$ , zweimal  $B$  in beliebiger Folge; die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $3ab^2$ .

d) Keinalmal  $A$ , dreimal  $B$ , Wahrscheinlichkeit dafür  $b \cdot b \cdot b = b^3$ .

Diese Ausdrücke sind die Glieder in der Entwicklung von  $(a + b)^3$ .

Ferner ist  $1 - b^3$  offenbar die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (nicht jedesmal  $B$ , oder auch dafür, daß) wenigstens einmal  $A$

fällt; ebenso ist  $1 - (b^s + 3ab^2)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens zweimal  $A$  fällt usw. Dies läßt sich verallgemeinern:

Satz: Wenn es sich um zwei entgegengesetzte Ereignisse  $A$  und  $B$  (Nicht- $A$ ) mit den absoluten Wahrscheinlichkeiten  $a$  und  $b$  handelt ( $b = 1 - a$ ), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei im ganzen  $s$  Versuchen das Ereignis  $A$   $m$ -mal, das Ereignis  $B$  also  $(s - m)$ -mal in beliebiger Reihenfolge eintritt,

$$\binom{s}{m} a^m \cdot b^{s-m} \quad \text{oder} \quad \frac{s!}{m!(s-m)!} a^m \cdot b^{s-m}.$$

1. Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln Pasch zu werfen, ist  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ . Also ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{600!}{3!597!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{597}$$

zu erwarten, daß unter 600 Würfeln mit zwei Würfeln gerade dreimal, nicht weniger oft und nicht öfter, Pasch fällt.

2. Beispiel. Nach wieviel Würfen ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln wenigstens einmal Pasch zu werfen, gleich  $\frac{1}{2}$  geworden?  $\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^s$ ;  $s = \log 0,5 : \log \frac{5}{6} = 3,8$ ; also schon nach 4 Würfeln ist die fragliche Wahrscheinlichkeit etwas größer als  $\frac{1}{2}$ .

3. Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit eines Kurzsusses sei  $a$ , diejenige eines Weitsusses also  $1 - a = b$ . Es werden 5 Schüsse abgegeben. Dann ist die Wahrscheinlichkeit von 3 Kurzsüssen, also 2 Weitsüssen (in beliebiger Reihenfolge)  $10 \cdot a^3 \cdot b^2$ . Die Wahrscheinlichkeit, wenigstens 3 Weitsüsse zu erhalten, ist gleich derjenigen, entweder 3 oder 4 oder 5 zu bekommen (dabei Reihenfolge beliebig), also gleich  $10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$ . Die Wahrscheinlichkeit, höchstens 2 Weitsüsse zu erhalten, ist gleich derjenigen, entweder keinen oder 1 oder 2 zu erhalten, also  $a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2$ .

4. Beispiel. Ein Geschütz sei auf das Ziel eingeschossen, so daß ein Kurzschuß (-) und ein Weitschuß (+) dieselbe Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  für sich hat. Es wird eine Gruppe von 6 Schüssen auf das Ziel abgegeben. Dann ist (bei beliebiger Reihenfolge) die Wahrscheinlichkeit von

$$3+ \text{ und } 3- \text{ gleich } \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64},$$

$$2- \text{ und } 4+ \quad " \quad \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64},$$

$$2+ \text{ und } 4- \quad " \quad \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einer dieser 3 Fälle eintritt, oder daß man sich gemäß der betreffenden Schießregel als eingeschossen zu betrachten hat, gleich  $\frac{20+15+15}{64} = 0,78$ . Unter 100 solchen Schußgruppen werden also

78 die Entfernung richtig angeben.

Diese Betrachtung kann auf den Fall ausgedehnt werden, daß das Ziel sich nicht, wie vorhin angenommen, in der Mitte des Trefferbilds befindet, sondern

kürzer oder weiter liegt, ferner, daß auch falsche Beobachtungen berücksichtigt werden. Dies führt alsdann zur Prüfung eines bestimmten Schießverfahrens. Einen solchen Weg schlägt z. B. Groos ein (vgl. Lit.-Note). Über die weiteren Einzelheiten vergleiche man die Werke, die sich speziell mit den Einschießverfahren beschäftigen: von Wuich, Sabudski—v. Eberhard, Kozak, Rohne, Groos.

### B. Gesetz der großen Zahlen.

Die erwähnte Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei  $s = m + n$  Versuchen das Ereignis  $A$  gerade  $m$ -mal, das Ereignis  $B$  also  $n = s - m$ -mal eintritt, nämlich der Ausdruck  $\frac{s!}{m! n!} \cdot a^m \cdot b^n$  ist im allgemeinen klein; noch am größten ist er (wie sich durch Anschreiben von drei aufeinander folgenden Gliedern der Entwicklung von  $(a + b)^s$  zeigen läßt) für dasjenige  $m$ , das zwischen  $sa - b$  und  $sa + a$  liegt. Das Maximum also nimmt jene Wahrscheinlichkeit für  $m = sa$  an (und wenn  $sa$  keine ganze Zahl ist, für die einzige zwischen  $sa - b$  und  $sa + a$  liegende ganze Zahl). Ein Näherungs Ausdruck für die Größe dieses Maximums ist  $\frac{1}{\sqrt{2\pi s a b}}$ .

Je größer die Versuchszahl  $s$  gewählt wird, um so mehr nähert sich die bis dahin durch die Versuche tatsächlich erhaltene Kombination  $m:n$  derjenigen, für die  $m:n = a:b$  ist, also derjenigen, für die das Maximum der Wahrscheinlichkeit besteht (Gesetz der großen Zahlen von Jak. Bernoulli). Wenn z. B. in einer Urne sich 1 Million Kugeln befinden, 100 000 weiße und 900 000 schwarze, und es sich um die Wahrscheinlichkeit  $a$  bzw.  $b$  handelt, eine weiße bzw. eine schwarze Kugel zu ziehen, so ist  $a = \frac{1}{10}$ ,  $b = \frac{9}{10}$ ; wenn man sehr oft in die Urne greift und jedesmal die gezogene Kugel wieder zurücklegt, wird die Zahl  $m$  der gezogenen weißen zu der Zahl  $n$  der gezogenen schwarzen Kugeln immer genauer sich wie 1:9 verhalten.

### C. Satz von Bernoulli-Laplace.

Wie erwähnt, ist z. B. die Wahrscheinlichkeit auch dafür, daß beim Würfeln mit zwei Würfeln unter 600 Würfen gerade 100mal Pasch (nicht mehr und nicht weniger) fällt, ziemlich klein, nämlich gleich etwa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 600 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{1}{28}.$$

Dagegen weit größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 600 Würfen ungefähr 100mal, nämlich z. B. 80- bis 120mal Pasch falle. Derartige Fragen zu beantworten, dient der folgende Bernoulli-Laplace'sche Satz, der gleichfalls nur eine mit Hilfe des Satzes von Stirling erhaltene Näherungsregel darstellt, die um so genauer zutrifft, je größer die Versuchszahl  $s$  ist:



Es ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\gamma} e^{-t^2} \cdot dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s a b}}$$

zu erwarten, daß bei  $s$  Versuchen das Ereignis  $A$ , das die absolute Wahrscheinlichkeit  $a = 1 - b$  für sich hat,

$$sa - \gamma \sqrt{2s a b} \text{ bis } sa + \gamma \sqrt{2s a b} \text{-mal}$$

eintritt, also daß die Wiederholungszahl  $m$  des Ereignisses  $A$  zwischen diesen Grenzen, oder das Verhältnis  $\frac{m}{s}$  zwischen den Grenzen

$$a \mp \gamma \sqrt{\frac{2ab}{s}}$$

liegt. — Zur leichteren numerischen Anwendung kann die folgende Form des Satzes dienen:

Mit der Wahrscheinlichkeit  $P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} \cdot dt$  ist anzu-

nehmen, daß  $m$  zwischen den Grenzen  $sa \pm (\gamma \sqrt{2s a b} - \frac{1}{2})$  liege. Wenn speziell  $P = \frac{1}{2}$  sein soll, muß  $\gamma = 0 = 0,476936$  sein; in diesem Falle heißt  $\gamma \sqrt{2s a b} - \frac{1}{2}$  die „wahrscheinliche Abweichung“.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes, von Poisson gegeben, bezieht sich auf den Fall, daß die Wahrscheinlichkeit  $a$  für das Eintreten des Ereignisses  $A$  von einem Versuch zum andern wechselt; beim ersten Versuch sei sie  $a_1$ , beim zweiten  $a_2$  usw. Die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit, also das arithmetische Mittel

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots}{s}$$

sei bezeichnet mit  $a$ . Ferner bedeute ähnlich wie oben  $b_1 = 1 - a_1$ ,  $b_2 = 1 - a_2$ , ...,  $b = 1 - a$ ; endlich sei  $\kappa$  Abkürzung für

$$\sqrt{\frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots)}{s}}.$$

Dann ist bei  $s$  Versuchen mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} \cdot dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\kappa \sqrt{\pi s}}$$

zu erwarten, daß die Wiederholungszahl  $m$  des Ereignisses  $A$  zwischen den Grenzen  $a \cdot s \mp \gamma \kappa \sqrt{s}$  oder  $\frac{m}{s}$  zwischen den Grenzen  $a \mp \frac{\gamma \kappa}{\sqrt{s}}$  liege. Daraus folgt, daß, mit wachsender Versuchszahl  $s$ , immer genauer  $\frac{m}{s} = a$  wird. (Werden die Wahrscheinlichkeiten  $a_1, a_2, \dots$ , also auch  $b_1, b_2, \dots$ , unter sich gleich genommen, so ist  $\kappa = \sqrt{2ab}$ , d. h. es liegt wieder der Satz von Bernoulli-Laplace vor.)

Beispiel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist darauf zu rechnen, daß bei 600 Würfeln mit 2 Würfeln 80- bis 120mal Pasch fällt? Es ist  $a = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ;  $b = \frac{5}{6}$ ;  $s = 600$ ;  $\gamma \sqrt{2sa b} - \frac{1}{2}$  soll  $= 20$ , also  $\gamma = 1,59$  sein, daraus folgt  $P = 0,97$  als die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

### D. Regel von Bayes.

Bis jetzt war angenommen, daß die absoluten Wahrscheinlichkeiten  $a$  und  $1 - a = b$  für das Eintreten der Ereignisse  $A$  und  $B$  (Nicht- $A$ ) von vornherein bekannt seien („Wahrscheinlichkeit a priori“), und es war nach der Wahrscheinlichkeit einer Wirkung gefragt. Z. B. es ist bekannt, daß in einer Urne 1 Million Kugeln liegen, und zwar 400 000 weiße und 600 000 andersfarbige, so daß die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen,  $a = \frac{2}{5}$ , und die Wahrscheinlichkeit des Gegenteils  $b = \frac{3}{5}$  gegeben ist; es werden 800 Kugeln gezogen und jedesmal wieder zurückgelegt; mit welcher Wahrscheinlichkeit ist zu erwarten, daß unter den gezogenen 800 Kugeln 310 bis 330 weiße Kugeln sein werden (denn am wahrscheinlichsten ist die Zahl 320 weißer Kugeln)?

Jetzt möge nur bekannt sein, daß in der Urne eine Million Kugeln liegen, darunter eine gewisse Anzahl weiße. Man stellt 800 Versuche an und zieht 320 weiße, also 480 andersfarbige. Mit welchem Grad der Genauigkeit hat man durch diese Versuche das unbekannte Verhältnis  $a$  der Zahl der weißen zur Gesamtzahl der Kugeln annähernd ermittelt? Wie groß ist z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das durch die 800 Versuche bestimmte Verhältnis  $a = \frac{320}{800} = \frac{1}{2}$  um weniger als  $\frac{1}{10}$  (2,5%) falsch ist, oder mit anderen Worten, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zahl der weißen Kugeln, die in der Urne sich befinden, größer als 375 000 und kleiner als 425 000 ist?

In solchen Aufgaben handelt es sich also darum, aus der beobachteten Wirkung umgekehrt über die unbekannte Ursache, also über  $a$  und  $b$ , Aufschluß zu erhalten.

Hierzu dient die Näherungsregel von Bayes:

Wenn das Ereignis  $A$ , dessen absolute Wahrscheinlichkeit  $a$  unbekannt ist, bei  $s = m + n$  Versuchen  $m$ -mal eintrat und  $n$ -mal nicht eintrat, so ist mit der Wahrscheinlichkeit

$P = \frac{2}{\gamma \pi} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$  zu erwarten, daß die unbekannte

Zahl  $a$  zwischen den Grenzen  $\frac{m}{s} \mp \gamma \sqrt{\frac{2m \cdot n}{s}}$  liege,  $\gamma$  eine beliebige Zahl. Speziell mit der Wahrscheinlichkeit  $P = \frac{1}{2}$  ist darauf zu rechnen, daß  $a$  zwischen  $\frac{m}{s} \mp 0,4769 \sqrt{\frac{2m \cdot n}{s}}$  liegt. Je größer also

die Versuchszahl  $s$  ist, um so genauer kann für  $a$  das Verhältnis  $\frac{m}{s}$  genommen werden (Umkehrung des Gesetzes der großen Zahlen).

1. Beispiel. Obige Urnenaufgabe (Czuber): Es ist  $s=800$ ,  $m=320$ ,  $n=480$ : es soll  $\gamma \sqrt{\frac{2 \cdot 320 \cdot 480}{800^3}} = \frac{1}{40}$  sein. Daraus  $\gamma = 1,0205$ ; also  $P = 0,851$ . Mit der Wahrscheinlichkeit 0,851 ist also anzunehmen, daß das Verhältnis  $a$  der Zahl der weißen Kugeln der Urne zu der Gesamtzahl der Kugeln bis auf 6,2% genau  $= \frac{320}{800}$  bestimmt sei oder zwischen  $\frac{15}{40}$  und  $\frac{17}{40}$  liege oder, daß die Zahl der weißen Kugeln zwischen 375 000 und 425 000 liegt.

2. Beispiel. Von einer Schießliste, die Treffer und Fehlschüsse aufführt, ging die Hälfte der Blätter verloren. Die Auszählung der noch vorhandenen ergab 240 Treffer und 120 Fehlschüsse. Danach ist es am wahrscheinlichsten, daß die gesamte Liste mit 720 Schüssen 480 Treffer und 240 Nichttreffer enthielt. Um wieviel kann im wahrscheinlichen Fall diese Annahme von 480 Treffern falsch sein?  $s=360$ ;  $m=240$ ;  $n=120$ ;  $P=\frac{1}{2}$ . Also

$$a = \frac{240}{360} \pm 0,4769 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 240 \cdot 120}{360^3}} = \frac{480 \pm 38}{720}$$

Also wird die Zahl der Treffer im wahrscheinlichen Fall zwischen 442 und 518 liegen.

Über die Herleitung obengenannter Sätze und ebenso über das Folgende vergleicht man am besten die Werke von Czuber, sowie diejenigen von Sabudski-v. Eberhard und von Kozák.

### E. Schlüsse aus angestellten Beobachtungen auf künftige Ereignisse.

Es seien  $m+n$  Versuche für das Ereignis  $A$  angestellt, das Ereignis sei  $m$ -mal eingetreten,  $n$ -mal nicht. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei  $p+q$  folgenden Versuchen das Ereignis  $A$   $p$ -mal eintritt, also  $q$ -mal nicht eintritt,

$$\frac{(p+q)!}{p!q!} \cdot \frac{\int_0^1 x^{m+p} \cdot (1-x)^{n+q} \cdot dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n \cdot dx} = \frac{(p+q)!(m+p)!(n+q)!(m+n+1)!}{p!q!(m+n+p+q+1)!m!n!}.$$

Anmerkung 1. Die erwähnte Formel von Stirling bezieht sich auf näherungsweise Berechnungen großer Fakultätszahlen:

$$n! \sim n^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

(für große  $n$  und noch für  $n=10$  verwendbar).

Anmerkung 2. Über die in der Wahrscheinlichkeitslehre gebrauchten bestimmten Integrale findet man das Nötige in den dem Buch beigegebenen Anhang, Tabelle 16.

### § 63. Theorie der Geschößstreuung. Treffgenauigkeitsmaße.

Es werde wiederholt nach demselben Punkt  $M$  einer lotrechten Scheibe geschossen. Die Waffe sei auf diesen Punkt schon eingeschossen, d. h. alle einseitigen Fehler seien ausgeschaltet. Die Durchschlagspunkte  $P_1 P_2 P_3 \dots$  der Geschosse, die Schnittpunkte des von der Mündung der Waffe nach der Scheibe gehenden Bündels von Flugbahnen („Geschößgarbe“) gruppieren sich alsdann um den Garbenmittelpunkt  $M$  in der Weise, daß die kleinen Abweichungen (von  $M$  aus) häufiger vorkommen als die großen, und zwar sind in Beziehung auf eine Wagrechte und eine Lotrechte durch  $M$  die Abweichungen gleicher Größe nach rechts bzw. links, ebenso nach oben bzw. unten ungefähr gleich häufig.

Es mögen vorläufig allein die Abweichungen nach rechts (positive) und nach links (negative) betrachtet werden; diese seien mit  $f_1 f_2 f_3 \dots$  bezeichnet; sie sind die  $x$ -Koordinaten der verschiedenen Durchschlagspunkte in dem Koordinatensystem der  $xy$ , in dem der als bekannt angenommene Garbenmittelpunkt  $M$  der Koordinatenanfang ist.

Daß kleine  $f$  häufiger vorkommen werden als große  $f$ , sowie daß die Punkte in Beziehung auf die  $y$ -Achse symmetrisch liegen werden, erkennt man besonders leicht dadurch, daß man sich denkt, diese

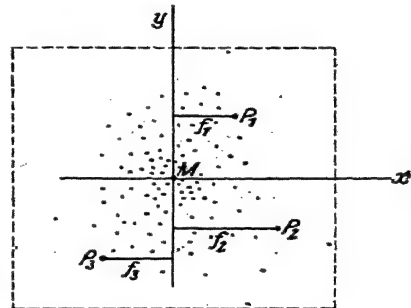


Abb. 94.

Abweichungen  $f_1 f_2 f_3 \dots$  entstehen durch das Zusammenwirken von mehreren unabhängigen Fehlerursachen. Z. B. seien es drei Ursachen, die mit gleicher Leichtigkeit Fehler erzeugen mögen:

a) kleine Änderungen der Windgeschwindigkeit mögen die Abweichungen:  $-2, -1, 0$  cm erzeugen;

b) kleine Änderungen der Laufvibration nach rechts und links die Abweichungen:  $-1, 0, +1$  cm;

c) Zielfehler die Abweichungen  $-1, 0, +1, +2, +3$  cm.

Durch ihre Kombination können die Abweichungen:  $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4$  cm im Resultat entstehen und zwar bzw. auf 1, 3, 6, 8, 9, 8, 6, 3, 1 verschiedene Arten. Denn z. B. die Abweichung  $-4$  kann auf die eine Art:  $-2, -1, -1$  entstehen. Dagegen der Fehler 0 kann nicht nur dadurch zustande kommen, daß sehr kleine Fehler zusammentreffen und sich aufheben,

sondern auch dadurch, daß die großen Fehler sich kompensieren; nämlich auf die folgenden Arten:

$-2, -1, +3 \mid -2, 0, +2 \mid -2, +1, +1 \mid -1, -1, +2 \mid$   
 $-1, 0, +1 \mid -1, +1, 0 \mid 0, -1, +1 \mid 0, 0, 0 \mid 0, +1, -1 \mid,$

also auf 9 verschiedene Arten (Czuber).

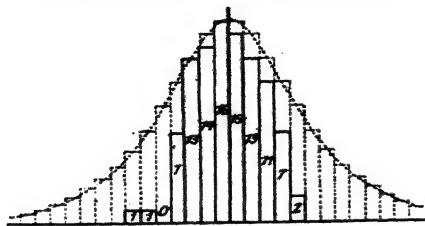


Abb. 95.

und 13 negative, zwischen 12 und 16 cm: 7 positive und 7 negative, zwischen 16 und 20 cm: 2 positive, 0 negative, zwischen 20 und 24 cm: 0 positive, 1 negative, zwischen 24 und 28 cm: 0 positive, 1 negative Abweichung; zusammen 100. Also zeigt dieser Beschuß, daß in der Tat die kleinen Abweichungen häufiger vorkommen als die großen.

Gleiches ergibt sich durch Versuche mit dem Fehlerverteilungsapparat, bei dem die fliegenden Geschosse durch fallende Hirsekörner oder Bleischrote, und die verschiedenen Streuungsursachen der Geschosse durch das an zahlreichen Metallstiften erfolgende Abprallen der Körner, das auf die mannigfaltigste Weise möglich ist, ersetzt sind (vgl. Abb. 96).

Trägt man für eine sehr große Beschußreihe die Zahl der Abweichungen in Funktion von  $x$  graphisch auf, so erhält man eine Kurve von nebenstehender Gestalt (Abb. 97). Hierfür hat Gauß die Funktionsgleichung aufgestellt  $\eta = a e^{-k^2 x^2}$ , die theoretisch abgeleitet werden kann, deren Berechtigung hier jedoch darin gesucht werden soll, daß die Formel sich in zahllosen Anwendungen als besonders gut verwendbar gezeigt hat. Dabei bedeutet  $\eta$  folgendes: Man denke sich in der Entfernung  $x$  von der lotrechten Mittellinie durch den Garbenmittelpunkt  $M$  einen sehr schmalen, nach oben und unten beliebig ausgedehnten Zielstreifen von der Breite der (sehr klein zu denkenden) Einheit. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Streifen zu treffen, ist  $\eta = a e^{-k^2 x^2}$ , oder wenn  $n$  die Gesamtzahl der Schüsse ist, so fallen in diesen Streifen  $n \cdot a e^{-k^2 x^2}$  Treffer. Hat der Streifen die unendlich kleine Breite  $dx$  (Geradenpaar  $PP$  im Abstand  $x$  von  $M$ ), so kommen auf ihn  $n \cdot a e^{-k^2 x^2} \cdot dx$  Treffer; kurz, es bedeutet  $n a e^{-k^2 x^2} \cdot dx$  die Anzahl derjenigen Schüsse unter den sämtlichen  $n$  Schüssen, die gerade die Abweichung  $x$  nach rechts oder links von der Lotrechten durch  $M$  besitzen.

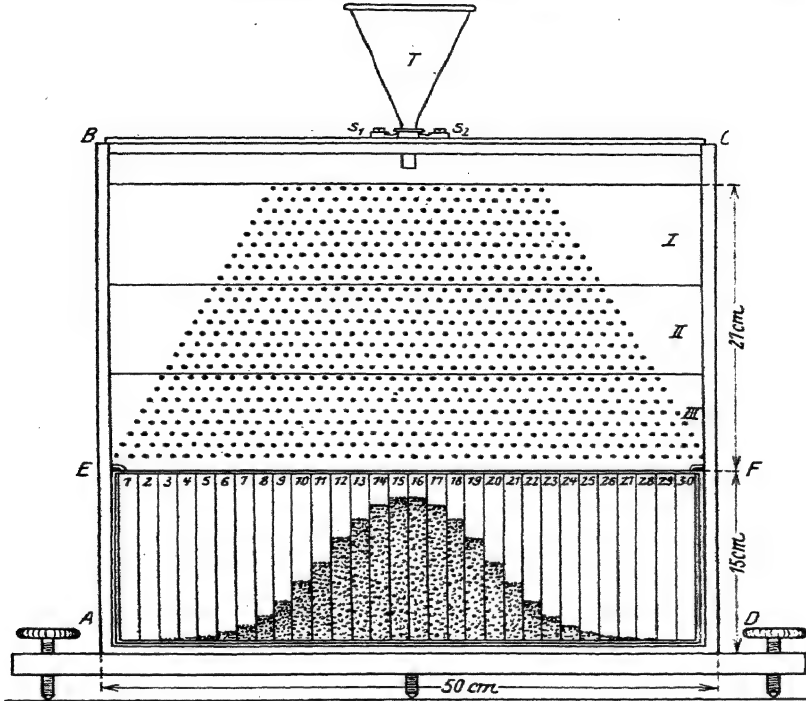


Abb. 96.

Es gilt nun, die beiden Konstanten  $a$  und  $h$  zu bestimmen:

Zunächst  $a$ . Die unendlich große Ebene der beliebig erweitert gedachten Scheibe wird jedenfalls getroffen. D. h. die Gesamtzahl der auf die unendlich vielen Zielstreifen mit der Breite  $dx$  von  $x = -\infty$  bis  $x = +\infty$  entfallenden Schüsse ist gleich  $n$  selbst,

$$n \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} \cdot dx = n;$$

da nun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

so hat man

$$a = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

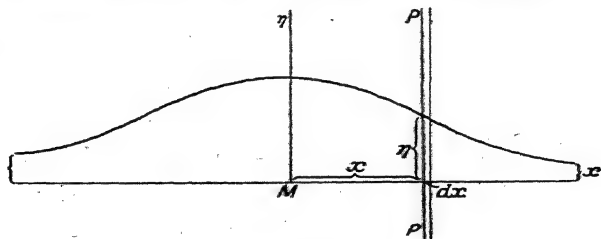


Abb. 97.

Also ist  $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$  die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von der Größe  $x$ , und  $n \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_c^d e^{-h^2 x^2} dx$  ist die Zahl der Treffer in einem nach oben und unten unbegrenzten Zielstreifen  $PPQQ$  (Abb. 98), dessen Seiten die Abstände  $c$  bzw.  $d$  vom Garbenmittelpunkt  $M$  besitzen; dies ist die Kurvenfläche  $ABCD$ , multipliziert mit der Schußzahl  $n$ .

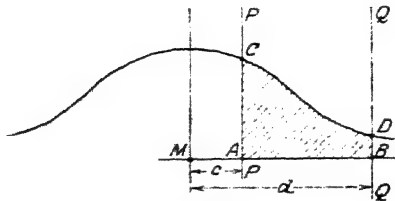


Abb. 98.

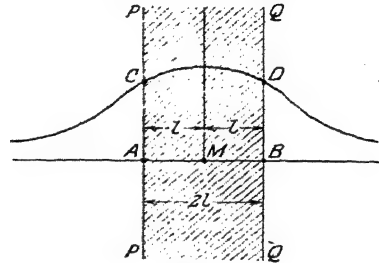


Abb. 99.

Handelt es sich speziell darum, eine Zielfläche  $PPQQ$  zu treffen, die die Breite  $2l$  hat und in Beziehung auf  $M$  symmetrisch liegt (Abb. 99), so ist die Wahrscheinlichkeit, sie zu treffen, oder, was dasselbe ist, die Kurvenfläche  $ABCD$  gleich

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{+l} e^{-h^2 x^2} dx = 2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-h^2 x^2} dx;$$

mit  $hx = t$ ,  $dx = \frac{1}{h} dt$  wird sie

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=hl} e^{-t^2} dt = \varphi(hl).$$

Dieses Integral läßt sich für jeden Wert  $hl$  berechnen. Denn es ist  $e^{-z} = 1 - z + \frac{1}{2!} z^2 - \frac{1}{3!} z^3 + \dots$ , und wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist

$$\int e^{-t^2} dt = \int \left( 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots \right) dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{2! \cdot 5} - \frac{t^7}{3! \cdot 7} + \dots,$$

somit ist die Wahrscheinlichkeit, den Streifen  $PPQQ$  von der Breite  $2l$  zu treffen:

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x=-l}^{x=+l} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=hl} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ hl - \frac{1}{3} (hl)^3 + \frac{1}{2! \cdot 5} (hl)^5 - \dots \right] = \varphi(hl),$$

vgl. Tabelle 12 des Anhangs.

Die Konstante  $h$  ist ein Maß für die Genauigkeit des Schießens mit der betreffenden Waffe. Denn die Treffgenauigkeit läßt sich, wenn allein die Abweichungen in Richtung der  $x$ -Achse anlangt, offenbar charakterisieren durch die Wahrscheinlichkeit, den unendlich schmalen Strich zu treffen, der durch  $M$  geht ( $y$ -Achse). Diese Wahrscheinlichkeit ist aber gleich

$$\frac{h}{\pi} e^{-h^2 \cdot 0} \cdot dx \quad \text{oder} \quad \frac{h}{\pi} \cdot dx.$$

Sie sei für eine erste Waffe  $\frac{h_1}{\pi} dx$ , für eine zweite Waffe  $\frac{h_2}{\pi} dx$ , so verhalten sich die Genauigkeitsmaße beider Waffen wie  $h_1 : h_2$ .

Statt  $h$  pflegt man bequemere Genauigkeitsmaße zu benützen, die mit Leichtigkeit aus den Trefferbildern abzunehmen sind. Dies sind verschiedene Mittelwerte aus den beobachteten Geschößabweichungen:

Das arithmetische Mittel der mit ihren Vorzeichen genommenen Abweichungen  $\frac{f_1 + f_2 + \dots}{n}$  zu nehmen, verbietet sich von selbst, da dieses Mittel genau oder annähernd gleich Null ist (darüber siehe weiter unten); dagegen wählt man entweder die sog. mittlere quadratische Abweichung

$$\mu = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2 + \dots}{n}}$$

oder (seltener) die mittlere kubische Abweichung

$$\mu_3 = \sqrt[3]{\frac{f_1^3 + f_2^3 + \dots}{n}}$$

oder die durchschnittliche Abweichung

$$E = \frac{|f_1| + |f_2| + \dots}{n}$$

(dabei die Abweichungen  $f_1, f_2, \dots$  sämtlich mit dem Zeichen  $+$  genommen) oder endlich die wahrscheinliche oder 50prozentige Abweichung  $w$ , d. h. diejenige, für die die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  besteht. Aus jedem dieser Genauigkeitsmaße läßt sich, wie folgt,  $h$  berechnen.

a) Die mittlere quadratische Abweichung  $\mu = \sqrt{\frac{\sum f^2}{n}}$ .

Nach der Definition von  $\mu$  ist  $n\mu^2$  gleich der Summe der Quadrate aller Abweichungen  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , also  $= (\text{Abweichung } x_1)^2 \text{ mal Zahl der Abweichungen je von dieser Größe } x_1 + (\text{Abweichung } x_2)^2 \text{ mal Zahl der Abweichungen je von dieser Größe } x_2 + \text{ usw.}$  Somit ist nach dem Obigen



$$\begin{aligned} n\mu^2 &= x_1^2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_1^2} \cdot dx_1 \cdot n + x_2^2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_2^2} \cdot dx_2 \cdot n + \dots \\ &= n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx. \end{aligned}$$

Dieses Integral ist über die ganze unendliche Ebene, also von  $x = -\infty$  bis  $x = +\infty$  zu erstrecken, da das Gaußsche Gesetz  $a e^{-h^2 x^2}$  auch unendlich große Fehler als möglich zuläßt. Nun ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3},$$

also wird

$$n\mu^2 = n \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}, \quad h = \frac{1}{\mu \sqrt{2}} = \frac{0,7071}{\mu},$$

womit  $h$  bestimmt ist.

b) Die durchschnittliche Abweichung  $E = \frac{\sum |f|}{n}$ .

Es ist, nach der Begriffsbestimmung von  $E$ ,  $nE =$  Summe der Produkte aus dem betreffenden  $x$  und der Zahl der Abweichungen  $j$  von dieser Größe  $x$ ,

$$nE = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \cdot n \cdot dx,$$

oder da

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x \cdot e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot h},$$

hat man

$$E = \frac{1}{h \sqrt{\pi}}; \quad h = \frac{1}{E \sqrt{\pi}},$$

womit von neuem eine Bestimmung von  $h$  vorliegt. Zugleich kennt man jetzt eine Beziehung zwischen  $\mu$  und  $E$ , nämlich es ist

$$E = \mu \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = 0,79788 \cdot \mu.$$

c) Die wahrscheinliche oder 50prozentige Abweichung  $w$ .

Sie ist diejenige Abweichung, für die die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  besteht. Oder mit anderen Worten,  $2w$  ist z.B. die Breite eines (nach oben und unten beliebig ausgedehnten, in bezug auf  $M$  symmetrischen, lotrechten) Zielstreifens, der die bessere Hälfte aller Schüsse faßt. Also ist  $w$  nach dem Obigen aus der Bedingung zu ermitteln:

$$\frac{n}{2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot n \cdot \int_{x=-w}^{x=+w} e^{-h^2 x^2} \cdot dx$$

oder auch aus

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=wh} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2}.$$

Für das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=t} e^{-t^2} \cdot dt$$

ist (vgl. Anhang, Tabelle 12) die Abkürzung  $\varphi(t)$  benützt, also ist die Bedingung  $\varphi(wh) = \frac{1}{2}$ . Die Tabelle gibt hierfür

$$hw = 0,4769363 = {}_n q'';$$

$$\text{somit ist } w = \frac{\varrho}{h} = \varrho \cdot \mu \sqrt{2} = 0,6744898 \cdot \mu.$$

Zusammen ist

$$h = \frac{1}{\mu \sqrt{2}} = \frac{1}{E \sqrt{\pi}} = \frac{\varrho}{w} \quad (\varrho = 0,4769363);$$

wahrscheinliche Abweichung

$$w = 0,6744898 \cdot \mu = 0,8453476 \cdot E,$$

mittlere quadratische Abweichung

$$\mu = 1,4826021 \cdot w = 1,2533141 \cdot E,$$

durchschnittliche Abweichung

$$E = 0,7978846 \cdot \mu = 1,1829372 \cdot w.$$

(Im deutschen Heer verstand man bis vor wenigen Jahren unter „mittlerer Abweichung“ die durchschnittliche Abweichung  $E$ , unter „mittlerer Streuung“ nicht das Doppelte von  $E$ , sondern das Doppelte der wahrscheinlichen Abweichung  $w$ , worauf besonders zu achten ist.)

Anmerkung 1. Den wahrscheinlichen Fehler  $w$  kann man nach Gauß mit erheblich geringerer Genauigkeit auch in der folgenden Weise erhalten: Man ordnet die Abweichungen  $f_1 f_2 f_3 \dots$  ihrer absoluten Größe nach und nimmt bei ungeradem  $n$  die mittelste, bei geradem  $n$  das Mittel aus den beiden mittleren. Dieses  $w$  sei mit  $w_g$  bezeichnet.

Z. B. seien die Abweichungen

$$-2,8 \mid +0,9 \mid +0,4 \mid -0,2 \mid +0,3 \mid -0,4 \mid +0,1 \mid -1,6;$$

geordnet

$$0,1 \mid 0,2 \mid 0,3 \mid \underline{0,4} \mid \underline{0,4} \mid 0,9 \mid 1,6 \mid 2,8;$$

also

$$w = w_g = 0,4.$$

Doch empfiehlt sich diese nicht selten angewendete Methode nur in solchen Fällen, wo eine rohe Schätzung von  $w$  genügt.

Anmerkung 2. Es kann gefragt werden, auf wieviele Stellen die Berechnung von  $\mu$  oder  $E$  oder  $w$ , wahrscheinlich genau ist. Hierfür

sei die Gaußsche Näherungsregel angegeben, die übrigens nur für die wahren Fehler und für große Versuchszahlen  $n$  gültig ist und für sehr kleine alle Bedeutung verliert (über die Ableitung sei auf das Werk von Czuber verwiesen):

Im wahrscheinlichen Fall ist:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum f^2}{n}} \text{ auf } \frac{0,4769}{\sqrt{n}} \cdot 100 \text{ Prozent ungenau.}$$

$$E = \frac{\sum f}{n} \text{ auf } \frac{0,5096}{\sqrt{n}} \cdot 100 \text{ Prozent ungenau.}$$

$$w_g \text{ auf } \frac{0,7867}{\sqrt{n}} \cdot 100 \text{ Prozent ungenau.}$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Ermittlung von  $w$  oder von  $h$  aus  $= \sqrt{\frac{\sum f^2}{n}}$  die verhältnismäßig genaueste ist.

Z. B. sei aus der Summe der Quadrate der Abweichungen  $f$ ) berechnet  $\mu = 30$  cm; die Schußzahl sei  $n = 10$ ; so ist

$$\mu = 30 \left( 1 \pm \frac{0,4769}{\sqrt{n}} \right) = 30 (1 \pm 0,15) = 30 \pm 4,5;$$

die wahrscheinlichen Grenzen von  $\mu$  sind  $\pm 4,5$  cm, oder es kann Eins gegen Eins gewettet (oder es kann mit 50 % Wahrscheinlichkeit angenommen) werden, daß  $\mu$  größer als 25,5 und kleiner als 34,5 cm sei. Es genügt also, zu sagen, daß  $\mu$  etwa = 30 cm sei, mit einem wahrscheinlichen Genauigkeitsgrad von 15 %.

Anmerkung 3. Die Gaußsche Kurve  $\eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$  besitzt zwei Wendepunkte. Die Abszissen  $\pm x_1$  dieser Wendepunkte ergeben sich aus  $\eta'' = 0$ ; man erhält sofort  $1 - 2h^2 x^2 = 0$ ;  $x_1 = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$ , also  $x_1 = \pm \mu$ . Die Abszisse eines Wendepunktes ist somit gleich der mittleren quadratischen Abweichung  $\mu$ . Wie sich ferner zeigen läßt, ist  $\mu$  auch gleich dem Trägheitshalbmesser der einen Hälfte der Kurvenfläche in bezug auf die  $y$ -Achse; ferner ist die durchschnittliche Abweichung  $E = \frac{1}{\sqrt{\pi} h} =$  der Abszisse des Schwerpunktes derselben Flächenhälfte.

Anmerkung 4. Statt der Gaußschen Funktion  $\eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$  wurden zahlreiche andere versucht (von Bernoulli, Poisson, Jordan, Helmert, Pearson, de Forest, Simpson-Hélie, J. U. van Loon u. a., vgl. die Lit.-Note) z. B.  $\eta = \frac{a}{1+x^2}$ ,  $\eta = a \left( 1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$  usw. Hélie, wie schon 1756 Simpson, wählte, um unendlich große Fehler auszuschließen, zwei zur Vertikalen durch  $M$  symmetrische Geraden  $AB$  und  $AB_1$  oder  $\eta = a \mp \frac{a}{b} x$  (Abb. 100). Dannist  $BB_1 = 2b$  die Breite des lotrechten, zu  $M$  symmetrischen Zielstreifens (1, 1, 2, 2), der alle Schüsse faßt. Es möge kurz gezeigt werden, wie bei einer solchen Annahme die Berechnungen sich gestalten. Die Zahl der Treffer im Streifen (1, 1, 2, 2) ist

$$n \cdot 2 \int_{x=0}^{x=b} \left( a - \frac{a}{b} x \right) dx = n, \text{ daraus } a = \frac{1}{b},$$

so daß

$$y = \frac{1}{b} \left( 1 - \frac{x}{b} \right).$$

Somit ist die Zahl der Treffer in dem zu  $M$  symmetrischen Zielstreifen (3, 3, 4, 4) von der Breite  $2l$  gleich

$$2n \int_0^l \frac{1}{b} \left( 1 - \frac{x}{b} \right) dx$$

= dem  $n$ -fachen der Fläche  $ACDFEA = n \cdot \frac{l}{b} \left( 2 - \frac{l}{b} \right)$ . Statt  $b$  sei die wahrscheinliche Abweichung  $w$  eingeführt: Wird  $l$  speziell  $= w$ , so ist jene Trefferzahl  $= \frac{n}{2}$ , also  $\frac{w}{b} \left( 2 - \frac{w}{b} \right) = \frac{1}{2}$ ;  $w = b \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{b}{1,414}$ . Also kann

die Trefferzahl  $N$ , die auf den Streifen 3, 3, 4, 4 von der Breite  $2l$  entfällt,

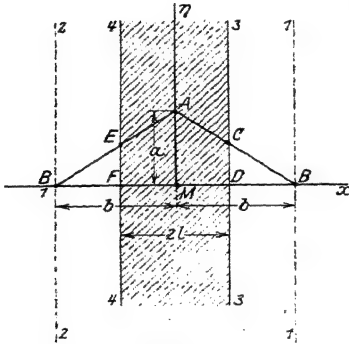


Abb. 100.

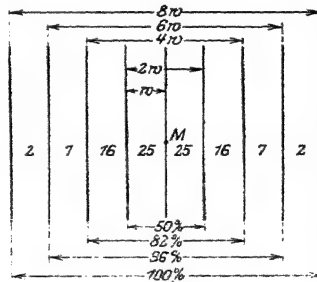


Abb. 101.

statt durch  $\frac{l}{b}$  durch den Wahrscheinlichkeitsfaktor  $\frac{l}{w}$  ausgedrückt werden, es ist

$$N = n \cdot \frac{l}{3,414 \cdot w} \left( 2 - \frac{l}{3,414 \cdot w} \right) = 0,293 \cdot n \left( 2 - 0,293 \cdot \frac{l}{w} \right),$$

wo  $\frac{l}{w} = \frac{2l}{2w} = \frac{\text{Breite des Zielstreifens}}{50 \text{ prozentige Streuung}}$ . Übrigens hat das Gaußsche Gesetz noch immer seinen Platz in der Wahrscheinlichkeitstheorie behauptet.

Anmerkung 5. Auf Grund des Gaußschen Gesetzes hatte man für die Zahl  $N$  der Treffer, die in einem zum Kartenmittelpunkt symmetrischen Zielstreifen von der Breite  $2l$  liegen

$$N = 2n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-t^2} dt = n \cdot \eta \left( h l \right) = n \cdot \eta \left( 0,4769 \cdot \frac{l}{w} \right)$$

(s. Anhang, Tabelle 12). Hierfür pflegt man lieber die Tabelle  $\psi \left( \frac{l}{w} \right)$  (vgl.

Tabelle 13) zu benutzen, die unmittelbar  $N = n \cdot \psi \left( \frac{l}{w} \right)$  in Funktion des sog.

Wahrscheinlichkeitsfaktors  $\frac{l}{w}$  liefert.

Mit  $n = 100$  gibt  $100 \cdot \psi\left(\frac{l}{w}\right)$  die Prozentzahl der Treffer in jenem Streifen von der Breite  $2l$  an, wenn die wahrscheinliche oder 50prozentige Abweichung  $w$  oder das Doppelte davon, die 50prozentige „Streuung“  $2w$  gegeben ist. Ein sehr kurzer Auszug aus der Tabelle  $\psi\left(\frac{l}{w}\right)$  ist in der obenstehenden Abbildung 101 niedergelegt, die in der praktischen Ballistik viel benützt wird und in der die zu  $M$  symmetrischen Zielstreifen von der Breite  $2w, 4w, 6w, 8w, \left(\frac{2l}{2w} = 1, 2, 3, 4\right)$  eingezeichnet sind, samt den zugehörigen Trefferprozentzahlen. (Übrigens wird statt  $100\%$  besser  $99\%$  verwendet.)

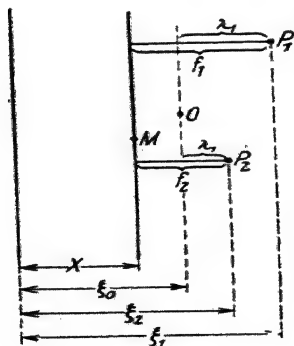
**§ 64. Über den Gegensatz zwischen den wahren und den scheinbaren oder „plausiblen“ Abweichungen. Indirekte Messung ballistischer Größen.**

Bisher wurde angenommen, daß der wahre Mittelpunkt  $M$  der Geschoßgarbe bekannt sei. Es war nämlich vorläufig nur von den Abweichungen nach rechts und links die Rede, und hierbei war die Abszisse  $X$  des Garbenmittelpunkts  $M$  als gegeben vorausgesetzt; von diesem aus wurden alsdann die Abweichungen  $f_1 f_2 f_3 \dots$  der einzelnen Durchschlagspunkte  $P_1 P_2 \dots$  gleich  $\xi_1 - X$ ,  $\xi_2 - X$  usw. genommen, wobei  $\xi_1 \xi_2 \dots$  die Abszissen der Durchschlagspunkte selbst vorstellen.

selbst vorstellen.

Tatsächlich ist nun  $M$  nicht bekannt, sondern statt dieses wahren Garbenmittelpunkts wird der plausibelste oder wahrscheinlichste Mittelpunkt  $O$  der Garbe genommen (Abb. 102), dessen Lage  $(\xi_0 \eta_0)$  als die des mittelsten unter den verschiedenen Durchschlagpunkten  $(\xi_1 \eta_1)$ ,  $(\xi_2 \eta_2) \dots$  dadurch gegeben ist, daß seine Abszisse  $\xi_0$  das arithmetische Mittel aus den Abszissen  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots$  der verschiedenen Durchschlagpunkte ist,  $\xi_0 = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots}{n}$ , entsprechend für die Ordinate. Wenn man den Durchschlagpunkten  $P_1 P_2 P_3 \dots$  gleiche Gewichte zuerteilt, so ist dieser Punkt  $O$  der Schwerpunkt (sukzessive Konstruktion von  $O$  als Schwerpunkt). Daß dieser mittelste Treffpunkt  $O$  gleichzeitig der wahrscheinlichste oder plausibelste Garbenmittelpunkt ist, läßt sich nur unter einer Hilfsannahme beweisen, bezüglich deren man übrigens eine gewisse

Abb. 102.



**Abb. 102.**

Auswahl hat. Eine solche hinreichende Annahme ist z. B., daß der folgende Satz als durch die Erfahrung bestätigt vorausgesetzt wird: Wenn  $n$  Beobachtungen  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n$  einer Größe vorliegen, so ist

derjenige Wert  $\alpha$  der wahrscheinlichste Wert der Größe, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen  $\alpha - \xi_1, \alpha - \xi_2, \dots$  der einzelnen Beobachtungen von ihm ein Minimum ist. (Einer der beiden Sätze muß unbewiesen bleiben.) Im vorliegenden Fall handelt es sich um den Abstand  $\xi$  des Treffpunkts vom linken Scheibenrand; hierfür liegen von den  $n$  Schüssen die Messungen  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n$  vor. Man suche einen Punkt  $O$ , für den — was allein diese Abszissen  $\xi$  anlangt —

$$(\alpha - \xi_1)^2 + (\alpha - \xi_2)^2 + \dots + (\alpha - \xi_n)^2$$

ein Minimum ist; die Ableitung nach  $\alpha$  gibt  $\alpha = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots}{n}$ , also  $= \xi_0$ ; entsprechend für die Ordinate.

Die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen gegenüber dem meist unbekannten wahren Wert heißen die wahren Abweichungen  $f_1 f_2 f_3 \dots$ ; dagegen die Abweichungen gegenüber dem wahrscheinlichsten Wert oder dem arithmetischen Mittel heißen die scheinbaren oder plausiblen Abweichungen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$ . Im vorliegenden Fall sind diese letzteren (soweit es sich zunächst nur um die Abweichungen nach rechts und links handelt) die Abstände  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$  der einzelnen Durchschlagspunkte  $P_1 P_2 P_3 \dots$  von der Lotrechten durch den mittelsten Treffpunkt  $O$  mit  $\xi_0 = \frac{\sum \xi}{n}$ . Diese scheinbaren Abweichungen sind durch die Beobachtung gegeben, die wahren nicht; überhaupt hat man es in den meisten Anwendungen der Ballistik mit den scheinbaren Abweichungen zu tun, da nur diese bekannt sind. Und es entsteht die Frage, wie man aus den scheinbaren Abweichungen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$  die Genauigkeitsmaße  $\mu, E, w$  zu berechnen hat.

Der Unterschied zwischen den wahren Abweichungen  $f_1 f_2 f_3 \dots$  und den scheinbaren Abweichungen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$  wird vielleicht am klarsten durch das folgende Beispiel, bei dem in gewissem Sinn beide Arten von Abweichungen gegeben sind. Es wurde ein möglichst genaues Quadrat von 16 cm Seitenlänge gezeichnet und mit einem Planimeter, aus dem die einseitigen Fehler möglichst beseitigt waren, zehnmal umfahren. Aus den Differenzen  $f_1 f_2 f_3 \dots$  der einzelnen Inhaltmessungen gegenüber dem wahren Wert  $X = 256,0$  qcm ergab sich

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum f^2}{10}} = \sqrt{\frac{0,961}{10}} = 0,31 \text{ qcm} = 0,12\%.$$

Andererseits betrug das arithmetische Mittel  $\xi_0$  der 10 Messungen 256,1 qcm. Die Differenzen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$  gegenüber letzterem Wert gaben  $\sum \lambda^2 = 0,8650$ ; es fragt sich, wie nunmehr aus  $\sum \lambda^2$  der mittlere quadratische Fehler  $\mu$  sich ergibt.

Offenbar ist

$$\begin{array}{lcl} f_1 = \xi_1 - X & \lambda_1 = \xi_1 - \xi_0 \\ f_2 = \xi_2 - X & \lambda_2 = \xi_2 - \xi_0 \\ f_3 = \xi_3 - X & \lambda_3 = \xi_3 - \xi_0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

also

$$\left. \begin{array}{l} f_1 - \lambda_1 = \xi_0 - X \\ f_2 - \lambda_2 = \xi_0 - X \\ f_3 - \lambda_3 = \xi_0 - X \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (1)$$

wobei  $n \xi_0 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots$ , woraus  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots = 0$  folgt.  
Durch Addition der Gleichungen (1) ergibt sich

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots = n(\xi_0 - X),$$

folglich ist

$$\begin{array}{l} f_1 - \lambda_1 = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots}{n} \\ f_2 - \lambda_2 = \text{derselben} \\ \vdots \end{array}$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = f_1 - \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots}{n} = \frac{n-1}{n} f_1 - \frac{f_2}{n} - \frac{f_3}{n} - \dots \\ \lambda_2 = f_2 - \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots}{n} = \frac{n-1}{n} f_2 - \frac{f_1}{n} - \frac{f_3}{n} - \dots \\ \lambda_3 = f_3 - \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots}{n} = \frac{n-1}{n} f_3 - \frac{f_1}{n} - \frac{f_2}{n} - \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

Durch die Gleichungen (2) hängen die wahren Abweichungen  $f_1 f_2 f_3 \dots$  mit den plausiblen Abweichungen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$  zusammen. Dabei ist  $\sum \lambda$  genau  $= 0$ ,  $\sum f$  nur annähernd  $= 0$ .

Nun ist in der Fehlertheorie von dem folgenden wichtigen Satz häufig Gebrauch zu machen. Es sei eine Größe  $y$  durch die Gleichung  $y = f(x_1 x_2 x_3 \dots)$  von den unmittelbar gemessenen Größen  $x_1 x_2 x_3 \dots$  abhängig.  $y$  wird nicht selbst gemessen, vielmehr die Größen  $x_1 x_2 x_3 \dots$ . Erst indirekt wird damit  $y$  erhalten. (Z. B. bei der Messung einer Geschosßflugzeit  $y$  mittels der Kondensatormethode wird die Anfangsladung  $x_1$  und die Restladung  $x_2$  des Kondensators gemessen und hieraus  $y$  berechnet, vgl. Beispiel weiter unten.) Die Fehler bei der Bemessung von  $x_1 x_2 \dots$  seien  $\pm dx_1$ ,  $\pm dx_2$ , ... und der hieraus entspringende Fehler von  $y$  selbst möge  $\pm dy$  sein, so ist

$$\pm dy = \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 \pm \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 \pm \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot dx_3 + \dots$$

Der größtmögliche Fehler  $m'$  von  $y$  wird dann eintreten, wenn bei der Messung von  $x_1 x_2 x_3 \dots$  die größtmöglichen Fehler

$m_1 m_2 m_3 \dots$  begangen werden und wenn gleichzeitig diese Teilfehler sich sämtlich summieren; denn dies wird der ungünstigste Fall sein. Also ist

$$m' = + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot m_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot m_2 + \dots \quad (3)$$

Im allgemeinen jedoch werden sich die Fehler nicht sämtlich summieren, sondern teilweise aufheben; und das Genauigkeitsmaß bei den Messungen von  $x_1 x_2 x_3$  sei gegeben durch die betreffenden mittleren quadratischen Fehler  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots$ . Als dann ist für den mittleren quadratischen Fehler  $\mu'$  von  $y$

$$\mu'^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \mu_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \mu_2 \right)^2 + \dots \quad (4)$$

Dasselbe gilt für die wahrscheinlichen und für die durchschnittlichen Fehler, da  $w = 0,6745 \cdot \mu$  und  $E = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \mu$ .

Die Richtigkeit der Gleichung (4) läßt sich folgendermaßen erkennen:  $\mu'$  bestimmt sich aus der Summe der Quadrate aller  $dy$ , ebenso  $\mu_1$  aus der Summe der Quadrate aller  $dx_1$  usw. Nun ist, durch Quadrieren der Gleichung für  $dy$ ,

$$(dy)^2 = + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 \right)^2 + \dots,$$

da die doppelten Produkte

$$2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2, \quad 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot dx_3 \text{ usw.}$$

sich um so genauer aufheben werden, je größer die Versuchszahl ist. Denn z. B. zu irgendeinem  $dx_1 \cdot dx_2 = (+5)(+4)$  wird ein Produkt gleich  $(+4)(-5)$  existieren usw. Denkt man sich die Gleichung für  $dy^2$  zu sämtlichen Beobachtungen angeschrieben und alle diese Gleichungen addiert, so erhält man (4). Über den strengen Beweis der Formel (4) vgl. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1903, Nr. 126.

Wenn speziell  $y$  eine gegebene lineare Funktion der Größen  $x_1 x_2 x_3 \dots$  ist,  $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$ , so ist  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_2$ , also

$$\mu'^2 = (a_1 \mu_1)^2 + (a_2 \mu_2)^2 + \dots \quad (5)$$

Setzt sich endlich  $y$  durch algebraische Summation

$$y = \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 + \dots$$

aus  $x_1 x_2 \dots$  zusammen, so wird

$$\left. \begin{aligned} \mu'^2 &= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \dots, \\ \text{entsprechend} \quad w'^2 &= w_1^2 + w_2^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wirken also z. B. auf den Flug von Geschossen mehrere voneinander unabhängige Streuungsursachen (Zielfehler des Schützen; Schwankungen der Vibration der Waffe; Änderungen in der Windgeschwin-



digkeit), so ist die resultierende mittlere Streuung gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der mittleren Einzelstreuungen. (Sie ist nicht gleich der Summe der Einzelstreuungen, da sich die Einflüsse zum Teil aufheben können.) Der letztere Satz (6) pflegt in der Ballistik als das Didionsche Gesetz bezeichnet zu werden; ob mit Recht, sei hier nicht untersucht.

Den Satz (5) wende man auf die Beziehung (2) zwischen den  $f_1 f_2 \dots$  und den  $\lambda_1 \lambda_2 \dots$  an. Die wahren Fehler  $f_1 f_2 \dots$  haben dieselbe Genauigkeit, ausgedrückt durch den mittleren quadratischen Fehler  $\mu$ ; d. h. es ist  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu$ . Die Koeffizienten  $a_1 a_2 a_3 \dots$  sind hier  $\frac{n-1}{n}$ ,  $-\frac{1}{n}$ ,  $-\frac{1}{n}$ ,  $\dots$ ; der mittlere quadratische Fehler  $\mu'$  der  $\lambda$ , nach demselben Gesetz gebildet wie früher  $\mu$  für die wahren Abweichungen, ist  $\mu' = \sqrt{\frac{\sum (\lambda^2)}{n}}$ ; also ist

$$\begin{aligned}\mu'^2 &= \frac{\sum (\lambda^2)}{n} = \left(\frac{n-1}{n} \cdot \mu\right)^2 + \left(-\frac{1}{n} \cdot \mu\right)^2 + \left(-\frac{1}{n} \cdot \mu\right)^2 + \dots \\ &= \left\{ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots \right\} \mu^2 = \left\{ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n^2} \right\} \mu^2 \\ &= \frac{n^2 + 1 - n - 1}{n^2} \cdot \mu^2 = \frac{n-1}{n} \mu^2;\end{aligned}$$

somit ist

$$\mu = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \mu' = \sqrt{\frac{\sum \lambda^2}{n-1}}. \quad (7)$$

Nach dieser Regel ist der mittlere quadratische Fehler  $\mu$  (und daraus der wahrscheinliche  $w$ ) zu bilden, wenn, wie dies in der Ballistik fast stets der Fall ist, die „plausiblen“ Abweichungen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$ , also diejenigen gegenüber dem arithmetischen Mittel, der Rechnung zugrunde gelegt werden müssen.

Ferner die durchschnittliche Abweichung  $E$  ist jetzt nicht mittels  $E = \frac{\sum |\lambda|}{n}$ , sondern streng genommen mittels

$$E = \frac{\sum |\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (8)$$

zu berechnen.

Denn bezeichnet man  $\frac{\sum |\lambda|}{n}$  mit  $E'$ , so ist  $\mu' = E' \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ , wie früher  $\mu = E \sqrt{\frac{n}{n-1}}$  war; also ist  $\frac{E}{E'} = \frac{\mu}{\mu'} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ . Folglich

$$E = \sqrt{\frac{n}{n-1}} E' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{\sum |\lambda|}{n} = \frac{\sum |\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Ebenso ist  $w_s = w'_s \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ , wobei  $w'$  das Entsprechende zu  $w$ , (s. o.) für die scheinbaren Abweichungen bedeutet.

Anmerkung. 1. Die Sicherheit dieser Ausdrücke

$$\frac{\Sigma |\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

für  $\mu$  bzw.  $E$  und damit die Genauigkeit der Berechnung von  $w$  aus  $\mu$  oder  $E$  ist angegeben durch die wahrscheinlichen Grenzen. Letztere seien hier ohne Ableitung mitgeteilt, wie sie von Helmert berechnet wurden.

Wahrscheinliche Grenzen von  $\mu$ :

$$\sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n-1}} \cdot 1 \pm e \sqrt{2} \sqrt{2 - \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{8}{n-1}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}}$$

$n$  Versuchszahl;  $e = 0,476936$ ; betreffs  $\Gamma$  vgl. Anhang, Tabelle 16; oder angenähert, für größere  $n$  (etwa von  $n = 10$  ab):

$$\sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n-1}} \left[ 1 \pm \frac{e}{\sqrt{n-1}} \right];$$

wahrscheinliche Grenzen von  $E$ :

$$\frac{\Sigma |\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}} \left[ 1 \pm e \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left( \frac{\pi}{2} \right)} \right]$$

oder angenähert, für größere  $n$ :

$$\frac{\Sigma |\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}} \left[ 1 \pm e \sqrt{\frac{2}{n-1}} \right];$$

wahrscheinliche Grenzen von  $w_p$ :

$$w_p \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \left[ 1 \pm \frac{0,7867}{\sqrt{n-1}} \right]$$

Die Glieder mit  $\pm$  geben, mit 100 multipliziert, die wahrscheinliche Genauigkeit in Prozenten an. Damit kennt man auch die Genauigkeit von  $w$ , je nachdem  $w$  aus  $\mu$  oder  $E$  oder  $w_p$  (mit den scheinbaren Fehlern) berechnet wird.

2. Erwähnt sei noch, daß man  $\Sigma(\lambda^2)$  und damit  $\mu$  auch aus den direkten Beobachtungswerten erhalten kann (z. B. aus den Abmessungen  $\xi_1, \xi_2, \dots$  der einzelnen Schußlöcher vom linken Scheibenrand aus); wie nämlich aus dem ersten Teil von § 64 leicht zu ersehen ist, hat man

$$\Sigma(\lambda^2) = \Sigma(\xi^2) - \frac{1}{n} (\Sigma \xi)^2 \quad (\text{Formel von Jordan}).$$

Ebenso aus den in § 65 eingehender zu besprechenden Differenzen  $d$  dieser direkten Beobachtungen:

$$\Sigma(\lambda^2) = \Sigma(d^2) - \frac{1}{n} (\Sigma d)^2 \quad (\text{Formel von Wellisch}).$$

Endlich nach Kozák aus den sogenannten Beobachtungsresten. Darüber vgl. die Lit.-Not. § 61 bis 73.

Beispiele. 1. Im ballistischen Laboratorium wurde dasselbe Zeitintervall  $t$  mittels des Kondensator-Chronoskops 10mal gemessen (Hörer Lt. Uschold);

$$t = \frac{W \cdot C}{10^2} \left\{ \frac{1}{2} - \log_{\text{nat}} \sin \frac{\alpha}{2} \right\};$$

$W$  der Widerstand des Entladungskreises in Ohm,  $\log W = 2,69910$ ;  $C$  die Kapazität des Kondensators in Farad,  $\log C = 0,69897$ ;  $\alpha_0$  der Galvanometerausschlag vor dem Versuch,  $\alpha$  derjenige nach Unterbrechung beider Stromkreise. Es fand sich bei den 10 Versuchen als Mittel von  $\sin \frac{\alpha_0}{2} = 0,039886$ ,

dazu der mittlere quadratische Fehler  $\mu_1^2 = 0,08546$ ; als Mittel von  $\sin \frac{\alpha}{2}$ <sup>(9)</sup>  
 $= 0,01214$ , dazu  $\mu_2^2 = 0,04423$ .<sup>(8)</sup> Nach Gleichung (4) ist sonach der mittlere quadratische Fehler  $\mu$  für die einzelne Bestimmung des Zeitintervalls  $t$  gegeben durch

$$\mu = \frac{WC}{10^6} \sqrt{\left( \frac{\mu_1}{\sin \frac{\alpha_0}{2}} \right)^2 + \left( \frac{\mu_2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2}$$

es wird  $\mu = 0,0000014$  sec oder  $w = 0,0000093$  sec.

Derselbe Wert für  $\mu$  muß sich ergeben, wenn zu jedem einzelnen Versuche  $t$  berechnet wird. Es fand sich im Mittel der 10 Versuche  $t = 0,0002975$ ; und aus den Differenzen  $\lambda$  der einzelnen berechneten Werte von  $t$  gegenüber dem Mittelwert von  $t$  ergab sich gleichfalls  $\mu = 0,0000014$  sec  $= 0,47\%$  der gemessenen Zeit  $t$ , die ungefähr der Flugzeit des  $S$ -Geschosses auf der Strecke von 25 cm entspricht.

2. Mit einem Boulengé-Apparat wurde eine Zeitdifferenz von zirka 0,016 sec wiederholt gemessen (Hörer Lt. Uschold); die Ablesungen am Zeitmesserstab erfolgten mit Nonius und Lupe, so daß 0,01 mm noch geschätzt werden konnten. Der mögliche maximale Ablesefehler bei der Ausmessung der Disjunktionsmarke betrug 0,05 mm; dies entsprach einer Zeitdifferenz von  $\pm 0,000034$  sec; bei der Ausmessung der Zeitmarke konnte der Ablesefehler im Maximum gleichfalls 0,05 mm sein, was einer Zeitdifferenz von  $\pm 0,000031$  sec gleichkam. Also trat der mögliche maximale Fehler, der bei der Messung der fraglichen Zeit durch die Ablesungen bewirkt wird, dann ein, wenn im ungünstigsten Fall beide Partialfehler sich addieren; er ist somit  $= +0,000034 + 0,000031 = 0,000065$  sec (der mittlere quadratische Fehler ergab sich zu 0,000057 sec).

## § 65. Sukzessive Differenzen.

Neben den bis jetzt erwähnten, aus den Beobachtungen leicht zu entnehmenden Genauigkeitsmaßen, der mittleren quadratischen Abweichung  $\mu$ , der durchschnittlichen  $E$  und dem weit weniger genauen Maß  $w$ , (durch Abzählen), ist speziell für die Zwecke der Ballistik noch ein weiteres Genauigkeitsmaß von besonderer Wichtigkeit. Man geht aus von den ursprünglichen Beobachtungen (also z. B., wenn es sich um die Streuung der Geschosse nach rechts oder links handelt, von den Abständen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  der einzelnen Durchschlagspunkte vom linken Scheibenrand, oder wenn es sich um die Längsstreuungen handelt, von den beobachteten Schußweiten usw.), nimmt deren sukzessive Differenzen  $\xi_1 - \xi_2 = d_1, \xi_2 - \xi_3 = d_2$  usw. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen und berechnet den Durchschnittswert

$E_d = \frac{\sum |d|}{s}$  dieser  $s$  Differenzen. Falls die Beobachtungen in der richtigen Reihenfolge angeschrieben sind, hat man  $s = n - 1$  unabhängige Differenzen bei  $n$  Beobachtungen. Nur wenn über die Reihenfolge der Beobachtungen nichts bekannt ist, wird man sämtliche Differenzen zu Hilfe nehmen, in der Anzahl  $s = \frac{n(n-1)}{2}$ . Dann ist die durchschnittliche Abweichung  $E$  zu berechnen aus

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sum |d|}{s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot E_d, \quad (1)$$

$$\text{somit } w = E \cdot \varrho \sqrt{\pi} = 0,5978 \cdot \frac{\sum |d|}{s}.$$

Um dies einzusehen, sei an Gleichung (5) von § 64 erinnert. Wenn eine Größe  $y$  als lineare Funktion zweier anderen  $x_1$  und  $x_2$  gegeben ist,  $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ , und wenn  $x_1$  und  $x_2$  mit einer Genauigkeit gemessen sind, die durch die mittleren quadratischen Fehler  $\mu_1$  für  $x_1$  und  $\mu_2$  für  $x_2$  oder auch durch den durchschnittlichen Fehler  $E_1$  für  $x_1$  und  $E_2$  für  $x_2$  gekennzeichnet ist, so ist die Genauigkeit der Größe  $y$  durch deren mittleren quadratischen Fehler  $\mu'$  oder den durchschnittlichen Fehler  $E'$  bestimmt, wobei  $\mu'^2 = a_1^2 \cdot \mu_1^2 + a_2^2 \cdot \mu_2^2$  bzw., da

allgemein  $E = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ,  $E'^2 = a_1^2 E_1^2 + a_2^2 E_2^2$ . Im vorliegenden Fall handelt es sich um die Differenzen  $d = \xi_1 - \xi_2$  usw. der einzelnen Beobachtungen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ . Alle Durchschlagspunkte seien mit gleicher Genauigkeit von dem linken Scheibenrand aus gemessen, so ist  $E_1 = E_2 = E$ ; ferner ist hier  $a_1 = +1$ ,  $a_2 = -1$ . Die durchschnittliche Differenz ist  $E' = \frac{\sum |d|}{s}$ , somit ist

$$\frac{\sum |d|}{s} = \sqrt{(+1 \cdot E)^2 + (-1 \cdot E)^2} = \sqrt{2} E \quad \text{oder} \quad E = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sum |d|}{s}.$$

Nach der Berechnung von Helmert ist der Grad der Genauigkeit dieses Präzisionsmaßes durch die folgenden wahrscheinlichen Grenzen gegeben:

$$\frac{\sum |d|}{s} \left[ 1 \pm \varrho \sqrt{2} \sqrt{\frac{\frac{n+1}{3} \cdot \pi + 2(n-2) \sqrt{3} - 4n + 6}{n(n-1)}} \right]$$

$n$  Versuchszahl;  $\varrho = 0,4769$ .

Speziell für  $n = 10$  Versuche verhalten sich die Ermittlungen der wahrscheinlichen Abweichungen  $w$  (oder des Doppelten, der sogenannten 50prozentigen Streuung  $2w$ ), aus der mittleren quadratischen Abweichung  $\mu$ , aus der durchschnittlichen  $E$  und aus den Differenzen  $d$  der Beobachtungen selbst, der Genauigkeit nach folgendermaßen: Im wahrscheinlichen Fall sind diese Maße (vgl. § 64) genau bis auf Beträge, die bzw. im Verhältnis 0,159; 0,170; 0,163 stehen. Also ist das Maß  $\mu$  das genaueste, dann folgt  $\frac{\sum |d|}{s}$ , endlich die durchschnittliche Abweichung  $E$ .

Die Vorteile, die eine Berechnung des Schußgenauigkeitsmaßes aus den sukzessiven Differenzen  $d$  mit sich bringt, bestehen übrigens keineswegs nur in der größeren Genauigkeit gegenüber der Be-

rechnung aus der durchschnittlichen Abweichung und in dem geringeren Aufwand an Mühe, sondern auch darin, daß das Differenzenverfahren weniger leicht versagt: Es kann vorkommen, daß während des Beschusses eine veränderliche störende Ursache bewirkt, daß der mittlere Treffpunkt „wandert“, daß allgemein das arithmetische Mittel fortwährend sich ändert: z. B. kann die Lufttemperatur sich steigern, der Lauf sich erhitzen, die Geschwindigkeit des Windes kann merklich sich ändern usw. In solchen Fällen versagen alle Genauigkeitsmaße, bei deren Berechnung man vom arithmetischen Mittel auszugehen hat, und es muß das Verfahren der sukzessiven Differenzen angewendet werden, wenn man die Beobachtungsreihe beibehalten will. Es hat nämlich E. Vallier darauf aufmerksam gemacht, daß die Berechnung der wahrscheinlichen Abweichung aus den sukzessiven Differenzen unabhängig von einem etwaigen Wandern des mittleren Treffpunkts ist, und O. v. Eberhard hat hierfür den allgemeinen Beweis gegeben.

Ob eine störende Ursache vorlag oder nicht, läßt sich dadurch aus der Beobachtungsreihe entnehmen, daß man den wahrscheinlichen Fehler  $w$  sowohl aus der durchschnittlichen Abweichung  $E$  als auch mittels der sukzessiven Differenzen  $d$  errechnet; beide Werte für  $w$  müssen annähernd übereinstimmen oder es muß

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sum |d|}{s} : \frac{\sum |l|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

nahezu = 1 sein. Weicht der Wert des Bruches um mehr als etwa 20% nach oben oder unten von 1 ab, d. h. liegt der Wert des Bruchs nicht zwischen 0,8 und 1,2, so ist anzunehmen, daß der mittlere Treffpunkt wanderte, daß eine störende Ursache vorlag.

Beispiel. Bei gleicher Rohrerhöhung und gleicher Pulverladung wurden die folgenden Werte der Schußweite beobachtet, die in der wahren Reihenfolge aufgeführt sind:

a) bei Windstille 2111, 2134, 2112, 2146, 2108, 2121, 2097, 2082, 2139, 2161 m; Mittel 2121 m.

$$\frac{\sum |l|}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{191}{\sqrt{10 \cdot 9}} = 20,1; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sum |d|}{9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 28,66 = 20,2.$$

Verhältnis beider Zahlen nahezu = 1.

b) bei zunehmendem Rückenwind 2111, 2144, 2132, 2176, 2148, 2171, 2157, 2152, 2219, 2251 m; Mittel 2166 m.

$$\frac{\sum |l|}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{305}{\sqrt{10 \cdot 9}} = 32,2; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sum |d|}{9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 28,66 = 20,3.$$

Verhältnis beider Zahlen 0,63.

Ein weiteres Beispiel in § 71 („Zahlenbeispiel“).

## § 66. Wahrscheinlicher Fehler des mittleren Treffpunkts. Zusammenstellung bezüglich der Genauigkeitsmaße.

Mit dem Vorstehenden ist die Berechnung des Genauigkeitsmaßes  $h$  aus den Abweichungen  $\lambda$  gegenüber dem arithmetischen Mittel gezeigt. Diesem letzteren haftet jedoch ein Fehler an, der um so größer sein wird, aus je weniger Beobachtungen das Mittel genommen ist. Es fragt sich, auf wieviele Stellen der Mittelwert im wahrscheinlichen Fall genau ist.

Direkt beobachtet sind die Größen  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n$ ; das Mittel ist  $\xi_0 = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots}{n}$  (z. B.  $\xi_1 \xi_2 \dots$  die Abstände der Geschößdurchschläge von der linken Scheibenkante;  $\xi_0$  der Abstand des mittleren Treffpunkts  $O$  von derselben Kante). Die Größen  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots$  seien alle mit derselben Genauigkeit gemessen, ausgedrückt durch den mittleren quadratischen Fehler  $\mu$ . Wendet man Gleichung (5) von § 64 auf diesen Fall an und berücksichtigt, daß  $\xi_0 = \frac{1}{n} \xi_1 + \frac{1}{n} \xi_2 + \dots$ , daß also hier  $a_1 = a_2 = \dots = \frac{1}{n}$ , so ist der mittlere quadratische Fehler  $M$  von  $\xi_0$  gegeben durch  $M^2 = \left(\frac{1}{n} \mu\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \mu\right)^2 + \dots$  ( $n$ -mal)  $= \frac{n}{n^2} \mu^2 = \frac{\mu^2}{n}$ , also ist der mittlere quadratische Fehler  $M$  des arithmetischen Mittels

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}, \quad (2)$$

ebenso der wahrscheinliche Fehler  $W$  des Mittels  $W = \frac{w}{\sqrt{n}}$ , wenn  $\mu$  bzw.  $w$  die betreffenden Fehler für die Einzelmessungen darstellen.

Während also  $\mu$  und  $w$  von der Zahl der Beobachtungen unabhängig sind — wenn diese nur so groß ist, daß die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitslehre Anwendung finden dürfen —, nimmt  $M$  bzw.  $W$  mit der reziproken Quadratwurzel aus der Zahl der Einzelbeobachtungen ab.  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ist für  $n = 1; 2; 10; 20; 100$  bzw.  $= 1; 0,71; 0,32; 0,22; 0,1$ . Die Genauigkeit des arithmetischen Mittels steigert sich also bei wachsender Versuchszahl  $n$  anfangs rasch, dagegen wird später der Gewinn immer geringer. Das ist der Grund dafür, daß bei Präzisionsmessungen meist nicht mehr als 10 bis 15 Versuche angestellt werden.

### Zusammenstellung bezüglich der Genauigkeitsmaße.

Wenn  $n$  einzelne Beobachtungen der betreffenden ballistischen Größe vorliegen, so nehme man das arithmetische Mittel der

Beobachtungen und die Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerte gegenüber diesem Mittelwert. Ohne Rücksicht auf das Vorzeichen seien diese Abweichungen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ .

Dann ist

a) Die sogenannte durchschnittliche Abweichung (in der deutschen Armee früher „mittlere Abweichung“ genannt):

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots}{\sqrt{n(n-1)}};$$

b) die sogenannte mittlere quadratische Abweichung der einzelnen Beobachtung:

$$\iota = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots}{n-1}}$$

c) Falls die Beobachtungen in der richtigen Reihenfolge notiert vorliegen, schreibt man die aufeinanderfolgenden Unterschiede der einzelnen Beobachtungen selbst an; diese  $n-1$  Unterschiede seien, gleichfalls ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, der Reihe nach  $d_1, d_2, d_3, \dots$ ; ihr arithmetisches Mittel sei

$$D = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots}{n-1}.$$

Alsdann ist

d) Die wahrscheinliche oder 50prozentige Abweichung  $w$  der einzelnen Beobachtung

am genauesten gegeben durch:	$w = 0,6745 \cdot \mu,$
etwas weniger genau	„ $w = 0,5978 \cdot D,$
noch weniger genau	„ $w = 0,8453 \cdot E.$

e) Die wahrscheinliche oder 50prozentige Streuung  $s_{50}$  (in der deutschen Armee früher die „mittlere Streuung“ genannt) ist das Doppelte von  $w$ , also

am genauesten:	$s_{50} = 1,3490 \cdot \mu,$
etwas weniger genau:	$s_{50} = 1,1956 \cdot D,$
noch weniger genau:	$s_{50} = 1,6906 \cdot E.$

Über den Genauigkeitsgrad vgl. § 64 und 65.

f) Der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels ist

$$W = \frac{w}{\sqrt{n}}.$$

Beispiel. Mittels eines Boulongé-Apparats wurde die Geschwindigkeit  $v_{45}$  eines Infanteriegeschosses auf der Messungsstrecke von 50 m nach der Mündung durch 10 Schüsse gemessen:

Nr. des Schusses	Gemessene Geschwindig- keiten $v_{25}$ (m/sec)	Unterschiede gegenüber dem Mittelwert $i$	Quadrate dieser Unterschiede $i^2$	Aufeinander fol- gende Unterschiede der gemessenen Ge- schwindigkeiten $d$
1	863,0	3,7	13,69	
2	857,9	1,4	1,96	5,1
3	859,4	0,1	0,01	1,5
4	857,2	2,1	4,41	2,2
5	855,1	4,2	17,64	2,1
6	857,6	1,7	2,89	2,5
7	861,5	2,2	4,84	3,9
8	862,3	3,0	9,00	0,8
9	861,5	2,2	4,84	0,8
10	857,9	1,4	1,96	3,6
	Arithmet. Mittel = 859,3	Summe = 22,0	Summe = 61,24	Summe = 22,5

a) Durchschnittliche Abweichung (im deutschen Heer früher „mittlere Abweichung“)

$$E = \frac{22,0}{\sqrt{10 \cdot (10-1)}} = \pm 2,3 \text{ m/sec} = \pm 0,27\%$$

b) Mittlere quadratische Abweichung

$$\sqrt{61,24} \pm 2,6 \text{ m/sec} = \pm 0,3\%$$

c)  $D = \frac{22,5}{9} = 2,51$

d) 50prozentige Abweichung  $w$

$$\begin{aligned} \text{aus } \mu: w &= 0,6745 \cdot 2,6 = \text{rund } 1,7 \text{ m/sec,} \\ \text{" } D: w &= 0,5978 \cdot 2,51 = \text{" } 1,5 \text{ " } \\ \text{" } E: w &= 0,8453 \cdot 2,3 = \text{" } 1,9 \text{ " } \end{aligned}$$

e) 50prozentige Streuung (im deutschen Heer früher „mittlere Streuung“)

$$\begin{aligned} \text{aus } \mu: s_{50} &= 3,5 \text{ m/sec,} \\ \text{" } D: s_{50} &= 3,0 \text{ " } \\ \text{" } E: s_{50} &= 3,9 \text{ " } \end{aligned}$$

## § 67. Berechnung des arithmetischen Mittels im Fall gruppenweiser Beobachtungen.

Wenn z. B. ein bestimmtes Zeitintervall mit mehreren ( $r$ ) Boulogé-Apparaten  $A, B, C, \dots$  gemessen wurde, die unter sich verschiedene Genauigkeit besitzen, und zwar mit  $A$  10 mal, mit  $B$  15 mal, mit  $C$



9 mal usw., und wenn die mit den einzelnen Apparaten erhaltenen Mittelwerte  $x_1 x_2 x_3 \dots$  waren, so ist von vornherein ersichtlich, daß es nicht gestattet sein kann, als wahrscheinlichsten Wert  $x$  des Zeitintervalls zu nehmen  $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{r}$ , da die Genauigkeit der einzelnen Mittel  $x_1 x_2 x_3 \dots$  sowohl wegen der Verschiedenheit der Apparate als auch wegen der Verschiedenheit der Versuchszahlen eine verschiedene ist. Man wird vielmehr die einzelnen arithmetischen Mittel  $x_1 x_2 x_3 \dots$ , um sie vergleichbar zu machen, mit gewissen Zahlen  $p_1 p_2 p_3 \dots$  — „Gewichten“, Zeugnissen — multiplizieren, ehe man sie addiert und durch die Zahl der Gruppen dividiert; so daß man hat

$$x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} \quad (1)$$

Gleiches gilt für irgendwelche ballistische Messungen (Gasdrücke, Geschwindigkeiten, mittlere Treffpunkte von Scheibentreffbildern usw.). Es handelt sich darum, diese Gewichtszahlen  $p_1 p_2 p_3 \dots$  zu ermitteln.

a) Die Genauigkeit der Messungen sei in allen Gruppen dieselbe (mittlerer quadratischer Fehler der einzelnen Messung  $\mu$ ), nur die Anzahlen  $n_1 n_2 n_3 \dots$  der Versuche, aus denen die einzelnen Mittelwerte  $x_1 x_2 x_3 \dots$  entstanden sind, seien verschiedene; ferner seien alle Messungen voneinander unabhängig. In diesem Fall ist das Gesamtmittel  $x$

$$x = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} \quad (2)$$

Die Gewichtszahlen sind also  $p_1 = n_1, p_2 = n_2$  usw. Der mittlere quadratische Fehler für  $x$  ist  $\frac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}}$ .

b) Die Versuchszahlen  $n_1 n_2 n_3 \dots$  in den einzelnen Gruppen seien gleich  $n_1 = n_2 = n_3 = \dots$ , aber die Genauigkeiten seien verschieden; nämlich in der ersten Gruppe sei der mittlere quadratische Fehler der Einzelmessung  $\mu_1$ , in der zweiten  $\mu_2$  usw., so ist das Gesamtmittel  $x$  wie folgt zu berechnen

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} \quad (3)$$

dabei

$$p_1 = \frac{1}{\mu_1^2}, \quad p_2 = \frac{1}{\mu_2^2}, \quad p_3 = \frac{1}{\mu_3^2}, \dots$$

Dasselbe Rechnungsverfahren tritt ein, wenn  $x_1 x_2 x_3 \dots$  nicht einzelne Mittelwerte, sondern die Ergebnisse der Einzelbeobachtungen sind, die mit verschiedener Genauigkeit angestellt wurden. Der mittlere quadratische Fehler  $\mu$  für  $x$  selbst ist dabei aus

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2} + \dots \quad (4)$$

bestimmen: oder wenn  $\frac{1}{\mu^2}$  das Gewicht  $p$  des Mittels  $x$  bedeutet, ist  $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$ .

c) Sind sowohl die Genauigkeiten in den einzelnen Gruppen verschieden (mittlere quadratische Fehler der Einzelmessungen bzw.  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots$ ) als auch die Versuchszahlen  $n_1 n_2 n_3 \dots$ , aus denen die Einzelmittel  $x_1 x_2 x_3 \dots$  entstanden sind, so sind gegenüber b) die mittleren Fehler  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots$  zu ersetzen durch  $\frac{\mu_1}{\sqrt{n_1}}, \frac{\mu_2}{\sqrt{n_2}}, \dots$ , also ist das Gesamtmittel  $x$  gegeben durch

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}. \quad (5)$$

dabei jetzt

$$p_1 = \frac{n_1}{\mu_1^2}, \quad p_2 = \frac{n_2}{\mu_2^2}, \quad p_3 = \frac{n_3}{\mu_3^2}, \dots$$

#### Andeutung des Beweises.

Zu a. Es sei  $x_1$  das Mittel aus den beiden gleich genauen Beobachtungen  $y_1$  und  $y_2$ , d. h. es sei  $y_1 + y_2 = 2x_1$ ; ferner sei  $x_2$  das Mittel aus den drei mit derselben Genauigkeit wie  $y_1$  und  $y_2$  angestellten Beobachtungswerten  $y_3, y_4, y_5$ , d. h.  $3x_2 = y_3 + y_4 + y_5$ ; dann ist das Gesamtmittel

$$x = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} = \frac{2x_1 + 3x_2}{2+3},$$

woraus die Verallgemeinerung sich leicht ergibt. Ist dabei  $\mu$  der durchweg gleiche mittlere Fehler der Einzelmessung, so ist derjenige des Mittels  $x$  gleich  $\mu$  dividiert durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der Versuche (vgl. § 66),

$$\text{also} = \frac{\mu}{\sqrt{5}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2}}.$$

Zu b. Gegeben seien die drei Mittel  $x_1 x_2 x_3$ , entstanden aus je  $n$  Messungen, jedoch  $x_1$  mit dem mittleren Fehler  $\mu_1$  der Einzelmessung,  $x_2$  mit  $\mu_2$ ,  $x_3$  mit  $\mu_3$ . Der mittlere Fehler des Mittels  $x_1$  ist sodann  $\frac{\mu_1}{\sqrt{n}}$ . Andererseits sei

die Fiktion gebildet, daß sämtliche Beobachtungen (wie bei a) mit gleicher Genauigkeit, nämlich mit dem mittleren Fehler  $\mu$ , angestellt seien, daß dafür aber die Versuchszahlen in den einzelnen Gruppen verschieden seien, nämlich für  $x_1$  sei die Versuchszahl  $p_1$ , für  $x_2$  sei sie  $p_2$  usw. Dann ist nach a.  $x = (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) : (p_1 + p_2 + p_3)$ . Der mittlere Fehler von  $x_1$  ist bei dieser Fiktion offenbar  $\frac{\mu}{\sqrt{p_1}}$ , derjenige von  $x_2$  ist  $\frac{\mu}{\sqrt{p_2}}$ , der von  $x_3$  ist  $\frac{\mu}{\sqrt{p_3}}$ . Also

ist  $\frac{\mu_1}{\sqrt{n}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}$  oder  $p_1 = \frac{n \mu^2}{\mu_1^2}$ , ebenso  $\frac{\mu_2}{\sqrt{n}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}$  oder  $p_2 = \frac{n \mu^2}{\mu_2^2}$  usw. Also wird

$$= \left( \frac{n \mu^2}{\mu_1^2} x_1 + \frac{n \mu^2}{\mu_2^2} x_2 + \frac{n \mu^2}{\mu_3^2} x_3 \right) : \left( \frac{n \mu^2}{\mu_1^2} + \frac{n \mu^2}{\mu_2^2} + \frac{n \mu^2}{\mu_3^2} \right)$$

oder

$$x = \frac{\frac{1}{\mu_1^2} x_1 + \frac{1}{\mu_2^2} x_2 + \frac{1}{\mu_3^2} x_3}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2}},$$

also dasselbe, was oben allgemeiner ausgedrückt wurde.

Da  $n$  hier nicht mehr vorkommt, ist ersichtlich, daß diese Berechnung auch für  $n = 1$  gültig ist, also für den Fall, wo  $x_1, x_2, x_3, \dots$  nicht Mittelwerte, sondern Einzelwerte sind, die mit den durch  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  ausgedrückten, unter sich verschiedenen Genauigkeiten gemessen wurden.

Um das Gewicht des Mittels zu erhalten, denken wir uns nunmehr etwa die beiden Beobachtungen  $x_2$  (mit dem mittleren Fehler  $\mu_2$ ) und  $x_3$  (mit dem mittleren Fehler  $\mu_3$ ) zu einem Mittel  $x'$  vereinigt, was in der obigen Gleichung durch Klammerzeichen angedeutet wurde. Diesem Mittel komme der Fehler  $\mu'$  oder das Gewicht  $p'$  zu. Dann ist das Gesamtmittel

$$x = \frac{\frac{1}{\mu_1^2} x_1 + \frac{1}{\mu'^2} x'}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu'^2}},$$

dabei

$$\frac{1}{\mu'^2} x' = \frac{1}{\mu_2^2} x_2 + \frac{1}{\mu_3^2} x_3 \quad \text{und} \quad p' = p_2 + p_3 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\mu'^2} = \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2},$$

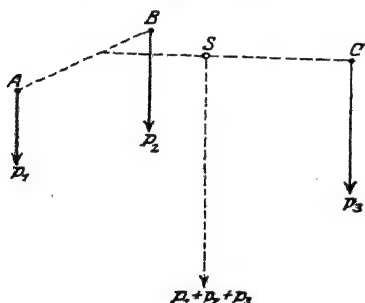


Abb. 103.

$$x' = \left( \frac{1}{\mu_2^2} x_2 + \frac{1}{\mu_3^2} x_3 \right) : \left( \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2} \right).$$

Daraus ist ohne weiteres die allgemeine Beziehung (4) zu erkennen.

Die Richtigkeit des Gesagten läßt sich auch durch die Analogie mit der Mechanik einsehen. Die Gleichung

$$x = (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) : (p_1 + p_2 + p_3)$$

erinnert an die Momentengleichung zur Berechnung z. B. der Abszisse  $x$  des Schwerpunkts  $S$  dreier punktförmiger Körper  $ABC$  mit den Abszissen  $x_1, x_2, x_3$  und den Gewichten  $p_1, p_2, p_3$ . In Punkt  $A$  wirkt das Gewicht  $p_1$ , in  $B$   $p_2$ , in  $C$   $p_3$ . Alsdann ist in dem Schwerpunkt  $S$ , wenn er die drei Punkte ersetzt

soll, das Gewicht  $p_1 + p_2 + p_3$  anzubringen und seine Abszisse  $x$  hat den obigen Wert.

Zu c) ist eine weitere Erläuterung überflüssig.

Beispiel. Derselbe Zeitabschnitt von ca. 0,016 sec wurde mit sechs verschiedenen und voneinander unabhängigen Chronographen je 50 mal gemessen: für jede Messungsgruppe wurde das Mittel und der mittlere quadratische Fehler  $\mu$  gegenüber dem Mittelwert bestimmt. Es fand sich

Kondensatorchronograph:	Mittel	$x_1 = 0,016315$ sec
	mittlerer Fehler $\mu_1$	$= 0,000016$ "
älterer Funkenchronograph:	Mittel	$x_2 = 0,016480$ "
	mittlerer Fehler $\mu_2$	$= 0,000128$ "

Stimmgabelchronograph:	Mittel	$x_3 = 0,016552 \text{ sec}$
	mittlerer Fehler	$\mu_3 = 0,000134 \text{ "}$
Boulengé-Apparat A:	Mittel	$x' = 0,016339 \text{ "}$
	mittlerer Fehler	$\mu' = 0,000055 \text{ "}$
Boulengé-Apparat B:	Mittel	$x'' = 0,016398 \text{ "}$
	mittlerer Fehler	$\mu'' = 0,000057 \text{ "}$
Boulengé-Apparat C:	Mittel	$x''' = 0,016575 \text{ "}$
	mittlerer Fehler	$\mu''' = 0,000143 \text{ "}$

Da die drei Boulengé-Apparate nicht grundsätzlich verschiedene Flugzeitenmesser darstellen, sollten sie als ein einziger Apparat behandelt werden, so daß schließlich das Gesamtmittel aus nur vier Gruppen zu berechnen ist. Es ist also zunächst das Mittel  $x_4$  aus  $x' x'' x'''$  und der  $\mu_4$ -Wert dieses Mittels zu berechnen. Nach obigem ist

$$x_4 = \frac{0,016339}{0,000055^2} + \frac{0,016398}{0,000057^2} + \frac{0,016575}{0,000143^2} = 0,016382 \text{ sec};$$

$$\frac{1}{0,000055^2} + \frac{1}{0,000057^2} + \frac{1}{0,000143^2}$$

dazu

$$\frac{1}{\mu_4^2} = \frac{1}{\mu'^2} + \frac{1}{\mu''^2} + \frac{1}{\mu'''^2},$$

$\mu_4 = 0,0000381 \text{ sec}$ . Wollte man das Gesamtmittel  $x$  des Zeitintervalls mit Hilfe von  $x_4 = 0,016382$  und  $\mu_4 = 0,0000381$  berechnen, so würde dies bedeuten, daß aus allen sechs Gruppen das Mittel genommen würde, wobei die drei Boulengé-Apparate als getrennte Apparate gerechnet würden. Nun sollen sie aber als ein einziger Apparat gelten, somit ist zu nehmen

$$\mu_4 = 0,0000381 \cdot \sqrt{3} = 0,000066 \text{ sec}.$$

Also Gesamtmittel

$$x = \frac{0,016315}{16^2} + \frac{0,016480}{128^2} + \frac{0,016552}{134^2} + \frac{0,016382}{66^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{16^2} + \frac{1}{128^2} + \frac{1}{134^2} + \frac{1}{66^2}}{\frac{1}{16^2} + \frac{1}{128^2} + \frac{1}{134^2} + \frac{1}{66^2}} = 0,01632 \text{ sec}$$

(vgl. Bd. III).

## § 68. Untersuchung einer Beobachtungsreihe. Ausreißer. Symmetrieachsen eines Trefferbildes.

Um eine bestimmte ballistische Beobachtungsreihe (Messungen von Geschosßflugzeiten, Gasdrücken, Bestimmung der Lage der Durchschlagspunkte auf einer Scheibe usw.) auf ihre Zufälligkeit zu prüfen, wird man, falls die Versuchszahl genügend groß war, die Abweichungen  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$  vom Mittelwert ihrer Größe nach in Gruppen teilen und zählen, wie viele Abweichungen z. B. zwischen 0 und 2 cm, zwischen 2 und 4 cm usw. liegen und wird alsdann aus dem Genauigkeitsmaß  $\mu$  oder  $w$  berechnen, wie viele nach dem Fehlergesetz in jenen Intervallen liegen sollten. Stimmen die beiden so erhaltenen Fehlerkurven genügend überein, so kann man darauf rechnen, daß keine einseitigen Störungen vorlagen.

Meistens ist jedoch die Versuchszahl  $n$  zu klein, als daß dieses Verfahren Platz greifen könnte. In diesem Fall pflegt man die folgenden Kriterien anzuwenden:

a) Wenn man die Versuchszahlen in der Reihenfolge anschreibt, in der die Versuche angestellt wurden, und die Reihe der verschiedenen Abweichungen  $\lambda$  betrachtet, so muß die Zahl der positiven Abweichungen ungefähr gleich derjenigen der negativen, ebenso die Zahl der Zeichenwechsel  $(+ - \text{ oder } - +)$  ungefähr gleich derjenigen der Zeichenfolgen  $(++ , --)$  sein.

b) Wichtiger ist, daß die Berechnung der wahrscheinlichen Abweichung  $w$  aus der mittleren quadratischen  $\mu$ , aus der durchschnittlichen  $E$  und aus den sukzessiven Beobachtungsdifferenzen  $d$  ungefähr dieselbe Zahl geben muß,

$$w = 0,6745 \cdot \sqrt{\frac{\sum \lambda^2}{n-1}} = 0,8453 \cdot \frac{\sum |\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}} = 0,5978 \cdot \frac{\sum |d|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

Wenn das nicht der Fall ist, wenn nämlich die beiden letzteren Bestimmungen von  $w$  in einem Verhältnis stehen, das von 1 um mehr als 20% abweicht (vgl. Beispiel b in § 65), so liegt der Verdacht vor, daß eine störende Ursache vorlag. Wie schon erwähnt, hat man in diesem Fall  $w$  aus den sukzessiven Differenzen zu ermitteln,  $w = 0,5978 \cdot \frac{\sum |d|}{\sqrt{n(n-1)}}$ , falls man nicht vorzieht, die Beobachtungsreihe zu verwerfen.

c) Von besonderer Wichtigkeit ist die Frage, wann eine Beobachtung mit auffallend großem numerischen Betrag von  $\lambda$  ausgeschieden werden solle („Ausreißer“), bzw. wann nicht.

Da das Gaußsche Gesetz  $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 x^2}$  erst unendlich große Abweichungen ausschließt, so ist von vornherein zu erwarten, daß es auf dem Standpunkt dieses Gesetzes bei der Aufstellung einer Ausschließungsregel nicht ohne eine gewisse Willkür abgehen wird. Manche Forscher wollen auch von der Annahme jeder Regel zur nachträglichen Ausscheidung einer Beobachtung abgesehen wissen, z. B. Airy, Bessel, Faye. Manche wollen nur dann eine Beobachtung ausschließen, wenn schon während des Versuchs Verdachtsgründe sich zeigten. Indessen scheint es, daß speziell für die schießtechnischen Fragen Ausreißerregeln nicht entbehrt werden können.

Solche Regeln sind in größerer Anzahl aufgestellt worden; insbesondere von Bertrand, B. Peirce (dazu Tabellen von Gould und Chauvenet), von Chauvenet, Stone, Vallier, Heydenreich, Mazzuoli, H. Rohne.

Der Gedankengang von Chauvenet schließt sich eng an die Berechnung der Maximalabweichung  $M$  einer Beobachtungsreihe an: Es sei  $w$  die wahrscheinliche Abweichung oder  $2w$  die 50prozentige Streuung;  $\pm M$  die größte vorkommende Abweichung oder  $2M$  die Gesamtstreuung, so war die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Abweichung zwischen  $-M$  und  $+M$  liege (oder, vgl. Abbildung, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schuß in das Gebiet I, I fällt), gegeben durch:

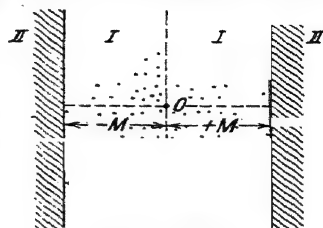


Abb. 108 a.

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x=-M}^{x=+M} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=Mh} e^{-t^2} dt = \varphi(Mh) = \varphi\left(\frac{M \cdot 0,4769}{w}\right) = \psi\left(\frac{M}{w}\right);$$

(für  $\varphi$  und  $\psi$  vgl. Anhang, Tabelle Nr. 12 und 13).

Also wird mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \psi\left(\frac{M}{w}\right)$  ein Schuß jenseits dieser Grenzen, d. h. in das schraffierte Gebiet (II, II) fallen; unter  $n$  Schüssen sind es  $n \left(1 - \psi\left(\frac{M}{w}\right)\right)$ . Schreibt man die Bedingung dafür an, daß diese letztere Anzahl = 1 sei, so hat man die Gleichung  $n \left(1 - \psi\left(\frac{M}{w}\right)\right) = 1$  zur Bestimmung der maximalen Abweichung.

Um eine Ausschließungsregel zu gewinnen, überlegt Chauvenet folgendermaßen: Beträgt diese Zahl weniger als  $\frac{1}{2}$ , so hat ein Fehler vom Betrag  $M$  eine größere Wahrscheinlichkeit gegen sich, als für sich. Die Gleichung

$$n \left(1 - \psi\left(\frac{M}{w}\right)\right) = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \psi\left(\frac{M}{w}\right) = \frac{2n-1}{2n} \quad (1)$$

entscheidet danach über die Ausschließung. War z. B. die Versuchszahl  $n = 10$  und die 50prozentige Streuung  $2w = 4$  cm,  $w = 2$ , so erhält man  $M$  aus  $\psi\left(\frac{M}{2}\right) = \frac{2 \cdot 10 - 1}{2 \cdot 10} = 0,95$ ; nach Tabelle 13 ist

somit  $\frac{M}{2} = 2,92$ ;  $M = 5,84$  cm; das heißt, wenn sich, in der Reihe der Abweichungen  $\lambda$  zwischen den einzelnen Beobachtungen und dem arithmetischen Mittel, eine Abweichung findet, die etwas größer als 5,84 cm ist, so gilt dieser Schuß als Ausreißer.

Vallier hat die Bedingungsgleichung (1) durch die andere ersetzt:

$$\psi\left(\frac{M}{w}\right) = \frac{n^2 - 1}{n^2}, \quad (2)$$

nur für  $n=4$  und  $n=5$  hält er sich an Chauvenet. Auf diese Weise werden von  $n=6$  an erheblich mildere Ausreißerregeln gewonnen.

Mazzuoli hat neuerdings die obige Gleichung, die zur Berechnung des Maximalfehlers  $M$  dient, nämlich

$$\psi\left(\frac{M}{w}\right) = \frac{n-1}{n}, \quad (3)$$

direkt zur Aufstellung von Ausreißerregeln angewendet und teilt eine große Anzahl von Ergebnissen an wirklich erschossenen Trefferbildern mit, wonach die betreffenden Grenzen fast genau wiedergegeben wären. Der ganzen Entstehung dieser letzteren Bedingung (3) zufolge ist es möglich, daß die hiermit gewonnenen Ausreißerregeln etwas zu streng sind.

B. Peirce gelangt auf Grund theoretischer Entwicklungen, die hier nicht wiedergegeben seien, zu Regeln, die denjenigen von Chauvenet ziemlich ähnlich sind, jedoch die Unterscheidung darüber enthalten, ob es sich um 1 oder 2 oder 3 usw. extreme Abweichungen und deren Ausscheidung handelt.

Die theoretischen Ausführungen von Stone kommen letzten Endes darauf hinaus, daß für die betreffende Gattung von Beobachtungen und für den betreffenden Beobachter je besondere Regeln gelten müßten, die am besten aus der Erfahrung gewonnen würden.

Heidenreich betrachtet einen Schuß dann als Ausreißer, wenn seine Abweichung  $\lambda$  größer ist, als sie unter  $2(n-1)$  Schüssen einmal zu erwarten wäre, d. h. aus der Bedingung

$$2(n-1)\left(1 - \psi\left(\frac{M}{w}\right)\right) = 1; \quad \psi\left(\frac{M}{w}\right) = \frac{2n-3}{2n-2}; \quad (4)$$

dabei erhöht Heydenreich das betreffende Vielfache noch um das Maß der wahrscheinlichen oberen Grenze.

H. Rohne (Art. Monatsh. 1923) schließt folgendermaßen: Ein Schuß muß ausgeschaltet werden, wenn die Ausschaltung eine Änderung des Mittelwerts herbeiführt, die größer ist als der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerts. Durch die Ausschaltung eines Schusses mit der Abweichung  $\lambda$  wird bei  $n$ -Schüssen der Mittelwert geändert um  $\frac{\lambda}{n-1}$ , der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerts ist  $\frac{w}{\sqrt{n}}$ ; folglich hat ein

Schuß dann als Ausreißer zu gelten, wenn  $\frac{\lambda}{n-1} > \frac{w}{\sqrt{n}}$  oder wenn  $\frac{\lambda}{w} > \frac{n-1}{\sqrt{n}}$  ist; z. B. bei  $n=10$ , wenn  $\frac{\lambda}{w} > \frac{9}{\sqrt{10}}$  oder 2,84.

Im folgenden sind die verschiedenen Ausreißerregeln zusammengestellt.

Man scheidet eine Beobachtung dann aus, wenn die betreffende Abweichung  $\lambda$  vom arithmetischen Mittel, also

z. B. bei Scheibentreffbildern die Abweichung vom mittleren Treffpunkt, größer ist, als das  $x$ -fache der wahrscheinlichen Abweichung  $w$  oder der halben 50prozentigen Streuung.

Bei der Schußzahl	1. Nach Chauvenet	2. Nach Peirce (bei 1 Aus- reißer)	3. Nach Vallier	4. Nach Heyden- reich	5. Nach Mazzuoli	6. Nach H. Rohne
$n = 3$	$x = -$	$x = 1,80$	$x = -$	$x = -$	$x = 1,46$	$x = -$
$n = 4$	$x = 2,27$	$x = 2,05$	$x = 2,27$	$x = -$	$x = 1,73$	$x = 1,50$
$n = 5$	$x = 2,43$	$x = 2,24$	$x = 2,43$	$x = 2,76$	$x = 1,91$	$x = 1,79$
$n = 6$	$x = 2,56$	$x = 2,39$	$x = 3,25$	$x = 2,91$	$x = 2,05$	$x = 2,04$
$n = 7$	$x = 2,66$	$x = 2,51$	$x = 3,45$	$x = 3,03$	$x = 2,18$	$x = 2,27$
$n = 8$	$x = 2,77$	$x = 2,61$	$x = 3,60$	$x = 3,12$	$x = 2,28$	$x = 2,48$
$n = 9$	$x = 2,83$	$x = 2,70$	$x = 3,69$	$x = 3,20$	$x = 2,36$	$x = 2,67$
$n = 10$	$x = 2,92$	$x = 2,78$	$x = 3,84$	$x = 3,27$	$x = 2,44$	$x = 2,84$
$n = 12$	$x = 3,02$	$x = 2,92$	$x = 4,00$	$x = 3,37$	$x = 2,58$	$x = 3,18$
$n = 20$	$x = 3,33$	$x = 3,27$	$x = 4,49$	$x = 3,64$	$x = 2,91$	$x = 4,25$

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung eine sehr geringe. Dem Verfasser erscheinen vorläufig die Zahlen von Chauvenet als die geeignetsten, er möchte jedoch vorschlagen, durch Untersuchung zahlreicher ballistischer Beobachtungsreihen auf empirischem Wege die Entscheidung herbeizuführen. Dabei dürfen nur einwandfreie Beobachtungen in Betracht kommen (vgl. auch § 69).

Zahlenbeispiel. 12malige Geschwindigkeitsmessung an einem Geschütz, 40 m vor der Mündung.

Gemessen $v =$ (m/sec)	Abweichungen vom Mittel $\lambda =$	Quadrate der Abweichungen $\lambda^2$	Sukzessive Differenzen $ d $
439,1	- 2,8	7,84	3,8
442,9			0,7
442,2			0,1
442,3			0,2
442,1			0,3
442,4	- 0,4	0,16	0,9
441,5			0,7
442,2			0,7
441,5			0,5
442,0			2,2
444,2	- 1,6	2,56	3,9
440,3			
Mittel $v = 441,9$	$\Sigma  \lambda  = 10,3$	$\Sigma (\lambda^2) = 17,65$	$\Sigma  d  = 14,0$

Mittlerer quadratischer Fehler der einzelnen Messung

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{17,65}{12-1}} = 1,27 = 1,27 \left( 1 \pm \frac{0,4769}{\sqrt{11}} \right)$$

$$= 1,27 \pm 0,18 = 1,09 \text{ bis } 1,45$$

$$= \text{etwa } 1,3 \text{ m/sec} = 0,29\% \text{ von } v.$$



# 424 Zufällige Geschosßabweichungen. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre.

Mittlerer quadratischer Fehler des Ergebnisses (des Mittels)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \frac{1,26}{\sqrt{12}} = 0,36 \text{ m/sec} = 0,081\% \text{ von } v.$$

Durchschnittlicher Fehler der einzelnen Messung

$$E = \frac{\sum |\lambda|}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{10,3}{\sqrt{11 \cdot 12}} = 0,90 \text{ m/sec}$$

$$\frac{\sum |d|}{s} = \frac{14,0}{11} = 1,276.$$

Also beträgt die wahrscheinliche Abweichung  $w$ ,

berechnet aus	$\mu$ :	$w = 0,6745 \cdot \mu = 0,85$ ;
"	$E$ :	$w = 0,8453 \cdot E = 0,75$ ;
"	$\frac{\sum  d }{s}$ :	$w = 0,5978 \cdot \frac{\sum  d }{s} = 0,76$ .

Das Verhältnis der beiden letzten Bestimmungen =  $\frac{w \text{ aus } |d|}{w \text{ aus } E}$  (vgl. § 65)

=  $\frac{0,76}{0,75}$  = nahezu 1, zwischen 0,8 und 1,2. Danach liegt kein Grund vor, anzunehmen, daß eine störende Ursache gewirkt habe. Ferner zeigt die Reihe der 15 Zeichenfolgen und 6, also nahezu gleichviel, Zeichenwechsel. Dagegen hat man 8 positive  $\lambda$  gegen 4 negative  $\lambda$ , dabei die 5 positiven  $\lambda$  (+1,0; +0,3; +0,4; +0,2; +0,5) unmittelbar nacheinander. Dies hängt damit zusammen, daß die erste Messung 439,1 gegen die übrigen sehr klein ist. Da diese Erscheinung häufig auftritt („Anwärmeschuß“, „Reinigungsschuß“), so pflegen manche die erste Messung grundsätzlich wegzulassen. Es fragt sich, ob 439,1 als Ausreißer zu gelten habe oder nicht. Da hier  $n=12$  und  $w=0,85$  (gemäß der genauesten Bestimmung von  $w$  aus  $\mu$ ), so ist nach Chauvenet dieser Schuß auszuschalten, da

$$2,8 > 3,02 \cdot 0,85 \text{ oder } > 2,56;$$

nach Peirce ist dieser Schuß auszuschalten, da

$$2,8 > 2,92 \cdot 0,85 \text{ oder } > 2,48;$$

nach Vallier ist dieser Schuß nicht auszuschalten, da

$$2,8 \text{ nicht } > 4,00 \cdot 0,85 \text{ oder } > 3,4;$$

nach Heydenreich ist dieser Schuß gerade noch auszuschalten, da

$$2,8 = \sim 3,37 \cdot 0,85;$$

nach Mazzuoli ist dieser Schuß auszuschalten, da

$$2,8 > 2,58 \cdot 0,85 \text{ oder } > 2,2;$$

nach Rohne ist dieser Schuß auszuschalten, da

$$2,8 > 3,18 \cdot 0,85 \text{ oder } > 2,7 \text{ ist.}$$

Andererseits ist nach den sonstigen Erfahrungen der fragliche Schuß Nr. 1 offenbar als Anreißer zu betrachten. Die Berechnungen wären somit auf Grund der übrigen 11 Messungen von neuem durchzuführen. Es zeigt sich dann, daß Nr. 1, 11 und 12 auszuschneiden sind.

Anmerkung. Die obige Gleichung  $n \left(1 - \psi \left(\frac{M}{w}\right)\right) = 1$  benutzt H. Rohne dazu, um aus der Gesamtstreuung  $2M$  die 50prozentige Streuung  $2w$  zu er-

halten. Durch Vergleichung von Theorie und Beobachtung erhält er das Ergebnis: Bei bzw. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50 Schüssen ist das Verhältnis der ganzen Streuung zur 50prozentigen bzw. gleich 1,95, 2,40, 2,59, 2,76, 2,90, 3,02, 3,12, 3,20. Auch die Methode, durch Auszählen der schlechteren Hälfte der Schüsse und Abscheidung dieser Hälfte die 50prozentige Streuung zu gewinnen (A. v. Burgsdorff u. a.) wird von H. Rohne untersucht; vgl. Literaturnote.

### § 69. Die Gruppierungsachsen eines Trefferbildes.

Wenn\* es sich um die mehrdimensionale Verteilung von Abweichungen gegenüber dem wahrscheinlichsten Wert, dem Mittel, handelt, z. B. wenn die Gruppierung der Geschößdurchschläge in der Ebene einer lotrechten Scheibe um den mittelsten Treffpunkt  $O$  herum oder wenn beim Brennzünderschießen die Verteilung der Sprengpunkte bezüglich des mittelsten Sprengpunkts im Raum in Frage kommt, so muß untersucht werden, ob die Streuungsursachen in Beziehung auf die gewählten Koordinatenachsen unabhängig voneinander wirken oder nicht.

Die bisherigen Betrachtungen waren der Anschaulichkeit halber meistens an die Verteilung der Geschößdurchschläge in einer lotrechten Scheibe angeknüpft, und zwar wurden ausschließlich die Abweichungen in der Richtung der wagrecht angenommenen  $x$ -Achse, also die Abweichungen nach rechts oder links in Betracht gezogen. Ganz entsprechend werden die Abweichungen nach oben und unten, also in Richtung der lotrechten  $y$ -Achse untersucht. Sind nämlich die Abweichungen in der  $x$ -Richtung mit  $x_1 x_2 x_3 \dots$ , diejenigen in der  $y$ -Richtung mit  $y_1 y_2 y_3 \dots$  bezeichnet, so ist die mittlere quadratische Abweichung  $\mu_1$  in der  $x$ -Richtung  $\mu_1 = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1}}$ , in der  $y$ -Richtung  $\mu_2 = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n-1}}$  usw.

Aber die Voraussetzung hierfür ist, daß die Streuungen in der Richtung der  $x$ -Achse und in der Richtung der  $y$ -Achse unabhängig voneinander berechnet werden dürfen; dies ist der Fall, wenn in Beziehung auf beide Achsen das Trefferbild symmetrisch ist. Wenn dies zutrifft, so wird bei genügend großer Schußzahl  $n$  zu irgendeinem Punkte  $P_1 = (+4, +5)$  ein Punkt  $P_2 = (-4, +5)$  existieren, der hinsichtlich der  $y$ -Achse zu  $P_1$  symmetrisch liegt; ebenso ein Punkt  $P_3 = (+4, -5)$ , der zu  $P_1$  bezüglich der  $x$ -Achse das Spiegelbild ist, endlich  $P_4 = (-4, -5)$ , der hinsichtlich beider Achsen zu  $P_1$  Symmetriepunkt ist. Es wird also aus Gründen der Symmetrie  $\sum(x \cdot y) = 0$  sein.

Umgekehrt wird der numerische Betrag von  $\sum(x \cdot y)$  darüber entscheiden, ob hinsichtlich des zunächst willkürlich gewählten Koordinatensystems der  $x$  und  $y$  Symmetrie herrscht. Ist der Wert

$\Sigma(x \cdot y)$  von Null merklich verschieden, so muß streng genommen stets ein anderes Koordinatensystem der  $u$  und  $v$  gewählt werden, gleichfalls mit dem mittleren Treffpunkt als Koordinatenanfang), so daß bezüglich der neuen Koordinatenachsen Symmetrie besteht, also  $\Sigma(u \cdot v) = 0$  ist.

Diese neuen Koordinaten  $u$  und  $v$  brauchen übrigens keineswegs geradlinig zu sein. Z. B. kann es bei unrichtiger Konstruktion einer Schrotflinte vorkommen, daß ein ringförmiges Trefferbild entsteht, das in der Mitte einen Hohlraum besitzt. Angenommen, es handle sich um Kreisringform, so kann die  $u$ -Achse eine Gerade durch die Mitte, die  $v$ -Achse ein Kreis um die Mitte sein. Im folgenden ist jedoch vorausgesetzt, daß ein rechtwinkliges Koordinatensystem der  $u$  und  $v$  existiere, dessen Achsen geradlinig sind, so daß das neue System  $(u, v)$  gegenüber dem alten  $(x, y)$  nur gedreht erscheint. Erst für dieses neue Koordinatensystem  $u, v$  gelten alsdann die sämtlichen angeführten und noch anzuführenden Entwicklungen.

Es fragt sich dann, um welchen Winkel  $\vartheta$  das Koordinatensystem der  $xy$  zu drehen ist. Die Betrachtungen entsprechen denjenigen, die in der Mechanik bzw. analytischen Geometrie angestellt werden, wenn es sich darum handelt, die Koordinatenachsen in die Richtungen der Hauptträgheitsachsen eines Körpers oder in die Richtungen der Hauptachsen eines Kegelschnitts zu bringen. Für

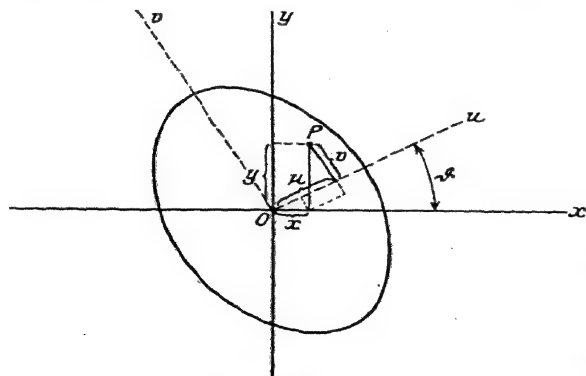


Abb. 104.

somit

$$uv = -\sin \vartheta \cos \vartheta (x^2 - y^2) + (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) xy.$$

Denkt man sich die letztere Gleichung für sämtliche Durchschlagspunkte angeschrieben und alle diese Gleichungen addiert, so folgt

$$\Sigma(u \cdot v) = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta (A - B) + \cos 2\vartheta \cdot C.$$

die wagrechte Richtung der  $x$  und die lotrechte Richtung der  $y$  seien die Summen

$$\Sigma(x^2) = A,$$

$$\Sigma(y^2) = B,$$

$$\Sigma(x \cdot y) = C$$

bezüglich der sämtlichen Durchschlagspunkte schon berechnet. Der Drehwinkel sei vorläufig beliebig gleich  $\vartheta$  angenommen, so ist

$$u = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta;$$

$$v = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta,$$

Wenn die  $u$ - und  $v$ -Achsen die Symmetrieachsen des Trefferbildes vorstellen sollen, so muß  $\sum(u \cdot v) = 0$  sein; der aus dieser Bedingung sich ergebende besondere Wert von  $\vartheta$  sei mit  $\alpha$  bezeichnet; so ergibt sich  $\alpha$  aus

$$0 = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha (A - B) + \cos 2\alpha \cdot C \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A-B}.$$

Nachdem das Koordinatensystem um diesen Winkel  $\alpha$  gedreht ist, sind alle parallelen Abweichungen auf die neuen Achsen  $u$  und  $v$  zu beziehen. Doch hat man nicht nötig, die sämtlichen Berechnungen von neuem durchzuführen, wenn es sich nur darum handelt, die Genauigkeitsmaße, z. B. die mittleren quadratischen Abweichungen  $\mu'$  bzw.  $\mu''$  bezüglich der neuen Achsen  $u$  und  $v$  zu gewinnen; da nämlich jetzt

$$u^2 = x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha + xy \sin 2\alpha$$

und

$$v^2 = x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - xy \sin 2\alpha,$$

also

$$\sum(u^2) = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha + C \sin 2\alpha$$

und

$$\sum(v^2) = A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha - C \sin 2\alpha,$$

so erhält man mit den schon berechneten Werten von  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\alpha$  direkt  $\mu' = \sqrt{\frac{\sum u^2}{n-1}}$ ,  $\mu'' = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}$ . Diese Genauigkeitsmaße  $\mu'$  und  $\mu''$  sind jetzt Maxima bzw. Minima; — eine Überlegung, die gleichfalls zur Berechnung von  $\operatorname{tg} 2\alpha$  geführt hätte.

**Zusammenfassung** (für den Fall geradliniger Koordinaten  $u$  und  $v$ ):

Man bezieht die Abweichungen vorläufig auf eine wagrechte  $x$ -Achse und eine lotrechte  $y$ -Achse durch den mittleren Treffpunkt  $O$ , berechnet  $\sum(x^2) = A$ ,  $\sum(y^2) = B$ ,  $\sum(x \cdot y) = C$ . Findet sich  $C$  merklich von Null verschieden, so ist dies das Anzeichen dafür, daß die zueinander senkrechten Symmetrieachsen  $u$  und  $v$  des Trefferbildes gegen die Wagrechte bzw. Lotrechte durch  $O$  etwas geneigt sind, nämlich um einen Winkel  $\alpha$ , der sich aus  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A-B}$  bestimmt. Für diese richtigen Bezugsachsen des Trefferbildes sind die mittleren quadratischen Abweichungen  $\mu'$  bzw.  $\mu''$  zu errechnen aus:

$$(n-1) \mu'^2 = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha + C \sin 2\alpha,$$

$$(n-1) \mu''^2 = A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha - C \sin 2\alpha.$$

**Beispiele.** Treffpunktlagenbeschuß eines Infanteriegewehrs von 6 mm Kaliber, Scheibenentfernung 1500 m. Die 20 Treffpunkte abgemessen von der lotrechten linken Scheibenkante nach rechts (+ $\xi$ ) und von der wagrechten

unteren Scheibenkante nach oben (+  $\eta$ ). Mittlerer Treffpunkt  $\xi_0 \eta_0$ . Die Abweichungen bezüglich dieses wahrscheinlichsten Garbenmittelpunkts nach rechts, bzw. links sind bezeichnet mit +  $x$ , bzw. -  $x$ , diejenigen nach oben, bzw. unten mit +  $y$ , bzw. -  $y$ .

$\xi = 515$	645	658	622	627	592	696	572	615	596	733	662,
$\eta = 218$	265	274	281	293	304	309	316	352	352	374	371,
$\xi = 591$	565	730	654	626	604	672	726	cm; Mittel $\xi_0 = 635,05$ cm,			
$\eta = 375$	459	526	541	573	583	636	665	cm; Mittel $\eta_0 = 403,75$ cm.			

Daraus, in wagerechter Richtung	in lotrechter Richtung:
$\Sigma  x  = 921, \quad \Sigma (x^2) = 63969,$	$\Sigma  y  = 2315,5, \quad \Sigma (y^2) = 352034,$
durchschnittliche Abweichung:	$\{ E_2 = 119$ cm,
$E_1 = 47,2$ cm,	$\{ w_2 = 92$ cm,
daraus wahrscheinl. Abweichung:	$\{ \mu_2 = 136$ cm
$w_1 = 39$ cm,	$\{ w_2 = 92$ cm,
mittlere quadratische Abweichung:	$W_2 = 21$ cm.
$\mu_1 = 58$ cm,	
daraus wahrscheinl. Abweichung:	
$w_1 = 40$ cm,	
wahrscheinlicher Fehler des Mittels:	
$W_1 = 9$ cm.	

$$\Sigma (x \cdot y) = 60820, \text{ also nicht } = 0.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{A-B} = \frac{2 \cdot 60820}{63969 - 352034}; \quad \alpha = -11^\circ 26,8'.$$

Für die Symmetrieachsen der  $u$  bzw.  $v$  wird dann

$\Sigma u^2 = 51655$	$\Sigma v^2 = 364854,$
somit in Richtung der $u$ :	somit in Richtung der $v$ :
$\mu' = 52$ cm (mittlere quadratische Abweichung).	$\mu'' = 138$ cm (mittlere quadratische Abweichung).
$w' = 35$ cm (wahrscheinliche Abweichung).	$w'' = 93$ cm (wahrscheinliche Abweichung).

(Ausführung der Berechnung durch Hörer Oblt. Gottschow.)

Ferner errechnete der Verfasser aus einem Beschuß von 100 Schüssen mit einem 7,65 mm-Gewehr gegen eine lotrechte Scheibe in 250 m Entfernung einen Verdrehungswinkel  $\alpha = +7^\circ 32'$ . — Bertrand untersuchte ein Trefferbild von 1000 Gewehrshüssen und fand  $\alpha = -19^\circ 47'$ ; Mayevski erhielt aus einem Beschuß von 44 Schüssen aus einer 10,5 cm Kanone  $\alpha = +0^\circ 47'$ .

Irgendwelche Gesetze, aus denen sich für irgendeine bestimmte Scheibenentfernung die Lage der Symmetrieachsen (oder „Orientierungsachsen“, „Gruppierungsachsen“) von vornherein entnehmen ließe, sind, trotz gewisser Behauptungen hierüber, tatsächlich nicht bekannt. Es würde ein dankenswertes Unternehmen sein, solchen Gesetzmäßigkeiten nachzugehen.

## § 70. Wahrscheinlichkeit, eine gegebene Fläche zu treffen. Rechteckige Flächen.

Im folgenden ist ein auf der Scheibe gedachtes Koordinatensystem der  $x$  und  $y$  zugrundegelegt, dessen Koordinatenanfang der mittlere Treffpunkt  $O$  ist. In Beziehung auf  $O$  seien die einzelnen Treffpunkte  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ . Vorausgesetzt wird, daß die Koordinatenachsen  $xy$  schon in die Richtungen der Symmetrieachsen des Treffbilds gebracht sind (vgl. § 69), und daß die mittleren quadratischen Abweichungen,  $\mu_1$  in Richtung der  $x$  und  $\mu_2$  in Richtung der  $y$ , also

$$\mu_1 = \quad \text{und} \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n}}$$

und daraus die wahrscheinlichen Abweichungen  $w_1$  bzw.  $w_2$  oder das doppelte, die 50 prozentigen Streuungen  $2w_1 = s_1$  in Richtung der  $x$  und  $2w_2 = s_2$  in Richtung der  $y$ , berechnet seien.

Die Wahrscheinlichkeit, gerade den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $(xy)$  oder, was dasselbe ist, das dort gelegene unendlich kleine Rechteck  $dx \cdot dy$  zu treffen, ist natürlich unendlich klein

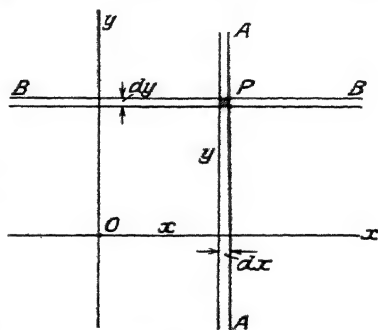


Abb. 105.

und setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeit  $\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h_1^2 x^2} \cdot dx$  dafür, den in Richtung der  $y$ -Achse unendlich ausgedehnten Zielstreifen  $AA$  von der Breite  $dx$  zu treffen, und aus der Wahrscheinlichkeit  $\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h_2^2 y^2} \cdot dy$  dafür, gleichzeitig den in Richtung der  $x$ -Achse beliebig ausgedehnten Streifen  $BB$  von der Breite  $dy$  zu treffen. Dabei ist

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\mu_1} = \frac{0,4769}{w_1}; \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\mu_2} = \frac{0,4769}{w_2}$$

Somit werden in das erwähnte unendlich kleine Rechteck  $P$  von  $n$  Schüssen entfallen

$$n \frac{h_1 h_2}{\pi} \cdot e^{-(h_1^2 x^2 + h_2^2 y^2)} \cdot dx \cdot dy.$$

Nun sei (Abb. 106) gegeben die rechteckige Scheibe  $ABCD$ , in deren Mitte der mittlere Treffpunkt  $O$  liege; Breite  $2l_1$ , Höhe  $2l_2$ . Wird über die sämtlichen Flächenelemente  $dx \cdot dy$  dieses Rechtecks integriert, so erhält man als Zahl  $t$  der Treffer gegen dieses Rechteck

$$\begin{aligned}
 t &= n \frac{h_1 h_2}{\pi} \int_{x=-l_1}^{x=+l_1} \int_{y=-l_2}^{y=+l_2} e^{-(h_1^2 x^2 + h_2^2 y^2)} \cdot dx \cdot dy \\
 &= n \cdot \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-l_1}^{+l_1} e^{-h_1^2 x^2} \cdot dx \cdot \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-l_2}^{+l_2} e^{-h_2^2 y^2} \cdot dy = n \cdot \varphi(h_1 l_1) \cdot \varphi(h_2 l_2) \\
 &= n \cdot \varphi\left(\frac{l_1}{w_1} \cdot 0,4769\right) \cdot \varphi\left(\frac{l_2}{w_2} \cdot 0,4769\right) = n \cdot \psi\left(\frac{l_1}{w_1}\right) \cdot \psi\left(\frac{l_2}{w_2}\right); \\
 t &= n \cdot \psi\left(\frac{2l_1}{s_1}\right) \cdot \psi\left(\frac{2l_2}{s_2}\right); \quad (1)
 \end{aligned}$$

für  $\psi$  vgl. Anhang, Tabelle 13.

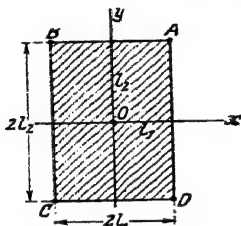


Abb. 106.

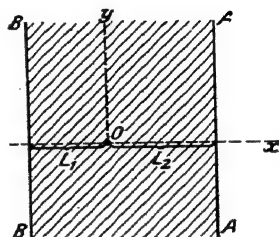


Abb. 107.

Ferner liege (Abb. 107) ein in Richtung der  $y$ -Achse beliebig ausgedehnter Zielstreifen  $AA'BB'$  vor — ein Rechteck, dessen beide andere Parallelseiten ins Unendliche gerückt sind —; der mittlere Treffpunkt  $O$  liege innerhalb des Streifens, seine Abstände von den Begrenzungslinien des Streifens seien  $L_1$  und  $L_2$ , die wahrscheinliche Abweichung in der zum Streifen senkrechten  $x$ -Richtung sei  $w_1 = w$ . In diesen Streifen entfallen von  $n$  Schüssen

$$t = \frac{h n}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{x=-L_1}^{x=+L_2} e^{-h^2 x^2} \cdot dx, \quad \text{wobei} \quad h = \frac{0,4769}{w};$$

mithin

$$t = \frac{h n}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{x=+L_1} e^{-h^2 x^2} \cdot dx + \frac{h n}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{x=+L_2} e^{-h^2 x^2} \cdot dx;$$

also, da allgemein  $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-l}^{+l} e^{-h^2 x^2} \cdot dx = \varphi(h l)$  war, ist

$$\text{Trefferzahl } t = \frac{1}{2} \left[ \psi\left(\frac{L_1}{w}\right) + \psi\left(\frac{L_2}{w}\right) \right] n. \quad (2)$$

Dagegen wird der Zielstreifen (vgl. Abb. 108), der den mittleren Treffpunkt  $O$  nicht enthält,

$$t = \frac{h n}{\sqrt{\pi}} \int_{x=-L_1}^{x=+L_2} e^{-h^2 x^2} \cdot dx = -\frac{h n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+L_1} e^{-h^2 x^2} \cdot dx + \frac{h n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+L_2} e^{-h^2 x^2} \cdot dx.$$

oder

$$= \frac{1}{2} \left[ \psi \left( \frac{L_2}{w} \right) - \psi \left( \frac{L_1}{w} \right) \right] n \quad (3)$$

Treffer aufnehmen.

Läßt man in dem ersteren Zielstreifen die Seite  $AA$  ins Unendliche rücken ( $L_2 = \infty$ ), in dem zweiten Zielstreifen gleichfalls die rechte Seite ( $L_2 = \infty$ ), so wird je  $\psi \left( \frac{L_2}{w} \right) = \psi(\infty) = 1$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schuß in den schraffierten Teil der

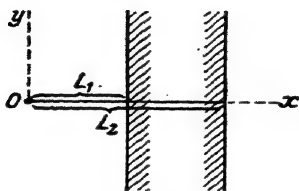


Abb. 108.

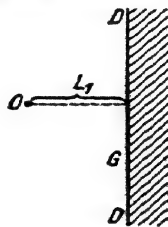


Abb. 109.

Ebene fällt (Abb. 109), ist somit im ersteren Fall  $\frac{1}{2} \left( \psi \left( \frac{L_2}{w} \right) + 1 \right)$ , im zweiten Fall  $\frac{1}{2} \left( 1 - \psi \left( \frac{L_1}{w} \right) \right)$ . Das Ergebnis ist sonach folgendes: Ist eine Gerade  $G$  gegeben, die vom mittleren Treffpunkt  $O$  den Abstand  $L_1$  besitzt, und ist  $w$  die wahrscheinliche Abweichung senkrecht zu der Geraden, so werden unter  $n$  Schüssen

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \left( 1 + \psi \left( \frac{L_2}{w} \right) \right) & \text{ auf diejenige Seite von } G \text{ fallen, auf der } O \text{ liegt,} \\ \frac{n}{2} \left( 1 - \psi \left( \frac{L_1}{w} \right) \right) & \text{ auf diejenige Seite von } G \text{ fallen, auf der } O \text{ nicht liegt.} \end{aligned} \quad (4)$$

Anmerkung zu Gleichung (3). Wenn der mittlere Treffpunkt  $O$  nicht in dem Zielstreifen liegt ( $L_1$  die Entfernung des Punktes  $O$  von der nächsten,  $L_2$  die Entfernung des Punktes  $O$  von der entfernteren Grenze des Streifens), so kann gefragt werden: für welchen Wert der 50prozentigen Streuung  $s_{50}$  quer zum Streifen ist die auf den Zielstreifen entfallende Trefferzahl ein Maximum? (Der Verfasser verdankt die Stellung dieser Aufgabe Herrn H. Rohne.)  $s_{50}$  hängt nach § 60 mit dem Präzisionsmaß  $h$  durch die Beziehung zusammen:  $\frac{1}{2} \cdot s_{50} = w = \frac{0,476936}{h}$ . Also kommt die Aufgabe darauf hinaus, dasjenige  $h$  zu bestimmen, für das die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x=-L_1}^{x=+L_2} e^{-h^2 x^2} \cdot dx,$$



# 432 Zufällige Geschosabweichungen. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre.

den Zielstreifen zu treffen, ein Maximum ist. Dies kann also (vgl. z. B. J. H. Jellett) eine Aufgabe der Variationsrechnung genannt werden. Setzt man  $h \cdot x = t$ ;  $h \cdot dx = dt$ , so handelt es sich um die Variation des Integrals:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t=h \cdot L_1}^{t=h \cdot L_2} e^{-t^2} \cdot dt.$$

Die Variation nach  $h$  ist gleich Null zu setzen; also

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-h^2 L_2^2} \cdot L_2 \cdot \delta h - e^{-h^2 L_1^2} \cdot L_1 \cdot \delta h \right\} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$e^{h^2 (L_2^2 - L_1^2)} = \frac{L_2}{L_1};$$

somit

$$h^2 = \frac{1}{L_2^2 - L_1^2} \cdot \log \text{nat} \frac{L_2}{L_1}.$$

Folglich ist die gesuchte 50prozentige Streuung  $s_{50}$ , für welche die auf den Zielstreifen entfallende Trefferzahl am größten ausfällt, durch die Gleichung bestimmt:

$$s_{50} = \frac{2 \cdot 0,476936 \cdot \sqrt{L_2^2 - L_1^2}}{\sqrt{\log \text{nat} \frac{L_2}{L_1}}}.$$

Z. B. für  $L_1 = 3$  m;  $L_2 = 4$  m ergibt sich  $s_{50} = 4,70$  m.

## Zusammenstellung.

a) Die Wahrscheinlichkeit, einen Zielstreifen zu treffen, der durch zwei unter sich parallele und zur Schußebene senkrechte oder parallele unendliche Geraden begrenzt ist und in dessen Mittellinie der mittlere Treffpunkt liegt, ist

$$= \varphi \left( 0,4769 \cdot \frac{2l}{s_{50}} \right) \quad (\text{I})$$

$$= \psi \left( \frac{2l}{s_{50}} \right), \quad (\text{Ia})$$

dabei  $2l$  die Breite des Zielstreifens;  $s_{50}$  die 50prozentige Streuung oder die doppelte 50prozentige Abweichung quer zu den begrenzenden Parallelen und innerhalb der Ebene des Zielstreifens; für  $\varphi$  bzw.  $\psi$  die Tabelle 12 bzw. 13 im Anhang.  $\frac{2l}{s_{50}}$  heißt der „Wahrscheinlichkeitsfaktor“ (in der ausländischen Fachliteratur vielfach auch „relative Zielausdehnung“);  $100 \cdot \psi$  ist die Anzahl der zugehörigen Trefferprozente.

b) Die Wahrscheinlichkeit, ein Rechteck zu treffen, in dessen Mittelpunkt der mittlere Treffpunkt liegt, ist

$$= \psi \left( \frac{2l_1}{s_1} \right) \cdot \psi \left( \frac{2l_2}{s_2} \right), \quad (\text{II})$$

Wahrscheinlichkeit, eine gegebene Fläche zu treffen. Rechteckige Flächen. 433

dabei  $2l_1$  bzw.  $2l_2$  die Längen der Rechtecksseiten; die eine Rechtecksseite parallel, die andere senkrecht zur Schußebene gelegen;  $s_1$  die 50 prozentige Streuung parallel der Rechtecksseite  $2l_1$ ,  $s_2$  die 50 prozentige Streuung parallel der Rechtecksseite  $2l_2$ .

c) Die Wahrscheinlichkeit, einen unendlich ausgedehnten, durch parallele Gerade begrenzten Zielstreifen zu treffen, innerhalb dessen der mittlere Treffpunkt eine unsymmetrische Lage hat (Abstand des mittleren Treffpunkts von der einen Geraden  $l_1$ , von der anderen  $l_2$ ; 50 prozentige Streuung innerhalb der Ebene des Streifens und senkrecht zu den Begrenzungsgeraden gleich  $s_{50}$ ) ist

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \psi \left( \frac{2l_1}{s_{50}} \right) + \psi \left( \frac{2l_2}{s_{50}} \right) \right]. \quad (\text{III})$$

d) Die Wahrscheinlichkeit, einen Zielstreifen zu treffen, außerhalb dessen der mittlere Treffpunkt liegt (Abstand des mittleren Treffpunkts von der näheren Begrenzungsseite des Streifens  $l_1$ , von der entfernteren  $l_2$ ;  $s_{50}$  die 50 prozentige Streuung quer zu den Begrenzungsseiten) ist

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \psi \left( \frac{2l_2}{s_{50}} \right) - \psi \left( \frac{2l_1}{s_{50}} \right) \right]. \quad (\text{IV})$$

e) Gegeben eine Ziellinie quer zur Schußebene; Abstand des mittleren Treffpunkts von dieser Ziellinie  $l$ ; 50 prozentige Streuung in Richtung quer zur Ziellinie gleich  $s_{50}$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schuß auf diejenige Seite der Ziellinie fällt, auf der der mittlere Treffpunkt liegt, ist

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \psi \left( \frac{2l}{s_{50}} \right) \right], \quad (\text{V})$$

(für diese Funktion eine Tabelle mit dem Argument  $\frac{2l}{s_{50}}$  in dem Werk von Sabudski—v. Eberhard, S. XX, vgl. Lit.-Note; für die Berechnungen genügt auch die Tabelle 13 im Anhang).

f) Ebenso: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schuß auf diejenige Seite der Ziellinie fällt, auf der der mittlere Treffpunkt nicht liegt, ist

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 - \psi \left( \frac{2l}{s_{50}} \right) \right]. \quad (\text{VI})$$

(Die Größen  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  müssen in derselben Maßeinheit gegeben sein, wie  $s_{50}$ .)

1. Beispiel. Ein Zielstreifen erstreckt sich in der Schußrichtung. Breite des Streifens  $2l = 6$  m; die 50 prozentige Breitenstreuung  $s_{50} = 4$  m; das Geschütz ist auf die Mittellinie des Streifens eingeschossen. Wieviel Prozent Treffer entfallen in den Streifen?

# 434 Zufällige Geschosabweichungen. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre.

a) Mit der Tabelle Nr. 12 im Anhang:

$$\frac{2l}{s_{50}} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

Nach Formel (I) ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= \varphi(0,4769 \cdot 1,5) = \varphi(0,7153) = 0,688.$$

Also 68,8% Treffer.

b) Mit der Tabelle Nr. 13 im Anhang:

gesuchte Wahrscheinlichkeit =  $\psi(1,5) = 0,688$ , also 68% Treffer.

2. Beispiel. Ein wagrechter Zielstreifen liegt quer zur Schußebene; das Geschütz ist auf die wagrechte Mittellinie des Streifens eingeschossen. Über die Breite  $2l$  des Zielstreifens ist bekannt, daß sie ein Drittel der 25 prozentigen Längsstreuung beträgt. Wieviel Prozent Treffer entfallen auf den Streifen?

Man denke sich zunächst einen anderen Zielstreifen mit derselben Mittellinie, aber von der Breite  $2l_{25}$ . Für diesen Streifen beträgt die Treffwahrscheinlichkeit 0,25, also ist nach Formel (1a)

$$\psi\left(\frac{2l_{25}}{s_{50}}\right) = 0,25,$$

somit nach Tabelle 13:

$$\frac{2l_{25}}{s_{50}} = 0,472.$$

Andererseits ist nach der Voraussetzung  $2l_{25} = 3 \cdot 2l$ . Also hat man

$$s_{50} \cdot 0,472 = 3 \cdot 2l \quad \text{oder} \quad \frac{2l}{s_{50}} = \frac{0,472}{3} = 0,157.$$

Nach Tabelle 13 ist  $\varphi(0,157) = 0,084$ . Folglich sind auf den Zielstreifen 8,4% Treffer zu erwarten.

3. Beispiel. Die Höhe eines nach rechts und links beliebig ausgedehnten, aufrecht stehenden Zielstreifens soll so bemessen werden, daß, wenn ein Gewehr auf die wagrechte Mittellinie des Streifens eingeschossen ist, 41% Treffer auf den Streifen entfallen; dabei die 50 prozentigen Höhenstreuung 3,5 m.

Die Höhe sei  $2l(m)$ ; so soll sein  $\psi\left(\frac{2l}{3,5}\right) = 0,41$ . Also ist nach Tabelle 13 des

Anhangs:  $\frac{2l}{3,5} = 0,80$ . Gesuchte Höhe  $2l = 2,8$  m.

4. Beispiel. Ein nach rechts und links beliebig ausgedehnter, aufrecht stehender Zielstreifen hat die Höhe 1,9 m. Die 50 prozentige Höhenstreuung beträgt 3,5 m. Der mittlere Treffpunkt liege in der oberen Begrenzungslinie des Streifens. Wieviel Prozent Treffer sind auf dem Streifen zu erwarten?

In Formel (III) oder (IV) ist  $s_{50} = 3,5$ ;  $l_1 = 0$ ;  $l_2 = 1,9$ . Also hat man

$$100 \cdot \frac{1}{2} \left[ \varphi\left(\frac{2 \cdot 1,9}{3,5}\right) \pm 0 \right] = 50 \cdot \varphi(1,08) = 50 \cdot 0,5837 = \text{rund } 27\% \text{ Treffer.}$$

5. Beispiel. Wahrscheinlichste Korrektur und wahrscheinlicher Einschießfehler.

Bei Anwendung einer bestimmten gleichbleibenden Rohrröhrenhöhe wurden von 10 Schüssen 7 diesseits eines zur Schußrichtung senkrechten Grabens, folglich als Kurzschiße, beobachtet. Die 50 prozentige Längsstreuung beträgt 20 m. Welches ist die wahrscheinliche Entfernung des mittleren Treffpunkts vom Graben, um welchen Betrag muß also korrigiert werden?

Die Entfernung des mittleren Treffpunkts vom Graben sei  $l$ . Diese ergibt sich nach Formel (V) aus der Gleichung

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \psi \left( \frac{2l}{20} \right) \right],$$

also  $\psi \left( \frac{l}{10} \right) = 0,4$ . Gemäß Tabelle 13 des Anhangs ist somit  $\frac{l}{10} = 0,778$ ;  $l$  = rund 7,8 m. Folglich befindet sich der mittlere Treffpunkt wahrscheinlich rund 7,8 m diessseits des Grabens. Dies ist gleichzeitig die „wahrscheinlichste Korrektur“, die anzuwenden ist.

Zur Bestimmung der wahrscheinlichen Grenzen dieser Ermittlung von  $l$  (am wahrscheinlichsten ist  $l = 7,8$  oder rund 8 m), also zur Bestimmung des „wahrscheinlichen Einschießfehlers“ dient die in § 62 erwähnte Regel von Bayes:

Es ist mit 50% Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß das Verhältnis der Kurzschüsse zu der Zahl aller Schüsse zwischen den Grenzen

$$\frac{7}{10} + 0,4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot (10 - 7)}{10^3}} \quad \text{und} \quad \frac{7}{10} - 0,4769 \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot (10 - 7)}{10^3}}$$

liege, also zwischen  $0,7 + 0,0974$  und  $0,7 - 0,0974$  oder zwischen  $0,7974$  und  $0,6026$ .

Also berechnet man die wahrscheinlichen Grenzen  $l_1$  und  $l_2$  von  $l$  aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \psi \left( \frac{2l_1}{20} \right) \right] = 0,7974$$

und

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \psi \left( \frac{2l_2}{20} \right) \right] = 0,6026.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$\frac{2l_1}{20} = 1,23, \quad \text{also} \quad l_1 = 12,3 \text{ m},$$

die zweite dieser Gleichungen gibt

$$\frac{2l_2}{20} = 0,38, \quad \text{also} \quad l_2 = 3,8 \text{ m}.$$

Dies sind die wahrscheinlichen Grenzen der Ermittlung von  $l$ .

Die wahrscheinliche Korrektur ist danach

$$\text{rund } 8 \pm 4 \text{ m},$$

und  $\pm 4$  m ist der wahrscheinliche Einschießfehler, den man dabei zu erwarten hat.

6. Beispiel. Umrechnung der Az-Streuung von einer Zielebene auf eine andere. Wahrscheinlichkeit eines Luftsprengpunkts beim Bz-Schießen.

a) Die Garbe der Flugbahnen, die mit Az-Schießen bei gleichem Ziel, gleicher Ladung und gleicher Rohrerhöhung erhalten werden, denkt man sich in ihren letzten Endstücken als unter sich parallele Gerade, sämtlich von einem spitzen Neigungswinkel gegen den Horizont gleich dem spitzen Auffallwinkel  $\omega$ . Eine von diesen Flugbahnen der Garbe ist die mittlere Flugbahn. In Beziehung auf diese kann man nach § 66 die Streuung  $l_0$  und  $b_0$  für ein wagerechtes Zielgelande im Mündungshorizont aus dem wagerechten Az-Trefferbild berechnen; dabei bezieht sich  $l_0$  auf die Wagrechte in der Schußebene,  $b_0$  auf die Wag-

rechte quer zur Schußebene;  $l_{50}$  heißt die 50 prozentige Längsstreuung,  $b_{50}$  die 50 prozentige Breitenstreuung beim Az-Schießen. Für ein nicht wagrechtes, sondern abfallendes oder ansteigendes Zielgelände ist  $b_{50}$  gleich groß wie für ein wagrechtes; dagegen hat  $l_{50}$  einen anderen Wert, der sich aus dem Schnitt des Parallelstrahlenbündels der Flugbahnendstücke mit dem schiefen Zielgelände ohne weiteres ergibt. Offenbar ist die 50 prozentige Längsstreuung auf abfallendem Zielgelände größer, auf ansteigendem kleiner, als auf wagrechtem. Und für eine lotrechte, zur Schußebene senkrechte Zielfläche ergibt sich die zugehörige 50 prozentige Höhenstreuung  $h_{50}$  aus der wagrechten Längsstreuung  $l_{50}$  mittels der einfachen Beziehung

$$h_{50} = l_{50} \cdot \operatorname{tg} \omega.$$

Für ein wagrechtes Zielgelände, das nicht im Mündungshorizont, sondern wesentlich höher oder tiefer liegt, läßt sich die 50 prozentige Längsstreuung aus derjenigen für ein wagrechtes Zielgelände im Mündungshorizont graphisch ableiten, indem man die Grenzflugbahnen berechnet und zeichnet. Sicherer ist das unmittelbare Erschießen.

b) Beim Schießen mit Zeitzündergeschossen streuen die Flugbahnen der einzelnen Schüsse in der gleichen Weise wie beim Schießen mit Aufschlaggeschossen. Darin liegt ein erster Grund, warum die Sprengpunkte einer größeren Zahl von Geschossen, die mit gleicher Zünderstellung und unter auch sonst möglichst gleichen Anfangs- und sonstigen Bedingungen abgefeuert werden, nicht zusammenfallen, sondern sich im Raume verteilen. Außer der Streuung der Flugbahnen kommt als weitere Ursache für die Streuung der Sprengpunkte noch das ungleichmäßige Wirken scheinbar gleich eingestellter Zünder hinzu. Dies erklärt sich aus unvermeidlichen Verschiedenheiten in der Einstellung der Zünder, Ungleichmäßigkeiten in der Zusammensetzung, Pressung, Feuchtigkeit des Zündsatzes, Verschiedenheit der Uhrwerke und anderen Ursachen mehr. Aus dem Zusammenwirken der reinen Flugbahnstreuungen und der allein im Zünder liegenden Streuungen ergibt sich die Streuung der Sprengpunkte. Dieses Zusammenwirken ist derartig, daß die Breitenstreuung der Sprengpunkte (vom Geschütz aus betrachtet) sich nicht von der reinen Breitenstreuung der Flugbahnen der Az-Geschosse unterscheidet. Von ihr kann daher abgesehen werden.

Betrachtet man dagegen die Streuung der Sprengpunkte, projiziert auf eine Vertikalebene, die die mittlere Flugbahn enthält, so unterscheidet man in der Praxis die Zeitzünderrhöhenstreuungen und Zeitzünderrlängenstreuungen, die letzteren gemessen in der wagrechten Schußrichtung, die ersteren senkrecht dazu. Bei den Brennzünderstreuungen läßt sich obige einfache Beziehung  $h_{50} = l_{50} \cdot \operatorname{tg} \omega$  nicht anwenden. Die 50 prozentige Höhen- und Längsstreuungen der Sprengpunkte können ebensogut kleiner wie gleich oder größer sein als die reinen Flugbahnhöhen- und Längsstreuungen. Näheres hierüber siehe Lit.-Note.

In der Praxis werden daher die 50 prozentigen Höhen- und Längsstreuungen der Sprengpunkte unabhängig voneinander aus den erschossenen Brennlängenbildern errechnet (vgl. § 66). Die Angabe der 50 prozentigen Höhenstreuung  $h_{50}$  der Sprengpunkte gestattet, für eine bestimmte mittlere Sprenghöhe  $H$  die Wahrscheinlichkeit  $w$  eines Luftprennpunktes, bzw.  $1 - w$  eines Aufschlages nach Formel (V) zu errechnen:

$$w = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \varphi \left( \frac{2H}{h_{50}} \right) \right];$$

$100 \cdot w$  ist die Prozentzahl der zu erwartenden Luftprennpunkte.

7. Beispiel. Das Rechteck  $ABCD$  (Abb. 110), dessen Mitte mit dem mittleren Treffpunkt  $O$  zusammenfällt und dessen Seiten gleich den bezüglichen 50prozentigen Streuungen  $s_1 = 2w_1$  und  $s_2 = 2w_2$  sind, wird 50% von 50% oder 25% aller Schüsse enthalten. In welchem Verhältnis  $\lambda$  ist dieses Rechteck zu vergrößern, damit das ihm ähnliche größere Rechteck  $A_1B_1C_1D_1$  die Hälfte der Schüsse aufnimmt? Die Seiten seien  $\lambda s_1$  und  $\lambda s_2$ , so soll sein

$$\psi\left(\frac{\lambda s_1}{s_1}\right) \cdot \psi\left(\frac{\lambda s_2}{s_2}\right) = \frac{1}{2} \quad \psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \lambda = 1,56.$$

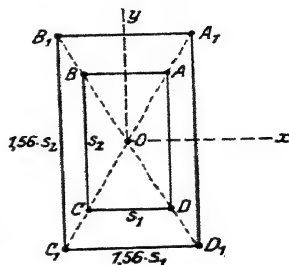


Abb. 110.

8. Beispiel. Berechnung eines Teils einer Trefferreihe. — (Über die Bedeutung der Trefferreihen für die Schießpraxis vergleiche man insbesondere die in der Literaturnote angeführten Werke von Krause, Rohne, Ch. Minarelli-Fitzgerald, Zedlitz, Heydenreich. Diese Reihen lassen die Wirkung erkennen, die bei gegebenen Bedingungen zu erwarten sind, wenn es sich um Abteilungsfeuer handelt; sie geben Aufschluß darüber, ob in einem Fall die Beibehaltung des Visiers für die ganze Abteilung angezeigt ist oder ob zum Teil mit dem Visier gewechselt werden muß usw.; das wohl reichhaltigste Material für Infanteriefeuer ist in dem Werke von Krause enthalten; vgl. S. 30.)

Speziell Berechnung des Trefferbergs beim Schießen auf 800 m (vgl. Abb. 111). Ziel unterer Scheibenrand  $A$ . Die mittlere Flugbahn des Geschosses sei in der üblichen Weise berechnet; in der Nähe des Auffallpunktes  $A$  seien die Ordinaten  $y$  gleich  $BB_0$  für  $x=775$  m, gleich  $CC_0$  für  $x=750$  m usw. gegeben. Ferner seien für die betreffenden Entfernungen die 50 prozentigen Höhenstreuungen  $s_{50} = 2w$  erschossen. So ist vorausgesetzt, daß gegeben sei, für die Entfernungen

800 | 825 | 850 | 875 | 900 | ... | 775 | 750 | 725 | 700 ... m,

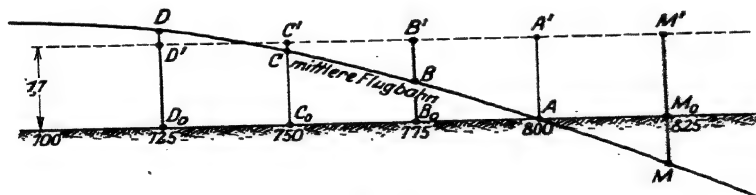


Abb. 111.

die mittlere Flugbahnordinate

$$y = 0 \quad | \quad -1,85 \quad | \quad -2,90 \quad | \quad -4,04 \quad | \quad \dots \quad | \quad +0,90 \quad | \quad +1,52 \quad | \quad +2,16 \quad | \quad +2,74 \quad \dots \quad \text{m}$$

und die 50 prozentige Höhenstreuung

$$2,26 \quad | \quad 2,36 \quad | \quad 2,45 \quad | \quad 2,54 \quad | \quad 2,64 \quad | \quad \dots \quad | \quad 2,18 \quad | \quad 2,09 \quad | \quad 2,00 \quad | \quad 1,91 \quad \dots \quad \text{m.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Scheibe  $AA'$  von 1,70 m Höhe auf 800 m Entf. zu treffen, ist

$$= \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1,70}{1,18}\right) = 0,344 = 34,4\%.$$

die Wahrscheinlichkeit, die Scheibe  $B_0 B'$  auf 775 m Entf. zu treffen, ist

$$= \frac{1}{2} \left[ \psi \left( \frac{0,80}{1,09} \right) + \psi \left( \frac{1,70 - 0,80}{1,09} \right) \right] = 40,0\%.$$

die Wahrscheinlichkeit, die Scheibe  $C_0 C'$  auf 750 m Entf. zu treffen, ist

$$= \frac{1}{2} \left[ \psi \left( \frac{1,52}{1,045} \right) + \psi \left( \frac{1,70 - 1,52}{1,045} \right) \right] = 38,2\%.$$

usw.

usw.

die Wahrscheinlichkeit, die Scheibe  $M_0 M'$  auf 825 m Entf. zu treffen, ist

$$= \frac{1}{2} \left[ \psi \left( \frac{0,89 + 1,70}{1,18} \right) - \psi \left( \frac{0,89}{1,18} \right) \right] = 23,7\%.$$

usw.

So erhält man der Reihe nach für die Entfernungen

800 | 825 | 850 | 875 | 900 | 925 | 950 | ... | 775 | 750 | 725 | 700 | 675 | 650 | 625 | 600 | 575 | ...

die Trefferprozente

34,4 | 33,7 | 12,9 | 5,4 | 1,8 | 0,4 | 0 | ... | 40,0 | 38,2 | 30,0 | 20,5 | 12,0 | 5,8 | 2,4 | 0,9 | 0 | ...

Trägt man diese Zahlen der Trefferprozente in Funktion der Entfernung auf, so erhält man den zur Visierschußweite 800 m zugehörigen Trefferberg.

Die „mittlere Trefferprozentzahl“ (von Fr. v. Zedlitz eingeführter Begriff) gibt für ein Ziel von bestimmter Größe und bestimmter wahrer Entfernung in Prozent an, wie viele Treffer bei vielen gleichartigen Schießversuchen durchschnittlich zu erwarten sind, wenn die Visierstellung bei jedem Schießen neu durch Messen oder Schätzen der Entfernung bestimmt wird. Sie ergibt sich aus der Trefferreihe dadurch, daß man die Trefferprozente für jede Visierstellung mit der Wahrscheinlichkeit dafür multipliziert, daß das betreffende Visier infolge unrichtiger oder richtiger Entfernungsmessung oder Entfernungsschätzung eingestellt wird, und die Produkte addiert.

Z. B. sei die wahre Zielentfernung 900 m, das Ziel ein wagrechter Zielstreifen von 1 m Höhe; die Trefferreihen Zahlen für die zehn Entfernungen 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1000, 1050, 1100 m seien (wie oben angegeben) berechnet worden bzw. zu:

0,1   0,4   1,8   6,1   14,5   23,4   22,8   11,2   2,2   0,2%.

Dies bedeutet, daß, wenn man statt der richtigen Visierstellung 900 z. B. 850 wählt, die Treffervahrscheinlichkeit gegen den Zielstreifen = 0,145 oder 14,5% ist; analog für die anderen Möglichkeiten, das Visier zu wählen. Ferner kenne man aus getrennten Versuchen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man eine wahre Distanz von z. B. 900 m mit dem Entfernungsmesser oder mit Schätzung um 50 oder 100 oder 150 usw. Meter zu kurz oder zu weit erhält; diese Wahrscheinlichkeitszahlen, seien z. B. für die Messung mit dem Entfernungsmesser und für die gleichen Entfernungen 650, 700, 750 usw. bzw.

0   0   0,6   2,2   23,0   49,4   23,0   2,2   0,6   0;  
100   100   100   100   100   100   100

oder in Prozenten

0   0   0,6   2,2   23,0   49,4   23,0   2,2   0,6   0.

Es handelt sich um die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, daß man entweder mit dem Entfernungsmesser die Distanz 650 statt 900 abgelesen und

daher das Visier 650 angewendet hat (Wahrscheinlichkeit 0) und daß man mit dem Visier 650 den Zielstreifen wirklich trifft (Wahrscheinlichkeit  $\frac{0,1}{100}$ ), oder daß man 700 abliest (Wahrscheinlichkeit 0) und mit dem Visier 700 den in 900 m stehenden Zielstreifen trifft (Wahrscheinlichkeit  $\frac{0,4}{100}$ ); oder daß man am Entfernungsmesser 750 abliest (statt 900), also das Visier 750 wählt (Wahrscheinlichkeit  $\frac{0,6}{100}$ ) und daß man dabei mit dem Visier 750 das Ziel trifft (Wahrscheinlichkeit  $\frac{1,8}{100}$ ), usw.

Also im ganzen:

$$= \frac{0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,4 + \frac{0,6}{100} \cdot 1,8 + \frac{2,2}{100} \cdot 6,1 + \frac{23,0}{100} \cdot 14,5 + \frac{49,4}{100} \cdot 23,4 + \frac{23,0}{100} \cdot 22,8}{100} \\ + \frac{\frac{2,2}{100} \cdot 11,2 + \frac{0,6}{100} \cdot 2,2 + 0 \cdot 0,2}{100} = \frac{20,6}{100}$$

oder in Prozenten 20,6 oder rund 21%. Die „mittlere Treffersahl“ für das betreffende Gewehr samt Munition und für die Zielentfernung 900 m und für einen wagrechten Zielstreifen von 1 m Höhe ist somit 21%.

Anmerkung. Über das Abteilungschießen der Infanterie vergleiche man insbesondere die Werke von H. Rohne, vgl. Lit.-Note.

Über die Theorie des Einschießens der Artillerie soll hier nur folgendes angeführt werden: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schuß auf derselben Seite liegt, wie der mittlere Treffpunkt  $O$ , war  $\frac{1}{2} \left( 1 + \psi \left( \frac{L_1}{w} \right) \right)$ . Es sei  $\xi$  in Metern die unbekannte schußtafelmäßige Entfernung des Ziels vom Geschütz,  $\alpha$  in Metern die schußtafelmäßige Entfernung, auf der geschossen wird. Diese Strecken seien vom Geschütz nach dem Ziel zu positiv gerechnet, ebenso sei die Entfernung  $L_1$  des mittleren Treffpunkts  $O$  vom Ziel in derselben Richtung positiv gezählt. Da nun  $\xi - \alpha = L_1$  und  $\psi$  eine ungerade Funktion ist,  $\psi(-y) = -\psi(+y)$ , so stellt  $\frac{1}{2} \left( 1 + \psi \left( \frac{\xi - \alpha}{w} \right) \right)$  in allen Fällen die Wahrscheinlichkeit eines Kurzsusses vor. In Einheiten  $w$  gemessen sei  $\xi$  mit  $x$  und  $\alpha$  mit  $a$  bezeichnet, also  $\frac{\xi}{w} = \frac{\alpha}{w} = a$ , so ist  $\frac{1}{2} (1 + \psi(x - a))$  oder, kurz bezeichnet,  $F(x - a)$  die Wahrscheinlichkeit eines Kurzsusses, folglich  $F(a - x)$  oder  $1 - F(x - a)$  die Wahrscheinlichkeit eines Weitsusses. (Für diese Funktion  $F$  ist in den Werken von Sabudski-v. Eberhard, sowie von Kozák eine Tabelle gegeben.)

Wenn  $s = m + n$  Schüsse abgegeben werden, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter diesen  $s$  Schüssen  $m$  Kurzsüsse und  $n$  Weitsüsse finden, durch den Ausdruck  $(F(x - a))^m \cdot (F(a - x))^n$  dargestellt. Die wahrscheinlichste schußtafelmäßige Zielentfernung  $x$  ist diejenige, für die der Ausdruck zu einem Maximum wird; also  $x$  zu berechnen aus  $F(x - a) = \frac{m}{s}$  (vgl. obiges Beispiel 5).



Allgemeiner seien  $s = m + n$  Schüsse mit verschiedenen Höhenrichtungen abgegeben: auf den Entfernungen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  seien Kurzschüsse, auf den Entfernungen  $b_1, b_2, \dots, b_n$  Weitschüsse in bestimmter Folge beobachtet, wobei falsche Beobachtungen ausgeschlossen seien. Die unbekannte Zielentfernung  $x$  erhält man alsdann nach Magnon durch die folgende Überlegung: Die Wahrscheinlichkeit für die erwähnte Gesamtbeobachtung ist:

$$\eta = F(x - a_1) \cdot F(x - a_2) \cdots F(x - a_m) \cdot F(b_1 - x) \cdot F(b_2 - x) \cdots F(b_n - x). \quad (a)$$

Durch logarithmische Differentiation und Nullsetzen der Ableitung erhält man die Bedingung für das Maximum von  $\eta$  und damit die wahrscheinlichste Zielentfernung  $x$ . Die Bedingung wird:

$$f(x - a_1) + \cdots + f(x - a_m) - f(b_1 - x) - \cdots - f(b_n - x) = 0; \quad (b)$$

dabei bedeutet  $f(y)$  den Ausdruck  $\frac{F'(y)}{F(y)}$ , (hierfür oder vielmehr für  $\frac{1}{2 \cdot e^2} \cdot \frac{F'}{F}$  findet man eine Tabelle bei Sabudski und bei Kozák). Diese Gleichung (b) wird durch Probieren gelöst.

Z. B. seien beim Schießen aus einer Kanone folgende Beobachtungen erhalten worden (Beispiel nach Sabudski-v. Eberhard): Bei einer Aufsatzhöhe 50 mm, entsprechend der Entfernung  $A_1$ , sei erhalten: —, bei 51 mm entsprechend  $A_2$ : +, —, —; bei 52 mm entsprechend  $A_3$ : +, +; (+ = Weitschuß — = Kurzschuß). 1 mm am Aufsatz verändere die Schußweite um 26 m, und die wahrscheinliche Längenabweichung  $w$  betrage 9,4 m. Die wahrscheinlichste Zielentfernung ist gesucht. Die Bedingung (b) lautet jetzt:

$$f(x - A_1) + 2f(x - A_2) - f(A_2 - x) - 2f(A_3 - x) = 0. \quad (c)$$

Um diese Gleichung zu lösen, versuche man zuerst  $x = A_1$ . Dann wird die linke Seite von (c):  $f(A_2 - A_1) + 2f(0) - f(0) - 2f(A_3 - A_1)$ . Die Entfernungsdifferenz  $A_2 - A_1$  entspricht einer Aufsatzhöhendifferenz von 51–50 mm; da aber 1 mm Aufsatzhöhenänderung die Schußweite um 26 m ändert, so ist

$$A_2 - A_1 = (51 - 50) \cdot 26 \text{ in Metern oder } = \frac{(51 - 50) \cdot 26}{9,4} = 2,77 \text{ in Einheiten } w. \text{ Eben-}$$

so ist  $A_3 - A_2 = 2,77$ . Also hat man  $f(2,77) + 2f(0) - f(0) - 2 \cdot f(2,77)$ . Aus der erwähnten Tabelle erhält man für die linke Seite:

$$0,11 + 2 \cdot 1,18 - 1,18 - 2 \cdot 0,11 \quad \text{oder} \quad +1,07,$$

die linke Seite wird positiv. Versucht man ebenso  $x$  gleich der Entfernung, die der Aufsatzhöhe 51,36 mm entspricht, so wird die linke Seite = –1,26. Endlich für 51,2 mm wird sie –0,21. Somit liegt die wahrscheinlichste Aufsatzhöhe für die Zielentfernung zwischen 51 und 51,2 mm und zwar nahe an 51,2 mm.

Dieses Verfahren hat Magnon — dessen Methoden zuerst H. Rohne in Deutschland anwandte — auf den Fall ausgedehnt, daß bei einem Schuß oder bei mehreren Schüssen die Abweichung vom Ziel gemessen werden konnte (z. B. Aufschlag im Ziel selbst, Abweichung Null gegeben). Darüber, sowie über die sonstigen Aufgaben bezüglich des Einschießens der Artillerie vgl. insbes. das von O. v. Eberhard verdeutschte Werk von N. Sabudski, worin die betreffenden Fragen in eingehender Weise theoretisch behandelt sind. Eben dort sind einige Schießregeln betrachtet, die auf der Unterscheidung von Kurz- und Weitschüssen aufgebaut sind; auch ist eine Theorie des Brennründerschießens mit Schrapnells gegeben. Siehe Lit.-Note § 71, auch bezüglich der Arbeiten von Rohne und Callenberg.

## § 71. Wahrscheinlichkeit, eine gegebene Kreisfläche zu treffen.

Auf einer lotrechten Scheibe sei ein Kreis mit Radius  $R$  gegeben; die Waffe sei auf den Mittelpunkt  $O$  genau eingeschossen, so daß  $O$  den genauen Mittelpunkt der Geschosßgarbe vorstellt. Die Streuungsverhältnisse seien in der Ebene der Scheibe nach allen Richtungen von  $O$  aus dieselben.

Eine Stelle  $P$  der Kreisfläche (Abb. 112) wird als unendlich kleine Schnittfläche  $df$  eines Sektors vom Zentriwinkel  $d\varphi$  und eines unendlich schmalen Kreisrings von dem inneren Radius  $r$  und dem äußeren Radius  $r + dr$  gekennzeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Punkt  $P$  zu treffen, ist auf Grund des Gaußschen Gesetzes  $a^2 \cdot e^{-b^2 r^2} \cdot df$ , wo  $a$  und  $b$  zwei Konstante sind, die nachher bestimmt werden sollen und wobei  $df = r d\varphi \cdot dr$ . Integriert man in Beziehung auf  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$ , so entfallen von  $n$  Schüssen auf den unendlich schmalen Kreisring  $2n\pi a^2 \cdot e^{-b^2 r^2} \cdot r \cdot dr$ . Also ist die Zahl  $t$  der Treffer, die auf die ganze Kreisfläche vom Radius  $R$  fallen,

$$t = 2n\pi a^2 \cdot \int_{r=0}^{r=R} e^{-b^2 r^2} \cdot r \cdot dr = n\pi \frac{a^2}{b^2} (1 - e^{-b^2 R^2}). \quad (1)$$

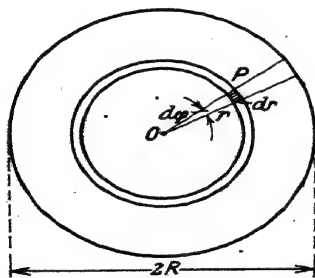


Abb. 112.

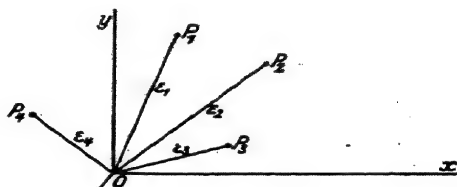


Abb. 113.

Die Konstante  $a$  wird sofort aus der Überlegung erhalten, daß die ganze unendliche Ebene der Kreisfläche jedenfalls getroffen wird, daß also  $t = n$  ist, wenn  $r = \infty$ ; dies gibt  $a = \frac{b}{\sqrt{\pi}}$ .

Die Konstante  $b$  stellt ein Treff-Genauigkeitsmaß bezüglich der radialen Abweichungen dar, wie sie je in Richtung der Radienvektoren von  $O$  aus gerechnet werden (Abb. 113). Von diesen radialen Abweichungen sei die mittlere quadratische Abweichung  $\mu_r$ , die durchschnittliche  $E_r$ , die wahrscheinliche oder 50prozentige Abweichung (50prozentiger Streuungshalbmesser)  $w_r$  oder  $R_{50}$ . Die Beziehungen zwischen diesen Treff-Genauigkeitsmaßen der Praxis sind

für die radialen Abweichungen andere als für die bisher betrachteten parallelen Abweichungen.

a) Mittlere quadratische (radiale) Abweichung  $\mu_r$ .

Sind die einzelnen radialen Abweichungen der Geschosßdurchschläge  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ , so ist nach der Voraussetzung

$$\mu_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots}{n}} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n}}.$$

Also  $n \cdot \mu_r^2 = \sum \varepsilon^2 = \sum (r^2 \text{ mal Anzahl der Treffer, die in den betreffenden unendlich schmalen Kreisring mit den Radien } r \text{ und } r + dr \text{ entfallen}),$

$$= \sum (r^2 \cdot 2\pi n a^2 \cdot e^{-b^2 r^2} \cdot r \cdot dr),$$

die Summe genommen über die ganze Ebene; somit

$$n \mu_r^2 = 2\pi n \cdot \frac{b^2}{\pi} \cdot \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-b^2 r^2} \cdot r^3 \cdot dr;$$

durch die Substitution  $b^2 r^2 = t$  und partielle Integration wird

$$\mu_r^2 = \frac{1}{b^2}, \quad b = \pm \frac{1}{\mu_r}, \quad (2)$$

so daß wegen (1) Trefferzahl  $t = n \left(1 - e^{-\frac{R^2}{\mu_r^2}}\right)$ . Speziell für  $R = \mu_r$  wird  $t = n \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,631 \cdot n = 63\%_0$  der Schüsse.

Wenn die mittleren quadratischen Abweichungen in Richtung der aufeinander senkrechten Symmetrierichtungen der  $x$ - und  $y$ -Achsen mit  $\mu_1$  und  $\mu_2$  bezeichnet werden, so folgt daraus  $\mu_r = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ , (da  $r^2 = x^2 + y^2$ , also auch  $\sum r^2 = \sum x^2 + \sum y^2$ ), und da die Streuungen nach der  $x$ - und nach der  $y$ -Achse als gleich vorausgesetzt sind,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , so ist  $\mu_r = \mu\sqrt{2}$ .

b) Wahrscheinliche (radiale) Abweichung oder 50prozentiger Streuungshalbmesser  $w_r$  oder  $R_{50}$ .

$R_{50}$  ist der Radius des Kreises um  $O$ , der die bessere Hälfte aller Schüsse faßt oder für den die Treffwahrscheinlichkeit  $\frac{t}{n} = \frac{1}{2}$ .

Folglich ist  $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{R_{50}^2}{\mu_r^2}}$  oder

$$R_{50} = w_r = \mu_r \cdot \sqrt{\log \text{nat } 2} = 0,83255 \cdot \mu_r. \quad (3)$$

Damit wird die Trefferzahl

$$t = n \left(1 - e^{-\frac{R^2 \cdot \log \text{nat } 2}{R_{50}^2}}\right) = n \left[1 - (e^{-\log \text{nat } 2})^{\frac{R^2}{R_{50}^2}}\right],$$

$$t = n \cdot \left[1 - 0,5^{\frac{R^2}{R_{50}^2}}\right].$$

c) Durchschnittliche (radiale) Abweichung  $E_r$ .

Diese ist das arithmetische Mittel aller dem absoluten Wert nach genommenen radialen Abweichungen,  $E_r = \frac{\sum |s|}{n}$ , also ist  $n E_r = \sum (r \text{ mal Zahl der Abweichungen von dieser Größe } r)$ ; diese Summe erstreckt über die ganze Ebene, gibt

$$n \cdot E_r = \sum (r \cdot n a^2 \cdot e^{-b^2 r^2} \cdot 2 \pi r \cdot dr) = 2 \pi a^2 n \cdot \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-b^2 r^2} \cdot r^2 \cdot dr;$$

hieraus mit  $b r = t$ :

$$E_r = 2 \pi a^2 \frac{1}{b^3} \cdot \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-t^2} \cdot t^2 \cdot dt = 2 \pi a^2 \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

oder, da  $a = \frac{b}{\sqrt{\pi}}$ ,

$$E_r = \frac{1}{b} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{0,8862}{b}. \quad (4)$$

Mit Benützung dieses Genauigkeitsmaßes ist

$$t = n \left( 1 - n^{-\frac{\pi R^2}{4 E_r^2}} \right).$$

Die Konstante  $b$  ist nunmehr in dreifacher Weise durch Genauigkeitsmaße ausgedrückt, die sich leicht aus dem Trefferbild entnehmen lassen; es ist

$$b = \frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{E_r} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\log \text{nat } 2}}{w_r \text{ (oder } R_{50})},$$

also  $R_{50}$  oder  $w_r = 0,83255 \cdot \mu_r = 0,9395 \cdot E_r$  für die radialen Abweichungen von  $O$  aus (wie früher  $w = 0,6745 \cdot \mu = 0,8453 \cdot E$  für die parallelen Abweichungen).

Der Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem mittleren Treffpunkt zusammenfällt und der 50% aller Treffer enthalten soll, hat zu seinem Halbmesser  $R_{50}$ . Denkt man sich andererseits ein Quadrat, dessen Mittelpunkt ebenfalls mit dem mittleren Treffpunkt identisch ist und bezüglich dessen die 50prozentige Höhenstreuung und Längsstreuung gleichgroß, nämlich gleich  $s$  ist, so ist, wenn das Quadrat ebenfalls 50% Treffen aufnehmen soll, (nach § 70, Beispiel 7) die Beziehung zwischen  $R_{50}$  und  $s$  die folgende:

$$R_{50}^2 \cdot \pi = (1,56 \cdot s)^2, \text{ woraus } R_{50} = 0,88 \cdot s.$$

**Zusammenfassung.** Die Trefferprocente beim Schießen gegen eine Kreisscheibe vom Radius  $R$ , in deren Mittelpunkt  $O$  der mittlere Treffpunkt liegt, betragen 100mal

$$1 - e^{-\frac{R^2}{E_r^2}} = 1 - 0,5 \frac{R^2}{R_{50}^2} = 1 - e^{-\frac{\pi R^2}{4 E_r^2}}.$$

Dabei bedeutet:

$\mu_r$  = mittlere quadratische Abweichung von  $O$  aus gerechnet  $= \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ , wobei  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die mittleren quadratischen Abweichungen in Beziehung auf die zwei zueinander senkrechten Richtungen der Symmetrieachsen ( $x$ - und  $y$ -Achsen) des Trefferbilds sind; da hier speziell  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  vorausgesetzt ist, so ist  $\mu_r = \mu\sqrt{2}$ ;  $2R_{50}$  = 50prozentiger Streuungsdurchmesser;  $E_r$  die durchschnittliche Abweichung, von  $O$  aus gerechnet;  $R$  und  $\mu_r$  oder  $R$  und  $R_{50}$  oder  $R$  und  $E_r$  sind in gleicher Längeneinheit zu benützen.

Es bedeute z. B. wie früher  $2w_1$  die doppelte wahrscheinliche Abweichung oder die 50prozentige Streuung parallel der horizontalen  $x$ -Achse gemessen;  $2w_2$  die 50prozentige Streuung parallel der vertikalen  $y$ -Achse gemessen. Ferner sei speziell  $w_1 = w_2 = w$ . Man hat dann (vgl. Abbildung 113a) zwei Zielstreifen von der Breite  $2w$ . Jeder faßt, für sich genommen, 50% Treffer. Das ihnen gemeinschaftliche Quadrat  $ABCD$  faßt somit 50% von 50% oder 25% Treffer. Wieviel Treffer faßt der eingeschriebene Kreis vom Halbmesser  $w$ ?

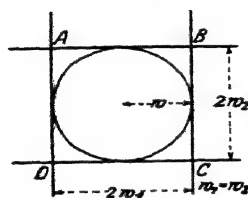


Abb. 113a.

Hier ist  $R = w_1 = w_2 = w = 0,6745 \mu$  (vgl. § 63 oder §

$$= \frac{0,6745}{\sqrt{2}} \cdot \mu_r \text{ (s. oben)} : \frac{0,6745}{\sqrt{2}} \cdot \frac{w_r}{0,83255} \text{ (s. oben)},$$

$$= \frac{0,6745}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R_{50}}{0,83255}.$$

Dabei bedeutet nach dem Obigen  $R_{50}$  die wahrscheinliche radiale Abweichung oder  $2R_{50}$  den Durchmesser des Kreises, der 50% Treffer faßt.

Man hat also in den obigen Hauptformeln entweder

$$\frac{R}{R_{50}} = \frac{0,6745}{\sqrt{2} \cdot 0,83255} \quad \text{oder} \quad \frac{R}{\mu_r} = \frac{0,6745}{\sqrt{2}}$$

zu setzen und erhält rd. 20% Treffer in dem Kreis mit Halbmesser  $w_1 = w_2 = w$ .

Eine kleine Tabelle für  $\left(1 - 0,5 \frac{R^2}{R_{50}^2}\right) \cdot 100$  in Funktion von  $\frac{R}{R_{50}}$  sei nebenstehend (S. 445) angefügt.

**Zahlenbeispiel.** Eine Pistole sei auf den Mittelpunkt einer in bestimmter Entfernung aufgestellten Ringscheibe genau eingeschossen; der 50prozentige Streuungsdurchmesser betrage hierbei 0,5 m. Die mit 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6 bezeichneten Ringe haben bzw. die Radien 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 cm. Wieviel Treffer unter 1000 Schüssen sind innerhalb der einzelnen Kreisflächen und innerhalb der einzelnen Ringflächen zu erwarten?

$$2R_{50} = 50 \text{ cm}, \quad R_{50} = 25 \text{ cm}.$$

Kreisfläche bis Ring Nummer 12,	$\frac{R}{R_{50}} = \frac{5}{25} = 0,2$ ,	dazu gehören 2,73%
" " " " 11, "	$\frac{10}{25} = 0,4$ ,	" 10,50%
" " " " 10, "	$\frac{15}{25} = 0,6$ ,	" 22,08%
" " " " 9, "	$\frac{20}{25} = 0,8$ ,	" 35,82%
" " " " 8, "	$\frac{25}{25} = 1,0$ ,	" 50 %
" " " " 7, "	$\frac{30}{25} = 1,2$ ,	" 63,14%
" " " " 6, "	$\frac{35}{25} = 1,4$ ,	" 74,30%

also in der Ringfläche

Nummer 12	11	10	9	8	7	6
Treffer 27	105—27 = 78	221—105 = 116	358—221 = 137	500—358 = 142	631—500 = 131	743—631 = 112

zusammen innerhalb der Ringe 743 Treffer, also außerhalb 257.

Kreisradius $R$ 50 proz. Streuungshalbmesser $R_{50}$ =											
Trefferprozent =						0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
23,80	35,82	42,96	50,00	56,77	63,14	69,01	74,30	78,98	83,04	86,51	89,42
1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
91,81	93,75	95,29	96,51	97,44	98,15	98,69	99,07	99,37	99,56	99,71	99,80

## § 72. Wahrscheinlichkeit, eine gegebene elliptische Scheibe oder eine Scheibe von beliebigem Umriß zu treffen.

### A. Elliptische Scheibe.

Die Koordinatenachsen<sup>1</sup> der  $x$  und  $y$  seien die Symmetrieachsen des Treffbilds. Die mittleren quadratischen Abweichungen in Richtung der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse mögen gleich  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  und daraus die wahrscheinlichen Abweichungen gleich  $w_1$  bzw.  $w_2$  bestimmt sein. Dann gibt es eine unendliche Schar von Ellipsen, für die das Achsenverhältnis konstant gleich  $\mu_1:\mu_2$  oder  $w_1:w_2$  ist und die folglich unter sich ähnlich sind. Unter diesen Ellipsen sei eine bestimmte  $CDC_1D_1$  dadurch gegeben, daß ihre Halbachsen  $OC = \lambda\mu_1$  und  $OD = \lambda\mu_2$  sind; mit dem Wert von  $\lambda$  ist diese Ellipse gegeben, und es handelt sich darum, wieviel Prozent Treffer sie aufnehmen wird.

Zu diesem Zweck zerlegen wir die gegebene Ellipsenfläche in geeigneter Weise in Flächenelemente  $df$ , berechnen die Anzahl Treffer, die auf ein solches Element  $df$  entfallen, und erhalten durch Integration die Trefferzahl für die gegebene Ellipse  $CD C_1 D_1$ .

Am zweckmäßigsten wählt man ein solches Flächenelement in der Form einer unendlich schmalen elliptischen Ringfläche  $ABA_1 B_1$ , deren begrenzende Ellipsen zu der erwähnten Schar von ähnlichen Ellipsen gehören. Denn es läßt sich leicht zeigen, daß entlang einer jeden solchen Ellipse die Treffwahrscheinlichkeit gleich groß ist (Kurve gleicher Wahrscheinlichkeit des Treffens):

Die Wahrscheinlichkeit, ein unendlich kleines Flächenelement  $dx \cdot dy$  (Punkt  $P$ ) zu treffen, hatte sich gefunden gleich

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} \cdot dx \cdot \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 y^2} \cdot dy,$$

wobei

$$h_1 = \frac{1}{\mu_1 \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{1}{\mu_2 \sqrt{2}},$$

also auch gleich

$$\frac{1}{2\pi\mu_1\mu_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\mu_1^2} + \frac{y^2}{\mu_2^2}\right)} \cdot dx \cdot dy$$

ist. Läßt man nun den Punkt  $(xy)$  und damit das Flächenelement  $dx \cdot dy$  sich in der Ebene so ändern, daß  $P$  auf der Ellipse  $ABA_1 B_1$  mit den Halbachsen  $\varepsilon\mu_1$  und  $\varepsilon\mu_2$  verbleibt, d. h. so, daß  $\frac{x^2}{(\varepsilon\mu_1)^2} + \frac{y^2}{(\varepsilon\mu_2)^2} = 1$  oder  $\frac{x^2}{\mu_1^2} + \frac{y^2}{\mu_2^2} = \varepsilon^2$  bleibt, so ist die erwähnte Wahrscheinlichkeit konstant; denn der Wert  $\varepsilon$  ist entlang der Ellipse konstant; diese ist eben durch  $\varepsilon$  gegeben, und  $\mu_1, \mu_2$  sind gleichfalls gegebene Zahlen.

Denkt man sich also über alle Elemente  $dx \cdot dy$  des elliptischen Rings  $ABA_1 B_1$  integriert, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, diesen unendlich schmalen Ring zu treffen, gleich  $\frac{1}{2\pi\mu_1\mu_2} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \cdot df$ . Dabei ist  $df$  die Fläche dieses Rings.

Ein Ausdruck für  $df$  läßt sich folgendermaßen finden. Die innere Ellipse des Rings hat die Halbachsen  $\varepsilon\mu_1$  und  $\varepsilon\mu_2$ , die äußere die Halbachsen  $(\varepsilon + d\varepsilon)\mu_1$  und  $(\varepsilon + d\varepsilon)\mu_2$ . Nun ist die Fläche einer Ellipse von den Halbachsen  $a$  und  $b$  gleich  $ab\pi$ , also hat die innere

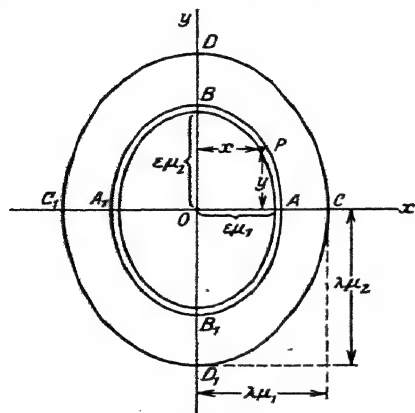


Abb. 114.

Ellipse des Rings  $ABA_1B_1$  den Flächeninhalt

$$f = \varepsilon \mu_1 \cdot \varepsilon \mu_2 \cdot \pi = \mu_1 \mu_2 \pi \cdot \varepsilon^2.$$

Hiervon ist  $df$  das Differential. Also  $df = 2 \mu_1 \mu_2 \pi \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon$ .

Damit wird der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, den unendlich schmalen Ring zu treffen, gleich

$$\frac{1}{2\pi\mu_1\mu_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \cdot 2\mu_1\mu_2\pi \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon,$$

oder unter  $n$  Schüssen werden  $n \cdot e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon$  Treffer in den Ring fallen. Wird dieser Ausdruck über das ganze Gebiet der gegebenen Ellipse  $CDC_1D_1$  integriert, d. h. von  $\varepsilon = 0$  bis  $\varepsilon = \lambda$ , so erhält man

$$n \int_0^\lambda e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = n \left(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)$$

als Trefferzahl bezüglich dieser Ellipsenfläche.

**Zusammenfassung.** Diejenige Ellipse, die die Halbachsen

$$OC = \lambda \mu_1 = \lambda \cdot 1,483 \cdot w_1 \quad \text{und} \quad OD = \lambda \mu_2 = \lambda \cdot 1,483 \cdot w_2$$

in den Richtungen der Symmetrieachsen des Trefferbilds besitzt ( $\lambda$  eine beliebige reelle Zahl) und deren Mittelpunkt mit dem mittleren Treffpunkt zusammenfällt, nimmt

$100 \left(1 - e^{-\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)$  Prozent Treffer auf. Außerhalb der Ellipse liegen  $100 \cdot e^{-\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}$  Prozent Treffer.

Soll die Ellipse  $CDC_1D_2$  insbesondere die wahrscheinliche Abweichungsellipse vorstellen, die 50<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Treffer aufnimmt, so muß  $\frac{n}{2} = n \left(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)$  oder  $\lambda = \sqrt{2 \log \text{nat } 2} = 1,1774$  sein, d. h. die Ellipse mit den Halbachsen  $1,177 \mu_1$  und  $1,177 \mu_2$  wird die bessere Hälfte aller Schüsse enthalten.

Auf diese Weise lassen sich die Halbachsen der zu irgendwelchen vorgeschriebenen Trefferprozenten gehörigen Ellipse errechnen aus der Schar der ähnlichen Ellipsen, deren Halbachsen im konstanten Verhältnis  $\mu_1 : \mu_2 = w_1 : w_2$  stehen. Unter dieser Schar von ähnlichen Ellipsen befindet sich auch diejenige Ellipse, die den natürlichen Umriß des Trefferbilds darstellt; denn die Maximalabweichungen  $M_1 = \text{etwa } 3 \cdot w_1$  und  $M_2 = \text{etwa } 3 \cdot w_2$  in den beiden Achsenrichtungen stehen in demselben Verhältnis  $\mu_1 : \mu_2 = w_1 : w_2$ . Folglich stellen die erwähnten Ellipsen die kleinsten Scheiben dar, deren Flächen vorgeschriebene Trefferprocente enthalten können.

Die unendlich vielen konzentrischen und ähnlichen Ellipsen, die zu den verschiedenen Werten von  $\lambda$  gehören, können aufgefaßt werden



als die horizontalen Schichtlinien eines ellipsoidischen Trefferbergs. Jede einzelne stellt ein größeres oder kleineres Bild der Trefferverteilung dar. Unter ihnen sind in der Mathematik und Ballistik besonders drei hervorgehoben worden, wovon eine oben schon erwähnt wurde:

a) Mit  $\lambda = 1$  hat man die Ellipse von den Halbachsen  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Sie heißt nach Helmert die mittlere Fehlerellipse; die Anzahl Treffer, die sie aufnimmt, ist

$$100 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = 39,35\%.$$

Es läßt sich zeigen, daß die mittlere quadratische Abweichung  $\mu$  für irgendeine bestimmte Richtung gleich ist dem Abstand einer zu dieser Richtung senkrechten Tangente der Ellipse von deren Mittelpunkt.

b) Mit  $\lambda = 12 \cdot \log_{\text{nat}} 2 = 1,1774$  liegt die schon erwähnte Ellipse vor, die die Halbachsen  $1,1774 \mu_1$  und  $1,1774 \mu_2$  besitzt und  $100 \cdot (e^{-\log_{\text{nat}} 2}) = 100 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 50\%$  Treffer faßt. Sie heißt deshalb häufig die 50prozentige Streuungsellipse.

c) Mit  $\lambda = 0,6745$  (vgl. § 66) ist die Ellipse mit den Halbachsen  $0,6745 \mu_1 = w_1$  und  $0,6745 \mu_2 = w_2$  gegeben. Ihre Achsen sind also die 50prozentigen Streuungen  $2 w_1$  und  $2 w_2$ , in Richtung der Achsen gemessen. Sie enthält  $100 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0,6745^2}{2}}\right) = \text{rd. } 20\%$  Treffer; ein Ergebnis, das auch noch gilt, wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht, also  $w_1 = w_2$  ist, und das bereits oben in § 71 erhalten wurde. Für irgendeine Richtung wird bei dieser Ellipse die 50prozentige Streuung erhalten als der Abstand der zu der Richtung senkrechten Tangenten. Der Abstand ihrer lotrechten Tangenten ist also die 50prozentige Längsstreuung; der Abstand ihrer wagrechten Tangenten ist die 50prozentige Höhenstreuung des Treffer- oder Sprengpunktsbilds.

Eine kleine Tabelle für  $100 \left(1 - e^{-\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)$  in Funktion von  $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$  und umgekehrt ist die folgende:

$\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$	=						
	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40		
$100 \left(1 - e^{-\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = \%$	0,00	0,99	3,92	8,61	14,79		
0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0	1,2	1,4
22,12	30,23	38,74	47,27	55,51	63,21	76,31	85,91
1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
92,27	96,08	98,17	99,21	99,68	99,88	99,96	99,99

Umgekehrt:

$100 \left(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right) =$	10%	20%	30%	40%
$\frac{\lambda^2}{2} =$	0,10537	0,22315	0,35668	0,51083
50%	60%	70%	80%	90%
0,69315	0,91630	1,20398	1,60944	2,30259

Auf diese Weise ließen sich für eine bestimmte Handfeuerwaffe und je für eine bestimmte Scheibenentfernung elliptische Ringscheiben konstruieren, deren einzelne Ringe den tatsächlichen Höhen- und Breitenstreuungen angepaßt wären und deren Ringflächen bestimmte Trefferprozente aufnehmen sollen.

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich auf den Raum ausdehnen (mittleres, wahrscheinliches Trefferellipsoid usw.). Wegen der zur Zeit noch geringen praktischen Bedeutung sei hiervon abgesehen.

### B. Beliebig begrenzte Scheibe.

In § 70 ergab sich, daß die Wahrscheinlichkeit, eine gegebene ebene Scheibe zu treffen, durch das folgende, über die Randlinie der Scheibe zu erstreckende Doppelintegral ausgedrückt ist:

$$\frac{h_1 h_2}{\pi} \cdot \iint e^{-(h_1^2 x^2 + h_2^2 y^2)} \cdot dx dy.$$

Dieses Doppelintegral konnte, wie sich in § 70 bis 72 gezeigt hat, nicht nur für eine rechteckige, sondern auch für eine kreisförmige bzw. elliptische Begrenzung verhältnismäßig einfach ausgeführt werden, falls der mittlere Treffpunkt im Mittelpunkt des Kreises bzw. der Ellipse liegt.

Wenn es sich jedoch um unregelmäßig begrenzte Scheibenflächen handelt, z. B. um Figurescheiben, wie sie zur Darstellung gefechtsmäßiger Ziele der Infanterie üblich sind, so ist es überhaupt nicht möglich, das Doppelintegral in endlicher geschlossener Form analytisch auszuwerten. Man behalf sich bis jetzt damit, anzunehmen, der mittlere Treffpunkt falle nahezu mit dem Schwerpunkt der Figurescheibe zusammen und man könne diese durch eine ihr flächengleiche Kreisscheibe oder Rechtecksscheibe ersetzen, in deren Mittelpunkt der mittlere Treffpunkt gelegen ist.

Erst in neuester Zeit hat R. Rothe (Berlin) zwei graphisch-mechanische Verfahren entwickelt, die gestatten, für eine beliebig begrenzte Scheibe, bei beliebig gegebenen Streuungsverhältnissen, bei beliebiger Lage der Gruppierungsachsen und bei willkürlicher Annahme des mittleren Treffpunkts die auf die Scheibe entfallenden

Trefferprozente zu ermitteln, und zwar mit einer weitaus genügenden, an Zahlenbeispielen geprüften Genauigkeit.

Zu diesem Zweck wird zunächst durch Einführung neuer Veränderlicher an Stelle von  $h_1x$  und  $h_2y$  das Doppelintegral in das einfachere

$$\frac{1}{\pi} \cdot \iint e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx dy$$

umgewandelt. Sodann wird das von R. Rothe entwickelte allgemeine Verfahren benützt, mit Hilfe des Planimeters ein beliebig gegebenes, über eine bestimmte Randkurve sich erstreckendes Doppelintegral

$$\iint f(x, y) \cdot dx dy$$

auszuwerten.

Dieses Verfahren besteht kurz ausgedrückt in folgendem: Man stellt zunächst eine Karte der Fläche  $z = f(x, y)$  durch deren Schichtlinien  $z = \text{konst.}$  dar, zeichnet darin die Randlinie des Integrals ein, bestimmt mit dem Planimeter für genügend viele Höhen  $z$  die Querschnitte des über der Randlinie errichteten zylindrischen Körpers, trägt diese als Ordinaten zu den Abszissen  $z$  in einer neuen Zeichnung auf, verbindet ihre Endpunkte durch eine glatte Kurve und bestimmt wieder mit dem Planimeter den algebraischen Flächeninhalt, der von dieser Kurve, von den beiden äußersten Ordinaten und von der Abszissenachse begrenzt wird.

R. Rothe hat dieses Verfahren für mehrere Beispiele durchgeführt, u. a. für eine Brustscheibe der Infanterie von 1283 qcm Fläche. Dabei ergab sich eine Treffwahrscheinlichkeit von 0,662, während die Annahme einer flächengleichen Kreisscheibe den zu großen Wert 0,754 liefert.

Auch auf die Treffwahrscheinlichkeit eines räumlich ausgedehnten Ziels kann das Rotheresche planimetrische Verfahren ausgedehnt werden.

Endlich hat R. Rothe gezeigt, wie derjenige Punkt der Scheibe ermittelt werden kann, in dem der mittlere Treffpunkt angenommen werden muß und wie die Scheibe orientiert werden muß, damit die Treffwahrscheinlichkeit ihren größten Wert annimmt.

Auf die näheren Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden. Denjenigen Ballistikern, an die derartige Fragen herantreten, möge die sehr eingehende und klar geschriebene Arbeit von R. Rothe selbst empfohlen werden (vgl. Lit.-Note).

### § 73. Verwendung der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme in der Ballistik.

#### A. Aufstellung von empirischen ballistischen Gesetzen, von Interpolationsformeln usw. Erstes Verfahren.

Der Zweck, um den es sich hier handelt, und das Verfahren selbst dürfte am besten an der Hand eines einfachen Beispiels zu erläutern sein:

Es seien für die Schußweiten  $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  km bzw. die Flugzeiten  $T = 2,70; 6,20; 10,30; 15,20; 21,40; 30,30$  sec gemessen worden. Man wünscht eine Beziehung zwischen Schußweite  $X$  und Flugzeit  $T$  (für irgendeine theoretische Untersuchung oder auch für die Berechnung von Zwischenwerten) zu gewinnen; und zwar sei die Form gewählt:

$$T = AX + BX^2.$$

Zur Ermittlung der zwei unbekannten Koeffizienten  $A$  und  $B$  hat man, da sechs Beobachtungen vorliegen, sechs Bestimmungsgleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned} 2,7 &= 1 \cdot A + 1^2 \cdot B; & 6,2 &= 2A + 2^2 \cdot B; & 10,3 &= 3A + 3^2 \cdot B; \\ & & 15,2 &= 4A + 4^2 \cdot B \text{ usw.} \end{aligned}$$

Nimmt man etwa nur die zwei ersten Gleichungen, so wird  $A = 2,3$  und  $B = 0,4$ , so daß die Beziehung lautet:

$$T = 2,3 X + 0,4 \cdot X^2. \quad (1)$$

Stellt man die aus dieser Gleichung berechneten Flugzeiten  $T$  den gemessenen Flugzeiten  $T$  gegenüber, so werden die Fehler  $f$  die folgenden:

gemessen:	$T =$	2,7	6,2	10,3	15,2	21,4	30,3,
berechnet:	$T =$	2,7	6,2	10,5	15,6	21,5	28,2,
also Fehler:	$f =$	$\pm 0$	$+ 0$	$+ 0,2$	$+ 0,4$	$+ 0,1$	$- 2,1;$

$$\sum(f^2) = 0,2^2 + 0,4^2 + 0,1^2 + 2,1^2 = 4,6_2.$$

Es gilt, in zweckmäßigster Weise alle Beobachtungen zu verwerten oder die Fehler  $f$  auf die ganze Beobachtungsreihe zu verteilen, oder sie auszugleichen. Dies geschieht mit der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme: Die Koeffizienten  $A$  und  $B$  müssen so bestimmt werden, daß die Fehlerquadratsumme  $\sum(f^2)$  und daher auch der mittlere Fehler so klein als möglich wird (das rechnerische Verfahren, um das es sich handelt, ist also analog dem bekannten graphischen, bei dem man eine mittlere Kurve durch die beobachteten Punkte legt, und ist damit häufig gleichwertig). Denkt man sich  $A$  und  $B$  bestimmt, so sind die zu den einzelnen  $X$  berechneten Flugzeiten  $T = AX + BX^2$ ; die Fehler sind die Differenzen zwischen diesen berechneten und den gemessenen Flugzeiten, somit ist die Summe der Fehlerquadrate, die ein Minimum werden soll:

$$\begin{aligned} (1 \cdot A + 1^2 \cdot B - 2,7)^2 &+ (2 \cdot A + 2^2 \cdot B - 6,2)^2 \\ &+ (3A + 3^2 \cdot B - 10,3)^2 + \dots \end{aligned}$$

Nach den Regeln für Maxima und Minima zweier Veränderlicher hat man diesen Ausdruck partiell nach  $A$  und nach  $B$  abzuleiten und

diese Ableitungen je der Null gleichzusetzen. Dies gibt die folgenden zwei Gleichungen für  $A$  und  $B$ :

$$\begin{aligned} (A + B - 2,7) + 2(2A + 4B - 6,2) + 3(3A + 9B - 10,3) + \dots &= 0 \\ (A + B - 2,7) + 4(2A + 4B - 6,2) + 9(3A + 9B - 10,3) + \dots &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{oder} \\ A(1 + 4 + 9 + \dots) + B(1 + 8 + 27 + \dots) \\ \qquad \qquad \qquad = 2,7 + 2 \cdot 6,2 + 3 \cdot 10,3 + \dots \\ A(1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + \dots) + B(1^3 + 4^3 + 9^3 + \dots) \\ \qquad \qquad \qquad = 2,7 + 4 \cdot 6,2 + 9 \cdot 10,3 + \dots \end{array} \right\}$$

Aus diesen beiden Gleichungen:

$$91A + 441B = 395,6 \quad \text{und} \quad 441A + 2275B = 1989,2$$

folgt

$$A = 1,81388 \quad \text{und} \quad B = 0,52276;$$

also ist die gesuchte Beziehung

$$T = 1,81388 X + 0,52276 \cdot X^2. \quad (2)$$

Dieses empirische Gesetz zwischen Schußweite und Flugzeit gestattet, für die betreffenden Schußverhältnisse zu irgendeiner Entfernung die Flugzeit rechnerisch zu interpolieren. Was den mittleren Fehler einer solchen einzelnen Flugzeitermittlung anlangt, so ist dieser folgendermaßen zu erhalten: Berechnet man aus (2) zu  $X=1, 2, 3, \dots$  die Flugzeiten, so hat man:

beobachtete Flugzeiten:

2,7            6,2            10,3            15,2            21,4            30,3,

berechnete Flugzeiten:

2,33664    5,71880    10,14648    15,61968    22,13840    29,70264,

also Fehler  $f$ :

0,36336    0,48120    0,15352    0,41968    0,73840    0,59736,

Fehlerquadrat  $f^2$ :

0,13203    0,23156    0,02357    0,17613    0,54523    0,35685.

Die Summe der Fehlerquadrate  $\sum(f^2)$  wird  $= 1,46537$  und ist kleiner als bei irgendeiner anderen Bestimmung von  $A$  und  $B$  (z. B. bei der Bestimmung von (1) hatte sich  $\sum(f^2) = 4,62$  ergeben).

Wie ohne Beweis angegeben sein möge, ist der mittlere quadratische Fehler  $\mu = \sqrt{\frac{\sum(f^2)}{n-m}}$ , wo  $n$  die Zahl der Beobachtungen und  $m$  die Zahl der zu bestimmenden Koeffizienten bedeutet; also hier  $\mu = \sqrt{\frac{\sum(f^2)}{6-2}} = \sqrt{\frac{1,46537}{4}} = 0,605$ ; dieser Fehler  $\mu$  oder auch der wahrscheinliche Fehler  $w$  ist damit zu einem Minimum gemacht — wohlgernekt unter Voraussetzung der Funktionsform  $AX + BX^2$ .

**B. Zweites Verfahren.**

Die im vorhergehenden besprochene Aufgabe kann auch folgendermaßen behandelt werden:

Gesucht ist eine Funktion  $T = \varphi(X, X^2, A, B)$ . Man ermittle für die unbekannten Koeffizienten  $A$  und  $B$  zunächst Näherungswerte; diese seien bezeichnet mit  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ . Sie mögen z. B. aus den beiden ersten Beobachtungen ( $X=1$ ,  $T=2,7$  und  $X=2$ ,  $T=6,2$ ) bestimmt sein zu  $\bar{A}=2,3$  und  $\bar{B}=0,4$ .

Diese Näherungswerte werden nun verbessert durch  $\alpha$  bzw.  $\beta$ , so daß man hat:  $A = \bar{A} + \alpha$  und  $B = \bar{B} + \beta$ . Der wahre Wert von  $T$  ist folglich

$$T = \varphi(\bar{A} + \alpha, \bar{B} + \beta),$$

oder wenn man die Entwicklung nach Taylor anwendet und nach dem 3. Glied abbricht,

$$T = \varphi(\bar{A} + \alpha, \bar{B} + \beta) = \varphi(\bar{A}, \bar{B}) + \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial A} + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial B}.$$

Hier bedeutet  $\varphi(\bar{A}, \bar{B})$  den Näherungswert von  $T$ , der sich bei Verwendung von  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  ergibt und der mit  $\bar{T}$  bezeichnet sein möge. Also ist

$$T - \bar{T} = \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial A} + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial B}.$$

Aber im vorliegenden Falle ist  $\varphi = AX + BX^2$ , also  $\frac{\partial \varphi}{\partial A} = X$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial B} = X^2$ ; folglich

$$T - \bar{T} = \alpha X + \beta X^2.$$

Dem obigen zufolge liegen die nachstehenden Werte der Fehler  $T - \bar{T} = x$  der Flugzeiten zu den Schußweiten  $X$  vor:

$T - \bar{T} = x$	$X$
0	1
0	2
- 0,2	3
- 0,4	4
- 0,1	5
+ 2,1	6

Man hat also in der Gleichung  $x = \alpha X + \beta X^2$  nunmehr die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  mit der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme zu ermitteln.

Es soll sein:

$$(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1^2 - 0)^2 + (\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 2^2 - 0)^2 + (\alpha \cdot 3 + \beta \cdot 3^2 + 0,2)^2 + \dots = \text{Min.}$$

Man verfährt also zur Berechnung von  $\alpha$  und  $\beta$  ebenso, wie oben unter A. zur Berechnung von  $A$  und  $B$  verfahren wurde, und hat

$$\begin{cases} 91 \cdot \alpha + 441 \cdot \beta = 9,9, \\ 441 \cdot \alpha + 2275 \cdot \beta = 64,9. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich  $\alpha = -0,4862$  und  $\beta = +0,1228$ . Folglich sind die verbesserten Werte der Koeffizienten  $A$  und  $B$  die folgenden:

$$A = \bar{A} + \alpha = 2,3 - 0,4862 = 1,8138,$$

$$B = \bar{B} + \beta = 0,4 + 0,1228 = 0,5228.$$

Danach wird die gesuchte Beziehung zwischen Flugzeit  $T$  und Schußweite  $X$ :

$$T = 1,81 \cdot X + 0,52 \cdot X^2, \text{ wie oben.}$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich auch ohne Taylorsche Entwicklung wie folgt einsehen: Es seien Näherungswerte  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  gefunden, wozu Näherungswerte  $\bar{T}$  von  $T$  gehören, also

$$\bar{T} = \bar{A} \cdot X + \bar{B} \cdot X^2;$$

während die richtige Beziehung sein soll;

$$T = A \cdot X + B \cdot X^2.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$T - \bar{T} = (A - \bar{A}) \cdot X + (B - \bar{B}) \cdot X^2 \quad \text{oder} \quad \kappa = \alpha \cdot X + \beta \cdot X^2.$$

### C. Fall von transzendenten Gleichungen.

Das unter B. beschriebene Verfahren muß angewendet werden, wenn es sich um Gleichungen handelt, die nicht ohne Näherungsverfahren gelöst werden können.

Z. B. stelle man sich die Aufgabe, die Beziehung zwischen  $y$  und  $x$  in der Form

$$y = A \cdot x^B + C$$

zu gewinnen.

Es seien zu den Werten  $x_1, x_2, \dots$  die Werte  $y_1, y_2, \dots$  gemessen. Dann müßte man die Konstanten  $A, B, C$  aus der Bedingung

$$(A \cdot x_1^B + C - y_1)^2 + (A \cdot x_2^B + C - y_2)^2 + \dots = \text{Min.}$$

zu erhalten suchen, also aus den drei Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1^B (A \cdot x_1^B + C - y_1) + x_2^B (A \cdot x_2^B + C - y_2) + \dots = 0, \\ x_1^B \cdot \log x_1 (A \cdot x_1^B + C - y_1) + x_2^B \cdot \log x_2 (A \cdot x_2^B + C - y_2) + \dots = 0, \\ A \cdot x_1^B + C - y_1 + A \cdot x_2^B + C - y_2 + \dots = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich jedoch nur genähert auflösen.

Man sucht daher zunächst ein Tripel von Näherungswerten  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .

Dies kann etwa in der folgenden Weise geschehen: Man trägt zu den aus der Beobachtung vorliegenden Werten  $x_1, x_2, \dots$  die gemessenen Werte  $y_1, y_2, \dots$  in einem Schaubild auf und legt eine Kurve durch die erhaltenen Punkte. Alsdann mißt man etwa in den beiden ersten Punkten je das Gefälle  $p$  der Kurve (die Tangentenneigung). Da allgemein  $\frac{dy}{dx} = p = A \cdot B \cdot x^{B-1}$  sein soll, so bestehen für die beiden gemessenen Werte  $p_1$  und  $p_2$  des Kurvengefälles die Gleichungen:

$$p_1 = A \cdot B \cdot x_1^{B-1} \quad \text{und} \quad p_2 = A \cdot B \cdot x_2^{B-1}.$$

Daraus hat man  $A$  und  $B$  und aus  $y_1 = A \cdot x_1^B + C$  den Wert von  $C$ . Diese so erhaltenen Werte von  $A, B, C$  sind alsdann die Näherungswerte  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .

Zu diesen Näherungswerten berechnen sich aus der vorgelegten Gleichung  $y = A \cdot x^B + C$  die betreffenden einzelnen Näherungswerte von  $y$ , nämlich:  $\bar{y} = \bar{A} \cdot x^{\bar{B}} + \bar{C}$ .

Nunmehr werden Verbesserungen  $\alpha, \beta, \gamma$  eingeführt, so daß

$$y = \varphi(\bar{A} + \alpha, \bar{B} + \beta, \bar{C} + \gamma), \quad y - \bar{y} = \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{A}} + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{B}} + \gamma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{C}}.$$

Dabei ist hier  $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{A}} = x^{\bar{B}}$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{B}} = \bar{A} \cdot \log x \cdot x^{\bar{B}}$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{C}} = 1$ .

Folglich hängen die Fehler  $y - \bar{y}$  von  $y$  mit den Werten  $x$  durch die folgende Gleichung zusammen

$$y - \bar{y} = \alpha \cdot x^{\bar{B}} + \beta \cdot \bar{A} \cdot \log x \cdot x^{\bar{B}} + \gamma.$$

Da hier die zu bestimmenden Verbesserungen  $\alpha, \beta, \gamma$  in der 1. Potenz vorkommen, lassen sie sich nach dem Verfahren von A. berechnen.

Die genaueren Werte der Konstanten  $A, B, C$  sind alsdann

$$\bar{A} + \alpha, \quad \bar{B} + \beta, \quad \bar{C} + \gamma.$$

Unter Umständen wird mit diesen verbesserten Werten die Rechnung wiederholt.

#### D. Zweckmäßigste Verwendung der Munition bei Aufstellung von Schußtafeln.

Bei großkalibrigen Geschützen entsteht mitunter die Frage nach der zweckmäßigen Verwendung der zur Verfügung stehenden Munition. Soll z. B. eine Schußtafel erschossen werden und handelt es sich insbesondere darum, für mehrere Erhöhungswinkel die Schußweiten zu erschießen, so ist zu überlegen, ob man je nur wenige Geschosse auf möglichst viele Entfernungen oder je eine größere Anzahl von Geschossen auf wenige Entfernungen verwenden soll.

E. Vallier (vgl. Lit.-Note) schlägt vor, eine Schußtafel nicht auf möglichst vielen Entfernungen mit einer nur ganz geringen Anzahl von Schüssen zu erschießen, sondern lieber auf wenigen Entfernungen mit je einer größeren Anzahl von Schüssen. Auf Grund der Wahrscheinlichkeitslehre gelangt er im einzelnen zu den folgenden Angaben für mittlere Kaliber:

Wenn weniger als 16 Schuß zur Verfügung stehen: Schießen auf einer einzigen Entfernung, einschließlich der Messung der Anfangsgeschwindigkeit  $v$ , und des Abgangsfehlers.



Wenn 16 bis 24 Schuß verfügbar sind: auf 2 Entfernungen, samt der  $v_0$ -Messung usw.

Wenn 24 bis 40 Schuß verfügbar sind: auf 3 Entfernungen, samt der  $v_0$ -Messung usw.

Und bei großen Kalibern verringern sich die Schußzahlen auf je etwa  $\frac{1}{3}$ .

Die günstigsten Entfernungen  $X$ , auf denen dabei die Beschüsse stattfinden sollen, ergeben sich aus der folgenden Tabelle, in der  $W$  die größte überhaupt in Betracht kommende Entfernung bedeutet.

Bei der folgenden Anzahl von Beschüssen

Die zu wählenden Entfernungen  $X$

1	0 (d. h. $v_0$ -Messung)					
2	0	$0,828 \cdot W$				
3	0	$0,464 \cdot W$	$0,928 \cdot W$			
4	0	$0,281 \cdot W$	$0,679 \cdot W$	$0,960 \cdot W$		
5	0	$0,186 \cdot W$	$0,4875 \cdot W$	$0,790 \cdot W$	$0,975 \cdot W$	
6	0	$0,131 \cdot W$	$0,359 \cdot W$	$0,622 \cdot W$	$0,849 \cdot W$	$0,981 \cdot W$

Dies soll gelten, wenn die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  mit einer Genauigkeit ermittelt wird, die von der Größenordnung ist, mit der auf jeder Entfernung  $x$  die Schußweite gemessen wird.

Ist dagegen die Genauigkeit der  $v_0$ -Messung eine höhere, so sind

Bei der folgenden Anzahl von Beschüssen

Die zu wählenden Entfernungen  $X$

1	0 (d. h. $v_0$ -Messung)				
2	0	$0,894 \cdot W$			
3	0	$0,603 \cdot W$	$0,952 \cdot W$		
4	0	$0,415 \cdot W$	$0,730 \cdot W$	$0,996 \cdot W$	

Unter Umständen kann die verfügbare Munition so bemessen sein, daß man die  $v_0$ -Messung mit einem Treffpunktalagen-Beschuß auf der kleinen Entfernung  $x'$  verbinden muß. In diesem Fall ändert sich die Tabelle in die folgende um:

Bei der folgenden Anzahl von Beschüssen

Die zu wählenden Entfernungen  $x$

1	$x'$				
2	$x'$	$0,1057 \cdot x' + 0,894 \cdot W$			
3	$x'$	$0,397 \cdot x' + 0,603 \cdot W$	$0,048 \cdot x' + 0,952 \cdot W$		
4	$x'$	$0,585 \cdot x' + 0,415 \cdot W$	$0,270 \cdot x' + 0,730 \cdot W$	$0,004 \cdot x' + 0,996 \cdot W$	

Der Entwicklung vorstehender Regeln zufolge gelten diese für irgendwelche ballistische Funktionen. Sollen also z. B. für ein Infanterie-

gewehr Treffpunktlagen-Beschüsse mit lotrechten Scheiben durchgeführt werden, gilt ferner bezüglich der  $v_0$ -Messung die erstgenannte Annahme und beträgt die größte Schußweite der Schußtafel 2000 m, so wäre, wenn 6 (Wiederholungs-)Beschüsse beabsichtigt sind, die Scheibe der Reihe nach etwa in den folgenden Entfernungen aufzustellen:

0 ( $v_0$ -Messung zwischen 0 und 50 m); 260 m; 720 m; 1240 m;  
1700 m; 1960 m.

Diese Regeln von Vallier werden sich in der Praxis nicht überall anwenden lassen. Immerhin können sie für die Schießversuche, die zur Aufstellung einer Schußtafel bestimmt sind, wertvolle Anhaltspunkte liefern.

## Elfter Abschnitt.

# Über die Wirkung der Geschosse im Ziel.

## § 74. Eindringen von Infanteriegeschossen und nicht krepierenden Artilleriegeschossen in feste Körper. Berechnung der Eindringtiefe und Eindringungszeit.

Wenn das Geschöß die Luft durchdringt, erhalten die Luftteilchen Beschleunigungen; diese erzeugen Wellenbewegungen, und da Reibung erfolgt, entstehen Wirbel. Auch beim Eindringen des Geschosses in flüssige, halbflüssige und feste Körper werden Verdichtungswellen entstehen. Doch werden diese Wellen dem Geschöß im allgemeinen voraneilen, da die Geschwindigkeit, mit der sich eine Verdichtungswelle in festen und flüssigen Körpern fortpflanzt, sehr groß ist (Schallgeschwindigkeit in Luft rund 340, in Wasser rund 1440, in Stahl rund 5000 m/sec). Möglicherweise zeigt sich die Wirkung solcher Erschütterungswellen daran, daß, wenn gegen einen Steinblock oder Metallblock geschossen wird, mitunter auf der gegenüberliegenden Seite sich Stücke ablösen.

Neu kommt bei festen (und flüssigen) Körpern hinzu, daß Kohäsionskräfte zu überwinden sind. Beim Eindringen in solche Körper verliert somit das Geschöß seine Energie erstens dadurch, daß den Teilchen Beschleunigungen erteilt werden, die unter sonst gleichen Umständen um so größer sind, je leichter sich die Teilchen gegeneinander verschieben können, also je kleiner deren Reibung ist; zweitens dadurch, daß gegen die Zusammenhangskräfte des Körpers Arbeit geleistet wird. Über das Gesetz des Widerstandes  $W$ , den ein Geschöß von der Geschwindigkeit  $v$  und dem Querschnitt  $R^2 \pi$  in solchen Körpern erleidet, sind auf Grund derartiger Überlegungen verschiedene Annahmen gemacht worden:

Euler wählt  $W = R^2 \pi \cdot a$ ,

Poncelet  $W = R^2 \pi (a + b v^2)$ ,

Résal  $W = R^2 \pi (a v + b v^2)$ ,

T. Levi-Civita nimmt für den Fall einer Stauchung des Geschosses  $W = R^2 \pi \cdot (a + bv^2)(1 + kv_0)$ . Dabei bedeutet  $v_0$  die Auftreffgeschwindigkeit des Geschosses,  $a$  und  $b$  sind Konstanten, die von der Beschaffenheit des Materials abhängen, in welches das Geschöß eindringt;  $k$  ist eine empirische Konstante.

Mit der Annahme von Poncelet vollzieht sich die Berechnung für das Eindringen des Geschosses in einen festen Körper folgendermaßen:

Auf dem meist kurzen Weg, den das Geschöß in dem Körper zurücklegt, wird die Flugbahn als geradlinig vorausgesetzt, indem man von dem Einfluß der Schwere absieht. Der Widerstand  $W = R^2 \pi \cdot i (a + bv^2)$ , wo  $i$  einen Koeffizienten der Geschößform bedeuten soll, ist alsdann die einzige Kraft, die in Betracht kommt.  $t$  Sekunden nach dem Auftreffen auf dem Ziel habe das Geschöß  $x$  Meter in dem Körper zurückgelegt. Seine Geschwindigkeit, die in dem Auftreffpunkt  $v_0$  war, sei jetzt  $v$ ;  $\frac{P}{g}$  sei die Geschößmasse, dann ist

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{P}{g} \frac{dv}{dx} \cdot v = -R^2 \pi \cdot i \cdot (a + bv^2).$$

Durch Integration folgt, da für  $t = 0$   $x = 0$  und  $v = v_0$  ist,

$$x = \frac{P}{2bgR^2\pi i} \cdot \log \text{nat} \frac{a + bv_0^2}{a + bv^2}, \quad (1)$$

$$t = \frac{P}{R^2 \pi \cdot i \sqrt{ab} \cdot g} \left\{ \arctg \left( v_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) - \arctg \left( v \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right\}. \quad (2)$$

Falls es sich um ein Durchschießen des Körpers von der Dicke  $x$  Meter in der Richtung des Schusses handelt, erhält man aus Gleichung (1) die Austrittsgeschwindigkeit  $v$  und aus Gleichung (2) die Zeit  $t$ , während der das Geschöß in dem Körper verweilt.

Falls dagegen der Körper in der Schußrichtung beliebig ausgedehnt ist, wird nach einer gewissen Zeit  $T$  und in einer gewissen gesamten Eindringungstiefe  $X$  das Geschöß zur Ruhe kommen ( $v = 0$ ). Es wird

Gesamte Eindringungstiefe

$$X = \frac{P}{2bgR^2\pi i} \log \text{nat} \left( 1 + \frac{b}{a} v_0^2 \right) \quad (3)$$

Gesamte Eindringungszeit

$$T = \frac{P}{gR^2\pi \cdot i \sqrt{ab}} \cdot \arctg \left( v_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \quad (4)$$

$v_0$  = Auftreffgeschwindigkeit in m/sec.

$P$  = Geschößgewicht in kg,

$R^2 \pi$  = Geschößquerschnitt in qm,

$g = 9,81$ .

Über  $i$  s. w. u.

Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  haben nach den Schießversuchen von Didion-Morin-Piobert (1839 bis 1840) folgende Werte:

Kalkstein	$a = 12\,000\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 15$
Gutes Mauerwerk	$a = 5\,520\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 15$
Mittleres Mauerwerk	$a = 4\,400\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 15$
Ziegelmauerwerk	$a = 3\,160\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 15$
Sand mit Kieselsteinen	$a = 435\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 200$
Tonige Erde, halb Kieselsteine, halb Sand	$a = 1\,045\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 35$
Leichte Erde mit Gras bewachsen	$a = 700\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 60$
Aufgeworfene Erde, halb Ton, halb Sand	$a = 461\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 60$
Feuchter Ton	$a = 266\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 80$
Eichen-, Buchen-, Eschenholz	$a = 2\,085\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 20$
Ulmenholz	$a = 1\,600\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 20$
Tannen- und Birkenholz	$a = 1\,160\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 20$
Pappelholz	$a = 1\,090\,000$	$10^6 \cdot \frac{b}{a} = 20$

Nach E. Vallier (1913) ist für Erde, Holz und Mauerwerk  $10^6 \cdot \frac{b}{a} = 50$ , und  $b$  wird empirisch bestimmt, so daß man statt (3) die folgende Gleichung für die Eindringungstiefe  $X$  hat:

$$X = \lambda \cdot \frac{P}{R^2 \pi} \cdot \log \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_0^4}{10^4} \right), \quad (5)$$

dabei  $\lambda$  abhängig von der Natur des Hindernisses, in das das Geschöß eindringt, und aus Versuchen zu ermitteln.

Pétry gibt 1910 für die Eindringungstiefe  $X(m)$  eines Geschosses von  $P$  (kg) Gewicht und  $2R$  (cm) Kaliber folgenden Ausdruck an:

$$X = \frac{P}{(2R)^2} \cdot x \cdot f(v_0). \quad (6)$$

Dabei hängt  $x$  allein von der Beschaffenheit des Materials ab, in das das Geschöß eindringt.  $x$  ist für Beton-Mauerwerk 0,64; für gutes Stein-Mauerwerk 0,94; für gutes Ziegel-Mauerwerk 1,63; für

sandige Erde 2,94; für gewachsenen Erdboden 3,86; für toniges Erdreich 5,87; und  $f(v_0)$  ist eine Funktion der Auftreffgeschwindigkeit  $v_0$  (m/sec).

für $v_0 =$	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
ist $f(v_0) =$	0,83	0,72	1,21	1,76	2,36	2,97	3,58	4,18	4,77	5,34	5,89	6,41

für $v_0 =$	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500
ist $f(v_0) =$	6,92	7,40	7,87	8,31	8,74	9,15	9,54	9,92	10,29	10,64	10,98	11,30

Ein Abspringen und Weitergehen des Geschosses, das in schiefer Richtung auf eine Erdoberfläche bzw. eine Mauerfläche auftrifft, soll nach Pétry dann stattfinden, wenn der Winkel zwischen der Auftreffrichtung und der Normalen zur Auftrefffläche größer ist als  $75^\circ$  bzw. als  $60^\circ$ .

Mitunter zeigt sich die Notwendigkeit, aus dem Eindringen einer Bleikugel (Schrotkugel, Schrapnellkugel od. dgl.) in Holz einen rohen Schätzwert für die Auftreffgeschwindigkeit der Kugel zu gewinnen. Hierfür möge eine empirische Formel von Journée angeführt werden: Die Eindringungstiefe  $X$  (cm) einer Bleikugel von dem Durchmesser  $d$  (cm) in Fichtenholz ist bei einer Auftreffgeschwindigkeit  $v_0$  m/sec gegeben durch:

$$X = 0,000093 \cdot d \cdot v_0^2. \quad (7)$$

Beispiel.

Eine Schrapnellkugel von 10 g Gewicht (Durchmesser 1,22 cm) soll eine solche Auftreffgeschwindigkeit haben, daß ihre Wucht genügt, um einen Mann außer Gefecht zu setzen (s. w. u. 8 mkg). Die Auftreffgeschwindigkeit soll in roher Weise durch Einschießen in Fichtenholz ermittelt werden. Wie tief muß die Kugel eindringen? (H. Rohne.)

Aus  $8 = \frac{10 \cdot v_0^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 1000}$  erhält man  $v_0 = 125$  m/sec. Damit wird die Eindringungstiefe

$$X = 0,000093 \cdot 1,22 \cdot 125^2 = 1,8 \text{ cm.}$$

Die obige Ponceletsche Theorie des Eindringens — die seit Poncelet und Didion nicht in nennenswerter Weise gefördert worden ist — beruht auf einem Widerstandsgesetz, das, ebenso wie dasjenige von Euler und Résal, lediglich eine Annahme bedeutet. Man darf daher nicht erwarten, mit den Formeln (3) und (4) genau zutreffende Werte für die Eindringungstiefe, bzw. die Eindringungszeit zu erhalten. Dazu kommt, daß die in den Tabellen aufgeführten Materialien, die durch die konstanten Werte  $a$  und  $b$  gekennzeichnet sein sollen, durch die linksstehenden Bezeichnungen „Gutes Mauer-

werk“ usw. völlig ungenügend definiert sind. Endlich beruhen diese Zahlenwerte auf Schießversuchen, die der Hauptsache nach mit Kugeln und mit kleineren Geschwindigkeiten ausgeführt sind, als sie jetzt gebraucht werden.

Der Koeffizient  $i$  soll für kugelförmige Geschosse gleich 1, für Langgeschosse gleich  $\frac{2}{3}$  sein. Wo es möglich ist, wird man vorziehen, in dem Widerstandsgesetz  $W = R^2 \pi \cdot a \cdot i \left(1 + \frac{b}{a} v^2\right)$  die Konstanten  $a \cdot i$  und  $\frac{b}{a}$  empirisch zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird man für die betreffende Geschosart und für das Material, um das es sich handelt, die Eindringungstiefen  $X'$  und  $X''$  zu zwei verschiedenen Auftreffgeschwindigkeiten  $v'$  und  $v_0'$  beobachten. Man hat dann auf Grund von Gleichung (3) zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten  $b \cdot i$  und  $\frac{b}{a}$ , folglich kennt man auch  $a \cdot i$  und  $\frac{b}{a}$ .

## § 75. Einzelne Erscheinungen. Kritische Bemerkungen.

### A. Tiefstes Eindringen des Geschosses in Erde usw.

Die von Levi-Civita vorgeschlagene Abänderung des Widerstandsgesetzes bezieht sich auf die bekannte Erscheinung, daß die neueren Infanteriegeschosse meist erst in größerer Entfernung von der Mündung ab am tiefsten in Sand, Erde usw. eindringen. Z. B. wird für das französische Infanteriegeschos folgende Tabelle aus dem Jahre 1900 angegeben:

Auf die Entfernung	Eindringungstiefe des Geschosses in:			
	Sand	Gartenerde	Tannenholz	Eichenholz
10 m	11 cm	25 cm	90 cm	20 cm
40 "	18 "	39 "	82 "	19 "
100 "	32 "	62 "	70 "	18 "
200 "	45 "	75 "	60 "	18 "
300 "	46 "	77 "	56 "	17 "
400 "	44 "	73 "	53 "	16 "
500 "	40 "	67 "	50 "	15 "
600 "	38 "	63 "	49 "	15 "

Man pflegt diese Erscheinung mit der Stauchung des Geschosses zu erklären: Wenn die Geschwindigkeit des Geschosses sehr groß ist, staucht sich das Geschos derart, daß sein Querschnitt erheblich größer wird, als der normale; der Einfluß der Änderung von  $R^2 \pi$  überwiegt dann denjenigen von  $a + b v^2$ ; infolge davon wird der Widerstand ein so erheblicher, daß die Eindringungstiefe kleiner

ausfällt, als bei kleinerer Auftreffgeschwindigkeit. Diesem Umstand soll dadurch Rechnung getragen werden, daß  $R^2 \pi$  mit  $1 + k \cdot v_0$  multipliziert wird.  $k$  müßte aus einer Beobachtung ermittelt werden. (Es ist einleuchtend, daß damit nichts über den wahren Charakter der Widerstandsfunktion ausgesagt ist, sondern daß ein solches Verfahren höchstens dazu dienen kann, Beobachtungen einer gewissen beschränkten Gruppe mathematisch zusammenzufassen.)

Auftreffgeschwindigkeit (m/sec)	Zugehörige Schußweite (m)	Eindringungstiefe (cm)	Einschießen in Sand Deformation des Geschosses	Eindringungstiefe (cm)	Einschießen in Buchenholz Deformation des Geschosses
98	2500	19,5	Keine Deformation; (nur Oberfläche rau gerieben).	4	Keine Deformation.
330	874	24,7	Ebenso.	12,7	Das Geschöß ist zusammenge- drückt, der Querschnitt oval ge- worden; dabei die große Achse des Ovals in der Richtung der Holzfasern.
473	560	28,6	Ebenso.	26,5	Dasselbe, gesteigert.
579	398	31,4	Geschöß zusammen- gedrückt.	41,6	Dasselbe, noch mehr.
710	218	22,4	Ein Teil des Bleikerns nach hinten heraus- gedrückt.	65	Ebenso.
735	186	19,7	Mantel ganz zerrissen.	70,7	Ebenso.
762	153	18,2	Dasselbe im stärkeren Maße; das Geschöß hängt noch zusammen.	76,7	Der Bleikern beginnt, aus dem Mantel nach hinten herauszudringen.
788	121	17	Ebenso: Geschößform nicht mehr erkennbar.	40,7	Geschöß stark defor- miert; Geschößmantel zerrissen; das Blei zum Teil ausgetreten.
815	90	15,8	Getrennte Bruch- stücke des Geschosses.	34,7	Dasselbe, in gesteiger- tem Maße; Geschöß verbogen; Spitze un- versehrt.
870	2	13,8	Ganz kleine Bruch- stücke des Geschosses übrig.	29,7	Größte Deformation; Geschöß noch zusam- menhängend; Spitze fast unversehrt.

Die erste Deformation beobachtet bei der  
Auftreffgeschwindigkeit 559 m/sec.

Maximale Eindringungstiefe 83,0 cm:

(Schußweite 314 m.)

Maximale Eindringungstiefe  
76,7 cm (Schußweite 153 m).

Daß die erwähnte eigentümliche Erscheinung mit dem Umstand zusammenhängt, daß ein Teil der Energie des Geschosses auf dessen Deformation verwendet wird, ist durch die systematischen Versuche sehr wahrscheinlich gemacht, die auf Veranlassung des Verfassers Oberleutnant Wernicke im ballistischen Laboratorium, sowie in der Versuchsanstalt Halensee-Berlin angestellt hat und deren Ergebnisse durch die vorstehende Tabelle auszugsweise dargestellt sind. Es wurde mit dem normalen *S*-Geschoß in Buchenholz und in Sand geschossen. Die Tabelle enthält: Die Auftreffgeschwindigkeiten des Geschosses; die Gesamtschußweiten, bei denen man mit der normalen Ladung die Auftreffgeschwindigkeiten als Endgeschwindigkeiten hat; die ausgeglichene Reihe der Eindringungstiefen und endlich Bemerkungen über die Deformation des aufgefundenen Geschosses. (Die kleineren Auftreffgeschwindigkeiten wurden dabei durch Verkürzung der normalen Ladung erzeugt.)

### B. Vorschlag von N. v. Wuich.

N. v. Wuich schlägt folgendes indirekte Verfahren vor, um zu dem Gesetz des Eindringungswiderstandes für ein bestimmtes Material zu gelangen: Man beobachtet die Eindringungstiefen  $X, X', X'', \dots$ , die mit den Auftreffgeschwindigkeiten  $v_0, v_0', v_0'', \dots$  erhalten werden. Dann wird angenommen, daß bei der größten Eindringungstiefe  $X$  die Geschwindigkeit des Geschosses  $v_0'$  betrug in der Entfernung  $X'$  vor dem Endpunkt, in dem das Geschoß im Innern des Materials zur Ruhe kommt. Ebenso wird angenommen, daß die Geschwindigkeit  $v_0''$  betrug in der Entfernung  $X''$  usw. Auf diese Weise erhält man die Geschwindigkeit  $v$  in Funktion des Wegs  $x$ , den das Geschoß in dem betreffenden Material zurücklegt und daraus den Widerstand  $W = \frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{P}{g} \cdot v \cdot \frac{dv}{dx}$ . Indessen ist die Voraussetzung für dieses Verfahren, daß die Bewegung des Geschosses im Innern des Materials an jeder Stelle unabhängig sei von denjenigen Zuständen des Materials und des Geschosses, die an den unmittelbar vorhergehenden Stellen geherrscht haben. Wegen der möglichen Stauchung und sonstigen Deformation des Geschosses, und wegen des Trägheitswiderstandes derjenigen Materialteile, die in jedem Augenblick unmittelbar hinter dem Geschoß und seitlich von ihm liegen, dürfte diese Voraussetzung kaum allgemein zutreffen.

### C. Die erzeugte Höhlung.

Einen mathematischen Ausdruck für die Gestalt des als Umdrehungskörper angenommenen Trichters, der vom Geschoß bei seinem Eindringen gebildet wird, suchte Poncelet auf folgende Weise zu gewinnen. Er nahm an, es sei das Volumen  $\int_0^x y^2 \pi \cdot dx$  der bis zu irgendeiner variablen Eindringungstiefe  $x$  gebildeten Höhlung proportional dem bis dahin eingetretenen Verlust  $\frac{P}{2g} \cdot (v_0^2 - v^2)$  an



lebendiger Kraft des Geschosses. Dabei bedeutet  $y$  die Ordinate der Kontur der erzeugten Höhlung für den jeweiligen Weg  $x$  des Geschosses von der Auftreffstelle ab. Dies gibt  $\frac{P}{g} \cdot v dv = -\lambda \pi y^2 dx$ . Damit erhält man eine Beziehung zwischen  $x$ ,  $y$  und  $v$  und wegen (1) in § 74 eine solche zwischen  $y$  und  $x$ , d. h. die Gleichung für die Meridiankurve des Trichters. Die mit der erwähnten Annahme errechneten Ergebnisse stimmen jedoch wenig mit der Erfahrung überein. Dies darf nicht wundernehmen, wenn man bedenkt, daß die Teilchen des Materials keineswegs nur senkrecht zur Schußrichtung, sondern auch nach dem Einschuß zu vom Geschöß in Bewegung gesetzt werden und daß ein größerer oder kleinerer Teil der lebendigen Kraft des Geschosses auch auf die Überwindung von Kohäsionskräften verwendet wird, wobei dieser prozentuale Anteil sehr veränderlich sein wird.

#### D. Panzerplatten.

Bezüglich der Dicke von Panzerplatten, die von einem gegebenen Geschöß bei gegebener Geschwindigkeit noch durchschlagen werden, sind zahlreiche, halb empirische, halb theoretische Formeln aufgestellt worden. G. Ronca zählt nicht weniger als 36 solcher Panzerformeln auf und fügt selbst eine neue hinzu. Hier sei nur eine von der Firma Krupp 1880 aufgestellte und nach den verschiedensten Seiten geprüfte Formel und außerdem eine in Frankreich benützte Formel erwähnt:

Es bedeute  $z$  die lebendige Kraft des Geschosses in mkg pro 1 qcm des Geschößquerschnittes, also  $\frac{Pv^2}{2g} : R^2 \pi$ ; ebenso bedeute  $e$  diese lebendige Kraft pro 1 ccm des Volumens einer Kugel vom Geschößkaliber, also  $\frac{Pv^2}{2g} : \frac{4}{3} R^3 \pi$ , so muß sein

$$z = 100 \cdot S \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{D}} \quad \text{oder} \quad e = 150 \cdot \left(\frac{S}{D}\right)^{\frac{1}{3}}$$

( $S$  Plattendicke in cm,  $D = 2R$  Kaliber in cm,  $P$  Geschößgewicht in kg,  $v$  Auftreffgeschwindigkeit in m/sec,  $g = 9,81$ ).

Diese Formel bezieht sich auf senkrechtcs Auftreffen und auf Kruppsche schmiedeeiserne Panzerplatten ohne Hinterlager. Trifft das Geschöß unter einem Winkel  $\alpha$  zur Platte auf, so soll

$$z = \frac{100}{\sin^2 \alpha} \cdot S \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{D}}$$

genommen werden. Im übrigen ist zu empfehlen, womöglich die Zahl 100 durch einen Koeffizienten  $\lambda$  zu ersetzen, der aus einer Beobachtung mit ähnlichem Geschöß und ähnlicher Platte gewonnen wird,

da die Durchschlagsdicke von dem Material und der Bearbeitung der Platte und des Geschosses und von dessen Spitzenform (z. B. Kappengeschosse) abhängt.

Beispiel:

Kaliber  $D = 2 R = 26$  cm, Plattendicke  $S = 38$  cm, Geschößgewicht  $P = 205$  kg. Man erhält  $v = 468$  m/sec als notwendige Auftreffgeschwindigkeit.

Nach Jacob de Marre (vgl. Lit.-Note) wird eine Panzerplatte von der Dicke  $S$  (dm) bei dem senkrechten Auftreffen eines Geschosses von  $P$  kg Gewicht und  $2 R$  dm Kaliber durchschossen, wenn die Auftreffgeschwindigkeit  $v$  (m/sec) ist:

$$v = A \cdot \frac{(2 R)^{0,75}}{P^{0,5}} \cdot S^{0,7};$$

wenn dagegen der Winkel zwischen der Auftreffrichtung und der Normalen zur Auftrefffläche nicht  $0^\circ$ , sondern  $\alpha^\circ$  ist, soll  $S$  multipliziert werden mit

$$\left(\cos \frac{3}{2} \alpha\right)^{1.45}.$$

Für gewöhnlichen Stahl ist nach Jacob de Marre  $A = 1,530$ . Für gehärteten Stahl ist

$$v = \sqrt{1,885 - 0,0014 \cdot S} \cdot \frac{1,530 \cdot (2 R)^{0,75}}{P^{0,5}} \cdot S^{0,7}.$$

Einige Einzelheiten bezüglich des Schießens gegen Panzerplatten seien noch kurz erwähnt. Häufig werden Panzergranaten mit einer Kappe aus Schmiedeeisen oder aus weichem Stahl versehen (Makarow, Rußland); sie dringen dann tiefer in den Panzer ein, als ohne die Kappe, und zwar tiefer im Verhältnis 2450:1900 (nach Pétry). Diese Erscheinung wird meist damit erklärt, daß das Kappenmaterial gewissermaßen als Schmiermittel diene. Wahrscheinlicher ist es, daß beim Eindringen die Granate durch die sich erweiternde Kappe hindurchgleitet und daß diese dabei als ein die Festigkeit der Geschößspitze erhöhender Gürtel dient; das Zersplittern der Geschößspitze wird durch die Umhüllung erschwert. Genauen Aufschluß könnte wohl die elektrische Momentphotographie geben. Eine Theorie der Wirkung von Kappengeschossen hat z. B. A. Mimey gegeben (vgl. Lit.-Note). Er behandelt bei diesem Anlaß allgemein theoretisch die durch Stoß erzeugten Deformationen an festen Körpern.

Schießt man mit einem modernen Stahlmantelgeschöß gegen eine Platte aus weichem Stahl, so kann man folgende Erscheinung wahrnehmen: Der Stahlmantel reißt an der Spitze auf; der Bleikern, der bei weitem den größten Teil der Geschößmasse ausmacht, dringt vor und erzeugt eine Höhlung in der Platte; dabei bleibt der Mantel mehr und mehr zurück und stülpt sich durch die Reibung an den Wänden des Schußlochs vollständig um (vgl. Lit.-Note, Polte).

Wird dagegen mit einem neueren Stahlmantelgeschöß gegen eine genügend kräftige gehärtete Stahlplatte geschossen, so zerstäubt das Geschöß an der Platte, ohne einzudringen. Die Teile des Geschosses fliegen dabei mit bedeutender Geschwindigkeit, und zwar zum größten Teil in der Ebene der Platte seitlich weg; nahe Holzwände werden durch die Geschößsplitter zersägt; nur wenige Stücke des Geschosses gehen in der Schußlinie zurück. Man sollte erwarten, daß die meisten Geschößsplitter zurückspringen. Daß dies nicht der Fall ist, dürfte sich, da die Erscheinung auch ohne Geschößrotation auftritt, durch den Trägheitswiderstand des Geschößmantels und der hinteren Geschößhälfte einfach erklären.

### E. Größe der notwendigen Geschößenergie.

Die Angaben über die Größe der Geschößenergie, die erforderlich ist, um einen Mann bzw. ein Pferd außer Gefecht zu setzen (nach Mitteilungen der französischen Artillerie 4 mkg für einen Mann, 19 mkg für ein Pferd, nach deutschen Mitteilungen 8 mkg für einen Mann), treffen nur unter sehr beschränkenden Voraussetzungen zu. Denn diese Energie hängt nicht nur vom Kaliber des Geschosses, sondern auch von der Stelle des Körpers ab, an der der Einschlag erfolgt (und, bei Menschen, von der Art der Bekleidung).

Neuere Versuchsergebnisse für Kaliber zwischen 6 und 11 mm gibt J. Pangher in folgender Zusammenfassung: Unterhalb eines gewissen Minimums an lebendiger Kraft des Geschosses auf die Querschnittflächeneinheit erhält man bloße Kontusionen; dieses Minimum ist 2 mkg auf 1 qcm für den Menschen und etwa 10 mkg/qcm für Pferde. Die Tiefe der Wunden in Weichteilen ist proportional der lebendigen Kraft auf 1 qcm Querschnitt. Die zerstörende Wirkung der Geschosse in der Gegend von Knochen ist von der Gesamtenergie abhängig: Es ist eine Auftreffenergie nötig von mindestens 5 mkg, um Menschenknochen anzubrechen, von 16 mkg, um sie sicher zu zertrümmern (gültig für den nackten Menschenkörper); ferner von 17 mkg, um Pferdeknochen anzubrechen, und von 35 mkg, um Pferdeknochen sicher zu zertümmern.

### F. Die erzeugte Wärme.

Wenn ein Geschöß in einen Zielkörper eindringt und in diesem verbleibt, so ist die gesamte erzeugte Wärme nicht unter allen Umständen gleich der Auftreffenergie des Geschosses in Kalorien; denn häufig gehen zahlreiche Massenteile des Geschosses und des Zielkörpers aus dem Einschußloch nach rückwärts und seitlich; d. h. ein Teil der Energie findet sich außerhalb vor. Aber auch wo dies nicht der Fall ist, ist die Wärme, die beim Eindringen eines Geschosses von  $P$  kg Gewicht und der Auftreffgeschwindigkeit  $v_0$  m/sec im ganzen erzeugt wird, nur dann gleich der ganzen in Kalorien aus-

gedrückten Energie  $\frac{P v_0^2}{2 g \cdot 427}$  Cal, wenn der Körper nach wie vor ruht. Geht dagegen der Körper mit dem Geschosß vereinigt weiter, so wird nur die Wärmemenge  $\frac{P v^2}{2 g \cdot 727} \cdot \frac{1}{1 + \frac{P}{P_1}}$  erzeugt, dabei  $P_1$  das Gewicht des Körpers, in den das Geschosß eingedrungen ist. Denn die gemeinschaftliche Geschwindigkeit ist  $u = v \cdot \frac{P}{P + P_1}$ . Die lebendige Kraft war unmittelbar vor dem Eindringen  $\frac{P \cdot v^2}{2 g}$ , nachher ist sie  $\frac{P + P_1}{2 g} \cdot u^2$ , die Differenz ist die erzeugte Wärmemenge in mkg.

### G. Trägheitswiderstand.

Ein Geschosß von z. B. 14,7 g Gewicht und 0,79 cm Kaliber hat bei 444 m/sec Geschwindigkeit eine lebendige Kraft von 145 mkg. Damit kann also ein Widerstand von durchschnittlich 145 kg auf der Länge von 1 m oder ein solcher von 1450 kg auf 10 cm oder von 20 700 kg auf 0,7 cm überwunden werden. Nun wird ein solches Geschosß (nach Willes Waffenlehre 1905 I, S. 215) eine Schweißeisenplatte von 0,7 cm noch durchschlagen. Rechnet man nach den Grundsätzen der Festigkeitslehre, so ist zum Ausstanzen eines Loches von 0,79 cm Durchmesser und von 0,7 cm Tiefe eine Kraft von

$$0,79 \pi \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 3500 = \text{etwa } 5000 \text{ kg}$$

erforderlich, wobei die Festigkeit in der Längsrichtung der Platte zu 3500 kg/qcm angenommen ist. Daraus folgt, daß solche Festigkeitsberechnungen, angewendet auf das Durchschießen von festen Körpern, zu völlig unrichtigen Ergebnissen führen können.

Die Übertragung der Verhältnisse der statischen Festigkeitslehre auf das Durchschießen von Platten, Lamellen und Drähten ist aus folgenden Gründen in der erwähnten Weise nicht ohne weiteres zugänglich: Die statische Festigkeitslehre setzt voraus, daß der stanzende Körper keine bleibende Deformation erleidet, und daß keine bedeutenden Geschwindigkeiten auftreten. Aber bei Durchschießungen deformiert sich häufig das Geschosß selbst bedeutend. Dazu kommt zweitens folgendes hinzu: Wenn z. B. ein an beiden Enden eingespannter lotrechter Kupferdraht von 15 cm Länge und 0,5 cm Durchmesser in der Mitte gefaßt und durch langsam gesteigerten hydraulischen Druck oder durch Gewichtsdruck zerrissen wird, so wird sich dabei der Draht zunächst bis zu einem Maximalwert der Spannung dehnen. Ist dieser Wert erreicht, so nimmt die Spannung rasch ab und der Draht zerreißt schließlich. In der ersten Periode

dieses Vorganges wird Dehnungsarbeit, in der zweiten Zerreißungsarbeit geleistet, eine merkliche lebendige Kraft des Drahtes tritt nicht auf. Wird dagegen der Draht durch ein neueres Infanteriegeschosß durchschossen und verfolgt man den Durchschießungsvorgang mit elektrischer Momentphotographie, so ist eine Dehnung des Drahtes nicht wahrnehmbar. Man erhält den Eindruck, als ob der Draht in dem Moment zerreißen würde, in dem er von der Geschosßspitze berührt wird. Hat sich das Geschosß um 1 bis 2 Geschosßlängen vom Drahte entfernt, so zeigen sich die beiden Stücke des nun durchschossenen Drahtes dicht an der Auftreffstelle nach oben und unten etwas aufgeringelt, der übrige Teil des Drahtes ist aber wegen des Beharrungsvermögens noch in Ruhe, erst weit später zeigen sich die beiden Drahtstücke ihrer ganzen Länge nach verbogen. In dem Falle der Durchschießung ist somit die Dehnungsarbeit vermutlich sehr klein, es kommt wesentlich nur die Zerreißungsarbeit in Frage, aber gleichzeitig treten erhebliche lebendige Kräfte und folglich Trägheitswiderstände auf. Da nämlich das Aufringeln der Drahtstücke von der Zerreißungsstelle aus nach oben und unten in sehr kurzer Zeit vor sich geht und nachher auch die übrigen Teile der Drahtstücke in die Bewegung mit hineingezogen werden, so wird im Vergleich zu der kleinen Masse des Geschosses einer nicht unbeträchtlichen Masse des Drahtes in kurzer Zeit eine Geschwindigkeit erteilt. Die betreffenden Beschleunigungen und folglich Trägheitswiderstände, überhaupt die Energieanteile des von einem Geschosse getroffenen festen Körpers scheinen bei Durchschießungen von wesentlicher Bedeutung zu sein, während beim langsamen Durchstanzen fast nur die Festigkeit des Materials in Betracht kommt.

Was die Rückwirkung auf das Geschosß selbst betrifft, so wird in manchen Fällen das Geschosß zertrümmert und bleibt ebenso in manchen Fällen unversehrt, wo man nach dem gewöhnlichen mechanischen Gefühl, das an kleine Körpergeschwindigkeiten gewöhnt ist, beide Male das Gegenteil erwartet. So wird ein Stahlmantelgeschosß von z. B. 10 g Gewicht und 900 m/sec Auftreffgeschwindigkeit beim Einschießen in eine große Wassermasse zerdrückt, ja häufig vollständig zerrissen. Andererseits läßt sich bekanntlich eine Stearinkerze durch ein dünnes Holzbrett schießen, wobei nachher ziemlich große Stücke der Kerze unversehrt aufgefunden werden. Ein Stab aus weichem Holz kann durch ein Brett aus härterem Holz hindurchgeschossen werden, ohne eine erhebliche Verbiegung oder Zerdrückung zu erleiden.

Auch hier spielt die Zeit, in der der Vorgang des Durchschießens bzw. des Eindringens stattfindet, die größte Rolle. Im Falle des Holz-

stabes fehlt die zum Verbiegen und Zerdrücken nötige Zeit. Ganz allgemein sind die durch gleichgroße Kräfte bewirkten Deformationen von festen Körpern um so geringer, je kürzere Zeit die Kräfte auf den Körper wirken. Eine Eisdecke, die durch den ruhenden Gewichtsdruck eines Menschen gerade noch zertrümmert würde, hält stand, wenn der Schlittschuhläufer rasch darüber hinwegfährt. Die Wandung einer Schußwaffe scheint einen größeren Gasdruck zu ertragen (ohne sich bleibend zu deformieren), als die Berechnung mittels der statischen Festigkeitslehre erwarten läßt. Der Kupferzylinder eines Stauchapparats wird beim Schuß unter Umständen weniger stark zusammengepreßt, als dies durch den gleichgroßen Druck in der Hebelpresse der Fall ist usw.

Trifft der Holzstab das Brett, so entsteht am Vorderende ein Druck und damit eine Verzögerung. Dieser Druckunterschied und damit diese Verzögerung schreitet mit großer Geschwindigkeit durch den Holzstab nach hinten fort, nämlich mit der Geschwindigkeit der Longitudinalschallwellen im Holzstab. Ehe nun sehr große Druckunterschiede und folglich sehr große relative Verzögerungen innerhalb des Holzstabes sich bilden können, ist das Brett durchschossen und eine Veranlassung zum Zerdrücken und ebenso zum Verbiegen des Stabes liegt dann nicht mehr vor.

Wird aus einem neueren Infanteriegewehr gegen die Mitte einer an zwei Fäden aufgehängten großen Glasplatte senkrecht geschossen, so bildet sich nur ein scharfkantiges Loch in der Glasplatte, von einem Durchmesser ungefähr gleich dem Kaliber des Geschosses. Die Glasplatte selbst bewegt sich kaum von der Stelle, das Geschosß fliegt mit anscheinend wenig verminderter Geschwindigkeit weiter (vgl. Lit.-Note). Das Maximum der Widerstandskraft, die auf das Geschosß wirkt, ist hier zwar bedeutend, allein das Zeitintegral dieser Kraft ist von sehr geringem Betrag. Von der Auftreffstelle aus geht dabei eine transversale Verbiegung der Glasplatte nach allen Richtungen in der Ebene der Platte weiter. Man erkennt diese beginnende Verbiegung durch das Hilfsmittel der elektrischen Momentphotographie daran, daß diese Verbiegungen auf der Ausschußseite eine Verdichtung und auf der Einschußseite eine Verdünnung der zunächstliegenden Luftschichten bewirken. Diese beiden Luftwellen sind auf eine kurze Strecke hin von der Auftreffstelle aus wahrzunehmen. Allein ehe eine bedeutende Verbiegung sich bilden und entlang der ganzen Glasplatte sich ausbreiten kann, ist die Glasplatte schon durchschossen.

Weit größer ist die Zeit, während der ein Geschosß in eine große Wassermasse eindringt. Da zugleich die Widerstandskraft der Wassermasse ungefähr proportional dem Quadrat der Geschwindig-

keit des Geschosses ist, läßt sich das Zerdrücken eines Stahlmantelgeschosses durch das Wasser wohl verstehen. Ein vollkommen zylindrisches Geschöß von Schweißeisen mit 1 qcm Querschnitt und z. B. 5 cm Länge bewege sich in der Richtung seiner Längsachse mit 800 m/sec Geschwindigkeit und treffe senkrecht auf eine große Wassermasse auf. Der dynamische Wasserwiderstand wird in der Technik  $= \frac{0,7 \cdot F \cdot \gamma \cdot v^2}{9,81}$  genommen ( $F$  = Querschnitt des Körpers in qm,  $v$  = Geschwindigkeit in m/sec,  $\gamma$  ist das Gewicht eines cbm Wassers in kg). Angenommen, dieser Ausdruck sei auch hier anzuwenden, so ergibt sich ein Widerstand auf das Geschöß von etwa 4500 kg. Die Druckspannung im vorderen Ende des Geschosses ist somit ebenfalls etwa 4500 kg/qcm. (Genau wird dieser Wert keinesfalls sein, aber die Größenordnung dürfte wenigstens zutreffen.) Nun beträgt die Quetschgrenze für Schweißeisen 2200 bis 2800 kg/qcm; also kann das Geschöß zertrümmert werden, da in diesem Fall die Zeit hierzu ausreicht.

Die letztgenannten Erscheinungen: Bewegung einer Stearinkerze gegenüber einem ruhenden Brett oder die Relativbewegung einer Wassermasse gegenüber einem Geschöß usw., gehören zu der Klasse von Bewegungsvorgängen, bei denen ein weicher Körper, wenn er rasch bewegt ist, härter erscheint, als wenn er ruht oder mit geringer Geschwindigkeit sich bewegt, (durch eine rasch rotierende Papierscheibe läßt sich Metall polieren; ein Luftstrahl von großer Geschwindigkeit fühlt sich wie ein fester Körper an usw.). Durchweg spielt hier der Trägheitswiderstand eine hervorragende Rolle.

## § 76. Über die Explosionswirkung von Sprenggeschossen der Artillerie.

### A. Kegelwinkel von Schrapnells und Granaten, die in der Luft krepieren.

Die nach der Explosion wegfliegenden Füllkugeln und Sprengstücke des Schrapnells, bzw. die Sprengstücke der Granaten bilden eine Garbe, deren Schwerpunkt — abgesehen von den veränderten Luftwiderstandsverhältnissen — dieselbe Flugbahn zu beschreiben fortführt, die das nicht krepierete Geschöß einschlagen würde.

Und zwar fliegen die Teile rotierend weg, da sie schon vorher um die Geschößachse rotierten. Ihre durch die betreffenden Schwerpunkte gehenden Drehachsen müssen unmittelbar nach der Explosion des Geschosses im allgemeinen parallel der Richtung sein, die die Geschößachse unmittelbar vor der Explosion hatte; und die Tourenzahl der Kugeln und Sprengstücke um ihre Schwerpunktsachsen muß

sogleich nach der Explosion die gleiche sein, wie die Tourenzahl des Geschosses unmittelbar vor der Explosion.

Die Kugeln bzw. Sprengstücke bewegen sich innerhalb eines Kegels, dessen Achse die letzte Tangente der Flugbahn ist; der Öffnungswinkel des Kegels heißt der Kegelwinkel. Bei dessen Ermittlung durch Rechnung oder durch Messung pflegt man die unregelmäßig zerstreuten äußersten Teile, nämlich etwa  $15^{\circ}_{10}$ , unberücksichtigt zu lassen.

### Rechnerische Ermittlung des Kegelwinkels.

Die Geschwindigkeit eines in der Mantelfläche des Streukegels wegfliegenden Teils kann sich aus vier Teilen zusammensetzen.

Erstens besitzt der Teil in Richtung der letzten Bahntangente, also in Richtung der Kegelachse die Geschwindigkeit  $v$  (m/sec), die das Geschöß unmittelbar vor dem Krepieren hatte und die mittels der Rechnungsverfahren von Abschnitt 4 bis 7 einfach zu berechnen ist. Wenn der Sprengpunkt nahe dem Mündungshorizont liegt, kann in den meisten Fällen für  $v$  die Auffallgeschwindigkeit  $v$ , genommen werden.

Zweitens erhält der Teil durch die Explosion der Sprengladung eine Geschwindigkeit  $v$ , senkrecht zur Bahntangente. Diese Geschwindigkeit ist bei Granaten verhältnismäßig groß, zwischen 400 und 2000 m/sec; bei den Schrapnells (den älteren Kopfkammer-Schrapnells, den älteren Mittelkammer- oder Röhren-Schrapnells und den Bodenkammer-Schrapnells) ist  $v$ , kleiner als bei Granaten; am kleinsten bei den Bodenkammer-Schrapnells, zumal wenn deren Hülle unzerlegt bleibt und folglich das Schrapnell als ein kleines Geschütz mit einer Kartätschladung aufgefaßt werden kann („Ausbläser“). Auch bei den zuletzt erwähnten Schrapnells muß eine solche Geschwindigkeit  $v$ , quer zur Bahntangente in endlicher Größe vorhanden sein; und zwar aus demselben Grunde, aus dem beim Schuß aus einer Schrotflinte die Schrote seitlich sich ausbreiten: Mit den Schrotkugeln treten die Pulvergase aus der Mündung der Waffe aus; es entstehen auf diese Weise zwischen den einzelnen Kugeln Gasdrücke, wobei der auf eine einzelne Kugel senkrecht zur Schußlinie ausgeübte Druck von der Schußlinie nach außen hin den von außen nach der Schußlinie hin wirkenden Druck überwiegt. (Nach einer Mitteilung von Pétry über ein belgisches Bodenkammer-Schrapnell ist  $v$ , = 15 m/sec).

Zur Berechnung von  $v$ , (m/sec) gibt J. de la Llave folgenden Ausdruck an, der bei Mittelkammer-Schrapnells Anwendung finden soll,

$$v_s = \frac{3000 \cdot L^{0.5} \cdot p_s}{P \cdot p_1^{0.4}}, \quad (1)$$



dabei  $L$  das Gewicht der Sprengladung in kg;  $P$  das Geschossgewicht (kg);  $p_1$  das Gewicht der einzelnen Füllkugel (kg);  $p_2$  das Gesamtgewicht der Füllkugeln (kg).

Drittens besitzt jeder Teil, z. B. jede Füllkugel eines Schrapnells, infolge der Drehung des Geschosses um seine Längsachse eine Geschwindigkeit  $v_d$  senkrecht zur Geschosßachse; die Kugel beschreibt vor der Explosion um die Geschosßachse einen Kreis mit einer linearen Geschwindigkeit, die gleich ist der Winkelgeschwindigkeit des Geschosses multipliziert mit dem Abstand des Kugelschwerpunkts von der Geschosßachse. Mit dieser Geschwindigkeit fliegt nach der Explosion die Kugel in der Tangente dieses Kreises weg, soweit allein die Geschosßdrehung in Betracht kommt; die nahe der Geschosßachse gelagerten Kugeln mit der kleinsten, die nahe der Hülle gelagerten mit der größten Geschwindigkeit. Würden die Kugeln alle im Zylindermantel des Geschosses gelagert sein, so wäre ihre Umfangsgeschwindigkeit (m/sec) im Anfang der Flugbahn  $v_0 \cdot \operatorname{tg} \Delta$ , wo  $v_0$  die Mündungsgeschwindigkeit (m/sec) des Geschosses und  $\Delta$  der Enddrallwinkel ist. Die Tourenzahl des Geschosses vermindert sich jedoch von der Mündung ab ein wenig (vgl. Band III), und außerdem haben die Kugeln verschiedenen Abstand von der Geschosßachse. Deshalb nimmt A. Noble für diese Geschwindigkeit  $v_d$  den Ausdruck:

$$v_d = (v_0 + v) \cdot 0,555 \cdot \operatorname{tg} \Delta; \quad (2)$$

Pétry den Ausdruck:

$$v_d = \lambda \cdot v_0 \cdot \operatorname{tg} \Delta,$$

wo  $\lambda$  für die Schrapnells der belgischen Belagerungskanonen gleich 0,75 sein, im übrigen durch den Versuch bestimmt werden soll; endlich W. Heydenreich gibt an:

$$v_d = (0,67 \text{ bis } 0,80) \cdot v_0 \cdot \operatorname{tg} \Delta.$$

Viertens wird einer Füllkugel durch die Sprengladung auch eine Zusatzgeschwindigkeit  $v_z$  in der Richtung der Bahntangente erteilt. Bei den Kopfkammer-Schrapnells ist diese Geschwindigkeit  $v_z$  negativ (für ein französisches Geschütz gibt Pétry an:  $v_z = -25$  m/sec). Bei Mittelkammer-Schrapnells ist  $v_z = 0$ . Bei Bodenkammer-Schrapnells liegt  $v_z$  zwischen 20 und 80 m/sec; nach W. Heydenreich soll  $v_z$  rund gleich 50 m/sec sein, falls die Bodenkammerladung  $\frac{1}{40}$  des ganzen Kugelgewichts ausmacht, dagegen  $v_z$  gleich rund 80 m/sec, falls dieses Verhältnis  $\frac{1}{25}$  ist. J. de la Llave berechnet  $v_z$  (in m/sec) für Bodenkammer-Schrapnells mittels der empirischen Formel:

$$v_z = \frac{620 \cdot L^{0.6}}{p_2^{0.4}} \quad (3)$$

wo wiederum  $L$  (kg) das Gewicht der Sprengladung,  $p_2$  (kg) das Gesamtgewicht der Kugelfüllung bedeutet.

Diese vier Geschwindigkeitskomponenten  $v$ ,  $v_a$ ,  $v_d$  und  $v_s$  beziehen sich, wie erwähnt, auf die Teile, die in der Mantelfläche des Streukegels wegfliegen. Die aufeinander senkrechten Geschwindigkeiten  $v_s$  und  $v_d$ , die beide senkrecht zur Bahntangente gerichtet sind (die Geschosßachse als in der Bahntangente liegend angenommen), setzen sich zu einer Geschwindigkeit  $\sqrt{v_d^2 + v_s^2} = V_s$  zusammen und die Geschwindigkeitskomponenten  $v$  und  $V_s$  addieren sich algebraisch zu einer entlang der Bahntangente gerichteten Geschwindigkeit  $v + v_s$ . Somit ist der halbe Kegelwinkel  $\frac{\gamma}{2}$  gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{v_d^2 + v_s^2}}{v + v_s} = \frac{V_s}{v + v_s}. \quad (4)$$

Hier ändern sich  $v_s$  und  $v_d$  entlang der Flugbahn kaum;  $v_d$  verkleinert sich nur langsam; dagegen nimmt  $v$  beträchtlich ab und später wieder etwas zu. Somit vergrößert sich anfangs der Kegelwinkel entlang der Flugbahn und wird später unter Umständen wieder kleiner.

Man hat danach bei den einzelnen Geschosßarten das Folgende:

a) bei den älteren Schrapnells mit Kopfkammerladung ist  $v_s$  klein gegenüber  $v_d$ ;  $v_s$  ist negativ, somit

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_s}{v - v_s}. \quad (5)$$

b) Bei den älteren Mittelkammer- oder Röhren-Schrapnells ist  $v_s = 0$ , also

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_s}{v}. \quad (6)$$

c) Bei den Bodenkammer-Schrapnells ist

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_s}{v + v_s}. \quad (7)$$

Z. B. beträgt bei der französischen F. K. 97 auf den Entfernungen 1000, 3000, 6000 m der halbe Kegelwinkel  $\frac{\gamma}{2}$  bzw.  $7^\circ 38'$ ,  $10^\circ$ ,  $12^\circ 9'$ ; dabei ist die Geschwindigkeit  $v$  des Schrapnells im Augenblick der Explosion bzw. 422, 300, 230 m/sec; Zahl der Kugeln 291; Einzelgewicht der Kugel 12 g; Gesamtgewicht der Füllkugeln 3,48 kg; Gewicht der Bodenkammerladung 40 g; Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses 529 m/sec; Drallwinkel  $\lambda = 7^\circ$ .

Danach ist bei Benützung der Formel von A. Noble für die Entfernung 6000 m:

$$v_d = (529 + 230) \cdot 0,555 \cdot \operatorname{tg} 7^\circ = \text{rund } 52 \text{ m/sec.}$$

Ferner wird die Geschwindigkeit  $v_s$  nach der Formel von de la Llave:

$$v_s = \frac{620 \cdot 0,04^{0,6}}{3,48^{0,4}} = \text{rund } 55 \text{ m/sec.}$$

Wenn man also vorläufig  $v_z$  unberücksichtigt läßt, so ist für 6000 m Entfernung der halbe Kegelwinkel  $\frac{\gamma}{2}$  gegeben durch

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{52}{230 + 55}; \quad \frac{\gamma}{2} = 10^\circ 21'.$$

Vorausgesetzt, daß die statt dessen mitgeteilte Zahl  $12^\circ 9'$  auf richtiger Beobachtung beruht und daß die benützten Formeln genügend genau zutreffen, folgt daraus, daß in der Tat  $v_z$  nicht ohne weiteres gegen  $v_d$  vernachlässigt werden darf; vielmehr würde sich danach  $v_z = \text{etwa } 9 \text{ m/sec}$  ergeben.

#### d) Bei den Granaten

ist  $v_z = 0$ , also

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_s}{v}. \quad (8)$$

Da, wie erwähnt, die Geschwindigkeit  $v_s$ , die den Sprengstücken durch die Sprengladung erteilt wird, weit größer ist als  $v_z$  bei den Schrapnells, nämlich bei Granaten  $v_s$  zwischen 400 und 2000 m/sec, so ist die Öffnung des Granatenstreukegels eine beträchtliche, der halbe Kegelwinkel  $\frac{\gamma}{2}$  liegt zwischen  $50^\circ$  und  $90^\circ$ ; auch er nimmt entlang der Flugbahn etwas zu, da  $v$  abnimmt.  $V_s = \sqrt{v_d^2 + v_z^2}$  ist, weil  $v_z$  über  $v_d$  weit überwiegt, von der Schußweite und von der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , also von der Geschützladung, nahezu unabhängig. Der Streukegel der Granatensprengstücke ist, je nach der Geschößkonstruktion, zum Teil im Innern hohl; mitunter findet sich dann noch ein zweiter weniger dichter Streukegel von kleinerer Öffnung innerhalb des ersten.

#### Ermittlung des Kegelwinkels durch Messung:

Sicherer als mit Hilfe der obigen Gleichungen (1) bis (3), die übrigens nur die Berechnung für Bodenkammer-Schrapnells zulassen, erfolgt die Bestimmung des Kegelwinkels  $\gamma$  durch Schießversuche.

H. Rohne schlägt vor, in der Gleichung  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_s}{v + v_z}$ , worin  $v$  aus der Schußtafel oder durch einfache ballistische Vorberechnung ohne weiteres bekannt ist, die Unbekannten  $V_s$  und  $v_z$  dadurch zu gewinnen, daß für zwei verschiedene Entfernungen, also zwei verschiedene  $v$ , je der Kegelwinkel gemessen wird. Man hat dann zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten. Z. B. sei auf 1000 m Entfernung, wo  $v = 421 \text{ m/sec}$  ist, gemessen  $\frac{\gamma}{2} = 7^\circ 38'$ ; auf 4000 m, wo  $v = 274 \text{ m/sec}$  ist, gemessen  $\frac{\gamma}{2} = 10^\circ 54'$ ; dann ist

$$\operatorname{tg}(7^\circ 38') = \frac{V_s}{421 + v_z}; \quad \operatorname{tg}(10^\circ 54') = \frac{V_s}{274 + v_z};$$

daraus  $V_s = 66 \text{ m/sec}$ ;  $v_s = 72 \text{ m/sec}$ ; also allgemein

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{66}{v + 72}.$$

Bei diesem Verfahren würden  $V_s$  und  $v_s$  als Konstanten des betreffenden Geschütz- und Geschößsystems angenommen werden. Dies trifft bei Schrapnells nur angenähert zu, da in  $V_s$  die Komponente  $v_s$  etwas veränderlich ist.

Die Messung des Kegelwinkels wird meistens in der Nähe der Mündung und zwar folgendermaßen bewerkstelligt:

Bei Schrapnells wird eine aufrechte Fangscheibe benützt, an der das Schrapnell zum Krepieren gebracht wird. Dahinter befindet sich eine gleichfalls aufrechte Hauptscheibe mit einem in Quadrate eingeteilten Vorhang. Die Hauptscheibe ist so weit von der Fangscheibe entfernt, daß alle Kugeln noch aufgefangen werden. Durch Kamera-beobachtung von der Seite her wird die Lage des Sprengpunkts festgelegt, etwa auf 0,5 m genau. Es wird auf dem Vorhang der Hauptscheibe die Höhe und die Breite des Rechtecks ermittelt, das die dichteste Gruppe der Streugarbe, nämlich 85 % aller Kugeln faßt. Aus der Entfernung von Sprengpunkt und Hauptscheibe einerseits und aus der Höhe und Breite des Rechtecks andererseits erhält man zwei etwas verschiedene Kegelwinkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , die alsdann zu  $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$  gemittelt werden. Diese Messung erfolgt meist für zwei verschiedene Entfernungen vom Geschütz. Sodann wird der durch die Bodenkammerladung erzeugte Geschwindigkeitszuwachs  $v_s$  durch einen besonderen Versuch gewonnen, nämlich durch Aufhängen des Geschosses ohne Zünder, Entzündung der Ladung und Messung der Geschwindigkeit der vordersten Kugeln mittels Boulengé-Apparat und Gitterrahmen.

Man hat so  $v_s$  und für zwei Entfernungen die Werte von  $\gamma$ . Da man für diese Entfernungen die Geschwindigkeit  $v$  des Schrapnells in seiner Bahn kennt, so sind damit aus der Gleichung  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_s}{v + v_s}$  die Werte von  $V_s$  für die beiden Entfernungen zu ermitteln. Aus diesen beiden Werten von  $V_s$  wird das arithmetische Mittel genommen, und dieses wird als  $V_s$  den weiteren Berechnungen des Kegelwinkels  $\gamma$  für eine beliebige Entfernung zugrunde gelegt, wozu dieselbe Gleichung dient.

Bei Granaten verwendet man eine Fangscheibe und hinter ihr einen wagrechten oben offenen Kasten von genügender Ausdehnung. Man erhält auf diese Weise die Flugrichtung der am steilsten vom Sprengpunkt aus nach abwärts gehenden Granatsprengstücke und damit den Kegelwinkel (man hat dabei die Richtung der Flugbahntangente im Sprengpunkt zu berücksichtigen). Da man in der Gleichung (8)  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{V_s}{v}$  durch die erwähnte Messung den Winkel  $\gamma$  und

außerdem  $v$  aus der Schußtafel kennt, so ist damit  $V$ , und folglich vermöge derselben Gleichung der Kegelwinkel  $\gamma$  für eine beliebige Entfernung, also ein beliebiges  $v$ , zu erhalten.

Die Kenntnis des Kegelwinkels ist von Wichtigkeit zur theoretischen Beurteilung der Tiefenwirkung und der Wirkung, die von der seitlichen Ausbreitung der Streugarbe erwartet werden kann. Die resultierende Geschwindigkeit  $V$  der in dem Mantel des Streukegels wegfliegenden Schrapnellkugeln (bzw. Granatsprengstücke) ist offenbar

$$V = \sqrt{V_s^2 + (v + v_x)^2}.$$

Benützt man diese als Anfangsgeschwindigkeit, so kann man für die obersten und die untersten Kugeln des Streukegels nach dem Rechenungsverfahren von Abschnitt 12 berechnen, in welcher Entfernung vom Sprengpunkt sich die lebendige Kraft einer Kugel durch den Luftwiderstand so weit vermindert hat (nämlich, vgl. oben, auf etwa 8 mkg), daß sie gerade noch gegen lebende Ziele ausreicht. Dabei bewegt sich vom Sprengpunkt ab die oberste Kugel zunächst aufwärts, bzw. wagrecht, bzw. sogleich abwärts, je nachdem der spitze Auffallwinkel der Geschößflugbahn kleiner, bzw. gleich, bzw. größer als der halbe Kegelwinkel ist.

Diese Berechnung kann unter Annahme des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes und einer geradlinigen Bewegung der Kugel in erster Annäherung mit der nachstehenden Formel erfolgen. Die Flugweite  $b$ , bei der die Kugelgeschwindigkeit von  $V$  auf  $v$  (m/sec) herabgesunken sein wird, ist:

$$b = \frac{p_1}{\alpha \cdot d^2 \cdot \delta} \log \text{nat} \frac{V}{v}.$$

Dabei ist:  $p_1$  das Gewicht der Schrapnellkugel (kg);  $d$  deren Durchmesser (m);  $\delta$  das Tagesluftgewicht, z. B. 1,22 kg/obm;  $\alpha = 0,367; 0,269; 0,166; 0,132$  für  $\frac{V+v}{2} = \text{bzw. } 400; 300; 200; 100 \text{ m/sec.}$

Nach Siacci berechnet H. Rohne z. B. für eine bestimmte F. K. und für eine Schrapnellkugel von 10 g Gewicht, daß, wenn die Kugel im Sprengpunkt eine Geschwindigkeit von 400, bzw. 300, bzw. 200 m/sec hatte, ihre Geschwindigkeit auf den Betrag 125 m/sec (lebendige Kraft 8 mkg) herabgesunken ist nach einer Flugweite von bzw. 300, 262, 145 m.

Auf solche Weise läßt sich beurteilen, ob die Sprengweite richtig gewählt ist. Unter Sprengweite, Sprenghöhe und Flugweite ist, bei Annahme eines wagrechten Zielgeländes, folgendes zu verstehen: Der mittlere Sprengpunkt sei  $M$  (vgl. Abb. 115), der Fußpunkt des Lots von  $M$  auf das Zielgelände sei  $A$ , das Ziel sei  $Z$ , der mittlere Aufschlagpunkt des nicht zerspringenden Geschosses sei  $B$ . Dann heißt  $MB$  die Flugweite,  $MA$  die Sprenghöhe,  $AZ$  die Sprengweite,  $AB$  mitunter die Aufschlagweite. Bei richtig liegender Flugbahn zum Ziel fallen (für Schrapnells) Aufschlagweite und Sprengweite zusammen. In diesem Sinne ist auch im Nachstehenden der Begriff Sprengweite gebraucht. Falls das Geschütz mittels Az.-Schießens

auf das Ziel  $Z$  bereits eingeschossen ist, fällt  $Z$  mit  $B$  zusammen; die Aufschlagweite  $AB$  ist dann gleichzeitig die Sprengweite. Falls zugleich die Flugweite  $MB$  einen sehr kleinen Teil der ganzen über dem Mündungshorizont gelegenen Flugbahn bildet, kann  $MAB$  als ein rechtwinkliges Dreieck betrachtet werden, worin die Flugweite  $MB$  die Hypotenuse, die Sprenghöhe  $MA$  die lotrechte Kathete, die Sprengweite  $AB$  die wagrechte Kathete darstellt. Auf diesen Fall beziehen sich die nachstehenden Ausführungen.

Die Sprengweite und damit die Sprenghöhe muß so groß angenommen sein, daß die Kugeln sich z. B. auf genügend viele lebende Ziele verteilen, oder mit anderen Worten, daß die Trefferdichte,

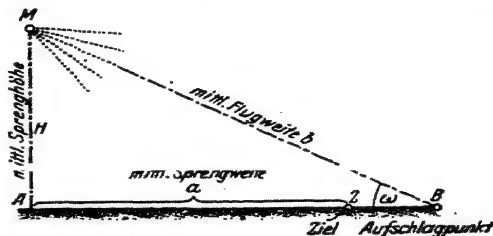


Abb. 115.

die Zahl der auf einen zur Achse des Streukegels senkrechten Quadratmeter des Ziels entfallenden Kugeln nicht zu groß wird; andererseits muß sie so klein gewählt werden, daß die Trefferdichte genügend groß ist und daß die lebendige Kraft die Kugeln im Ziel noch ausreicht. Erfahrungsgemäß nimmt übrigens die Schrapnellwirkung viel mehr infolge der unzureichend werdenden Trefferdichte, als infolge der zu geringen Endenergie der Kugeln ab.

Meistens wird die Sprengweite  $a$  oder auch die Flugweite  $b$  für eine und dieselbe Schrapnellart aus demselben Geschütz für die gleiche Anfangsgeschwindigkeit konstant gehalten, etwa gleich 60 m. Dann nimmt die Sprenghöhe  $a \cdot \operatorname{tg} \omega$  ( $\omega$  der spitze Auffallwinkel) rascher zu als proportional der Entfernung. In Frankreich und Österreich läßt man (nach H. Rohne) die scheinbare Sprenghöhe, d. h. den Winkel, unter dem die Sprenghöhe vom Geschütz aus erscheint, gleich bleiben. In diesem Falle nimmt die Flugweite mit der Schußweite ab (die Flugweite ist z. B. bei der französischen F. K. auf 1000, 2000, 4000 m, bzw. 122, 94, 64 m). Die Trefferdichte ändert sich alsdann gleichfalls, sie nimmt, wie H. Rohne berechnet, mit der Entfernung zu. Krupp nahm für die älteren Geschütze (bis 1905) eine für alle Entfernungen gleichbleibende Sprengweite von 60 m an; bei den neueren Feldkanonen dagegen ließ er (nach H. Rohne) die Sprengweite langsam und zwar im Verhältnis der wagrechten Endgeschwindigkeit  $v_x \cdot \cos \omega$  des Geschosses abnehmen:

$$a = \frac{1}{4} v_x \cos \omega. \quad (9)$$

Es ist dann die Sprenghöhe  $H = \frac{v_x \sin \omega}{4}$ .

Ist die Sprengweite  $a$ , folglich auch die Sprenghöhe  $H = a \cdot \operatorname{tg} \omega$  und die Flugweite  $b = a \cdot \sec \omega$  bekannt, ebenso der Kegelwinkel  $\gamma$  für die betreffende Entfernung, sowie die Zahl  $N$  der Füllkugeln des Schrapnells, so läßt sich die Trefferdichte einfach berechnen: Man denke sich den Streukegel durch eine zur Kegelachse senkrechte Ebene in der Entfernung der Flugweite  $b$  vom Sprengpunkt geschnitten. Der Schnitt ist ein Kreis vom Halbmesser  $\varrho$ . Die Trefferdichte in dieser Kreisebene sei mit  $D$  bezeichnet, d. h. auf 1 qm des Kreises sollen  $D$  Kugeln entfallen. Dann entfällt die ganze Anzahl  $0,85 \cdot N$  der Füllkugeln, die bei der Bemessung des Streukegels überhaupt in Rechnung gezogen wird, auf eine Fläche  $\varrho^2 \pi = \frac{0,85 \cdot N}{D}$ . Da nun  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{b}$  ist, so wird der Ausdruck für die Trefferdichte  $D$ :

$$D = \frac{0,85 \cdot N}{\pi \cdot b^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}. \quad (10)$$

Bei dem obigen Beispiel der französischen F. K., mit  $N = 291$ ,  $\frac{\gamma}{2} = 12^\circ 9'$ , wird bei einer Entfernung zwischen Sprengpunkt und Ziel oder bei einer Flugweite  $b = 50$  m:

$$D = \frac{0,85 \cdot 291}{(50 \cdot \operatorname{tg} 12^\circ 9')^2 \cdot \pi} = 1,4;$$

d. h. auf 10 qm des Ziels entfallen 14 Kugeln.

Anmerkung. Gleichung des Sprengkegels. Der halbe Kegelwinkel sei wieder  $\frac{\gamma}{2}$ ; der spitze Auffallwinkel  $\omega$ ; die Sprenghöhe  $H$  m. Im Fußpunkt  $A$  des Lots, das vom mittleren Sprengpunkt  $M$  auf das horizontale Zielgelände gefällt wird, denke man sich den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems der  $xyz$ ; die  $x$ -Achse horizontal und positiv in der horizontalen Schußrichtung; die  $y$ -Achse horizontal und positiv nach rechts; die  $z$ -Achse vertikal und positiv nach oben. Dann hat der Streukegel, dessen Spitze im Sprengpunkt  $M$  ist, die folgende Gleichung (die sich mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie des Raums unschwer ergibt):

$$y^2 + [(H - z) \cos \omega - x \cdot \sin \omega]^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \cdot [(H - z) \sin \omega + x \cdot \cos \omega]^2. \quad (9)$$

Setzt man hier  $z = 0$ , so erhält man die Gleichung der Ellipse bzw. Hyperbel (bzw. Parabel), welche die Begrenzung der Aufschlagpunkte in dem horizontalen Zielgelände darstellt, falls man, wie dies üblich ist, annimmt, daß die Sprenghöhe  $H$  so klein ist, daß man die Bahnen der wirksamen Schrapnellkugeln bzw. der Granatsplitter bis zum Gelände als geradlinig betrachten kann.

Mit dem Koordinatenanfang in  $A$  ist diese Gleichung in  $(xy)$ :

$$y^2 + (H \cos \omega - x \sin \omega)^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} (H \sin \omega + x \cos \omega)^2. \quad (10)$$

Damit hat H. Rohne (vgl. Lit.-Note) eine Reihe von Fragen über den Einfluß der Sprenghöhe und die Wirksamkeit des Schrapnell- und Granatschusses behandelt.

Über die Ermittlung der Tiefenwirkung von Schrapnells durch Messung vergleiche das Buch von W. Heydenreich sowie einen Aufsatz von Hptm. Jüstrow (s. Lit.-Note).

## B. Die Größe des Sprengtrichters beim Schießen mit Aufschlagzündung.

Für die Abmessungen des Sprengtrichters, der bei der Explosion eines Artilleriegeschosses in Erde, Mauerwerk usw. entstehen wird, geben J. de la Llave, E. Vallier und N. Sabudski (vgl. Lit.-Note) einige rein empirische Formeln, die, wie die Verfasser selbst hervorheben, mit großer Vorsicht zu gebrauchen sind, da die Rechnungsergebnisse bis zu 50% unrichtig ausfallen können. Die Formeln können daher nur für einen ersten rohen Anhalt dienen.

Der Rauminhalt der entstehenden Höhlung, die von der etwa zurückfallenden Erde usw. gereinigt zu denken ist, sei mit  $J$  (cbm) bezeichnet; das Gewicht der Sprengladung des Geschosses mit  $L$  (kg). Dann ist

a) für Erde

$$J = (0,503 \text{ bzw. } 0,816) \cdot m \cdot \lambda \cdot L. \quad (11)$$

Dabei gilt die Zahl 0,503, wenn die Auftreffgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses kleiner als 300 m/sec, die Zahl 0,816, wenn  $v_0 > 300$  ist.  $m$  ist ein Koeffizient, der allein von der Bodenbeschaffenheit abhängt:  $m = 0,70$  für harten bewachsenen Erdboden,  $m = 0,85$  für Sandboden,  $m = 1$  für gewöhnliche Erde,  $m = 1,2$  für weiche Erde und Aufschüttungen.  $\lambda$  hängt von der Art des Sprengstoffs ab, und es ist  $\lambda = 1$  für die gewöhnlichen Pulver, ebenso für Pikrinsäure dann, wenn es sich um Zünder ohne Verzögerung handelt;  $\lambda = 2$  für feuchte Schießbaumwolle. Bei Zündern mit Verzögerung soll nach Sabudski  $J$  das 1,4 fache sein.

Was die Form des Trichters anlangt, so soll die Tiefe  $t$  etwa  $\frac{1}{4}$  des Durchmessers sein,  $J = \frac{8}{16} \pi \cdot d^2 \cdot t$ .

b) Für Mauerwerk:

$$J = 0,194 \cdot X \cdot \lambda \cdot L. \quad (12)$$

$X$  (m) ist die Eindringungstiefe, wie sie sich aus § 74 für die zur Auftrefffläche senkrechte Geschwindigkeitskomponente des Geschosses berechnet;  $L$  (kg) wieder das Gewicht der Sprengladung.  $\lambda$  ist abhängig von der Art des Sprengstoffs, nämlich  $\lambda = 1$  für gewöhnliches Schwarzpulver;  $\lambda = 2$  bis 2,1 für Schießwollpulver;  $\lambda = 2$  bis 2,2 für Pikrinsäure.

Bei gegebenem Durchmesser  $d$  des Trichters soll sich die Tiefe  $t$  berechnen mittels  $J = \frac{8}{16} \pi \cdot d^2 \cdot t$ .

Speziell für Beton wird nach de la Llave die Zahl 0,194 ersetzt durch 0,035, wenn die Explosion in schwachem Beton, durch 0,014, wenn sie in stark gebundenem Beton erfolgt. Die neuesten Zahlen können nicht mitgeteilt werden.



### § 77. Über das Eindringen in flüssige und halbflüssige Körper. Scheinbare Explosivwirkung (Dum-Dum-Wirkung) der neueren Infanteriegeschosse.

Wenn ein Infanteriegeschosß mit großer Geschwindigkeit in einen Körper eindringt, dessen Teile sich *leicht* gegeneinander verschieben lassen (flüssige und halbflüssige Körper, Gehirn, Leber, Niere, Milz, Herz im gefüllten Zustande, Magendarm, gefüllte Blase, Mark des Knochens, feuchter Ton, Wasser, Kleister usw.), so ist die Wirkung auf den Körper eine ähnliche, wie wenn innerhalb des Körpers eine Sprengladung sich befunden hätte und zur Entzündung gebracht worden wäre.

Eine nicht zu große Wassermasse wird nach allen Seiten, zumal nach dem Schützen zu, verspritzt; in einem großen Block aus plastischem Ton entsteht eine Höhlung, deren Inhalt das Vielhundertfache von dem Volumen des eingedrungenen Geschosses betragen kann und deren Form von den Dimensionen und der Geschwindigkeit des Geschosses, von dem Grade der Anfeuchtung des Tones, sowie von der Umfassung des Tonblocks abhängt. Selbst in Blei zeigt sich die Wirkung, wenn auch in verringertem Maße; dagegen bleibt sie in vollkommen trockenem Sand und in Holz fast vollständig aus. Über die Einzelheiten der bezüglichen Erscheinungen vergleiche man insbesondere die Untersuchungen der Medizinalabteilung des Preussischen Kriegsministeriums (s. Lit.-Note).

Hier seien die verschiedenen Theorien zur Erklärung der Erscheinung kurz besprochen:

1. Stauchung des Geschosses. Es wurde an die Wirkung der Stauchung des Geschosses gedacht: Indem das Geschosß sich am Vorderende abplattet, bewegen sich Teile des Geschosses seitwärts (s. Abb.). Dadurch erhalten die Teile des Materials, in das das Geschosß eindringt, z. B. des Tons, Geschwindigkeiten nach der Seite.

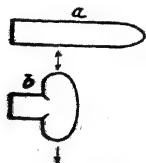


Abb. 116.

Dieser Umstand ist ohne Zweifel von Einfluß auf die fragliche Erscheinung. Es ergibt sich dies z. B. aus dem Verhalten des in umgekehrter Stellung verschossenen Infanteriegeschosses bei dessen Eindringen in feuchten Ton (s. w. u.), wobei zu bemerken ist, daß das Geschosß in dieser Stellung sich weit leichter staucht, als in der normalen Stellung.

Ferner ergibt sich dies aus der kräftigen Dum-Dum-Wirkung von Teilmantelgeschossen und von Mantelgeschossen mit angebohrter oder abgebrochener Spitze. Indessen zeigt sich eine kräftige Explosionswirkung auch ohne Stauchung beim Schuß mit

massiven Stahlgeschossen, also kann diese Ursache nicht die hauptsächlichste sein.

2. Die hohe Temperatur, die das Geschöß beim Eindringen annimmt, soll das Wasser des Tones usw., unter Umständen auch das Blei des Geschosses zum Verdampfen bringen, der Druck des Dampfes soll die Explosion hervorrufen. Indessen ist es sehr unwahrscheinlich, daß zur Verdampfung von einer reichlichen Menge Wasser die Zeit ausreicht. Ferner wurden mancherlei Versuche angestellt, um die Maximaltemperatur zu messen, die das Geschöß unmittelbar nach dem Eindringen besitzt: Wurde gegen Schwefelblumen, Pulver oder Schießwolle geschossen, so fand keine Entzündung dieser Stoffe statt; da man die Entzündungstemperatur dieser Materialien kennt, so glaubte man eine ungefähre obere Grenze für die Geschößtemperatur zu erhalten. Ferner wurde das Geschöß sofort nach dem Einschlagen herausgenommen und in ein Kalorimetergefäß gebracht. Es fanden sich Geschößtemperaturen von 70—110° C. Endlich wurde das Mantelgeschöß mit einem Kern von leichtflüssiger Metallegierung versehen (z. B. Woods Metall 65—70°, Rosesch Metall 95°,  $Pb_3Bi_3$  125° usw.). Man fand eine Maximaltemperatur des Geschosses M. 88 zwischen 140 und 160°. Damit entfällt die Verdampfungstheorie.

3. Pendelungen. Das Geschöß führt, wie ein rasch gedrehter Kreisel, den man anhalten will, in dem Innern des Tonblocks kräftige Pendelungen aus. Hierdurch sollen die Tonteile nach der Seite geschleudert werden.

Versuche mit rotationslosen Geschossen, die im ballistischen Laboratorium aus glattem Lauf und unter sonst gleichen Umständen vom Verfasser vorgenommen wurden, ergaben nahezu die gleiche Explosionswirkung.

Zwar ist es danach und nach den Untersuchungen der Medizinalkommission des Preußischen Kriegsministeriums nicht unmöglich, daß diese Pendelungen und die damit verbundene Querstellung des Geschosses zu der zerreißenen Wirkung im tierischen Körper wenigstens etwas beitragen. Die Hauptursache aber kann nicht in den Pendelungen liegen. (Über eine interessante Diskussion, die diese Erklärungsweise betrifft, vgl. man das Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft, 1911, S. 279.)

4. Der Druck von Luftmassen, die etwa vom Geschöß in den betreffenden Körper mit hineingerissen würden, oder der Druck der Luftwellen, die das Geschöß begleiten, kann gleichfalls nicht in erster Linie die Explosionswirkung hervorrufen.

Denn was das erstere betrifft, so hat E. Mach nachgewiesen, daß es sich hierbei überhaupt nicht um ein und dasselbe Luftquantum

handelt, das mit dem Geschöß weiterginge, sondern um einen Bewegungszustand der Luft, der sich in jedem Moment von neuem bilden muß. Auch sind niemals Gasmassen beobachtet worden, die aus einem durchstoßenen Körper ausgestoßen würden.

Ferner hat E. Mach den Luftdruck in verschiedener Entfernung um das Geschöß gemessen und so gering gefunden, daß die Kopfwelle als Ursache der Explosionswirkung ebenso unwahrscheinlich ist, wie die Erzählungen über die Tötung von Menschen durch den Luftdruck vorbeifliegender Geschosse.

Da neuerdings doch von H. Lehmann der Druck der Geschößkopfwelle als Ursache der scheinbaren Sprengwirkung angeführt wurde, haben P. A. Günther und der Verfasser einige Sonderversuche darüber angestellt (vgl. Lit.-Note):

In verschieden große Platten und Kugeln aus feuchtem Lehm wurden Löcher gebohrt, die einen nur sehr wenig größeren Durchmesser hatten, als das Geschößkaliber beträgt, und es wurde durch diese Öffnungen hindurchgeschossen. Würde die Kopfwellentheorie zutreffen, so müßte sich eine Sprengwirkung zeigen. Davon war nichts wahrzunehmen.

Ferner wurde dicht über ein mit Wasser oder Quecksilber übertüllt gefülltes flaches Gefäß hinweggeschossen; gleiche negative Wirkung.

Endlich wurde eine Kugel aus feuchtem Lehm unter die Glocke einer Luftpumpe gebracht, die Luft aus der Glocke ausgepumpt, und hindurchgeschossen. Da keine Luft in der Glocke vorhanden ist, kann auch keine Kopfwelle vorhanden sein; also dürfte nach der Kopfwellentheorie keine Sprengwirkung eintreten. Tatsächlich trat sie unvermindert auf.

Die Kopfwellentheorie, wonach nicht der Stoß des Geschosses selbst, sondern der Stoß der das Geschöß begleitenden Kopfwelle die Ursache der Erscheinung bildet, scheidet damit endgültig aus.

5. Sogenannter hydraulischer Druck. Analogie mit der Wasserverdrängung bei der hydraulischen Presse:

Wenn ein geschlossenes Gefäß vollständig mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit gefüllt ist und wenn alsdann ein Stempel mit bestimmtem Druck in das Gefäß eingetrieben wird, so pflanzt sich dieser Druck durch die ganze Masse hindurch nach allen Seiten in gleicher Stärke fort. — (Dieser Verdrängungsdruck wird bekanntlich in der hydraulischen Presse zur Erzeugung außerordentlich hoher Kräfte benützt.) — Das Geschöß, das in ein mit Wasser gefülltes Gefäß eindringt, soll wie ein solcher Stempel wirken. Auf Grund des Pascalschen Gesetzes von der Fortpflanzung eines Druckes nach allen Seiten innerhalb einer Flüssigkeit würde sich dann in ein-

facher Weise die auffallende Tatsache erklären, daß das Wasser nicht nur in der Schußrichtung, sondern auch nach den Seiten und nach dem Schützen zu mit Gewalt austritt.

Dieser Erklärungsweise steht folgendes entgegen. Die Flüssigkeiten sind sehr wenig elastisch zusammendrückbar. Wenn also im Innern eines Wassergefäßes ein hoher Druck herrscht, so genügt es, daß in der äußeren Hülle ein kleiner Ritz oder eine Ausbauchung sich bildet, damit der Innendruck sofort auf den gewöhnlichen Atmosphärendruck herabsinkt. (Dies ist auch der Grund dafür, daß das Arbeiten mit sehr hohen hydraulischen Drucken nicht mit der gleichen Gefahr verbunden ist, wie dasjenige mit pneumatischen Drucken: Die gedrückte Wassermasse braucht sich nur sehr wenig auszudehnen, die Wasserteilchen der Oberfläche brauchen nur sehr kleine Wege zurückzulegen, bis der Überdruck Null geworden ist. Wenn daher durch den Überdruck die Hülle gesprengt wird, so erhalten die Trümmerstücke keine bedeutende Geschwindigkeit. Anders ist es bei gedrückten Gasen.)

Im vorliegenden Falle werden jedoch die Teile unter Umständen sehr weit hinausgeschleudert. Ferner entsteht im feuchten Ton usw. eine Höhlung, die mehr als das 400 fache des Geschoßvolumens betragen kann. Danach ist die Theorie des hydraulischen Drucks als der Erklärungsursache für die Explosionswirkung zunächst wenig wahrscheinlich.

Widerlegt aber wird sie dadurch, daß die Explosionswirkung nicht nur in geschlossenen, sondern auch in offenen Wassergefäßen und bei Streifschüssen auftritt, also in Fällen, wo von einem Verdrängungsdrucke im obigen Sinne keine Rede sein kann.

Richtig an diesem Gedanken wird also nur das eine sein, daß die Kleinheit der Kohäsionskräfte und Reibungskräfte sowie die leichte Verschiebbarkeit der Teilchen des durchschossenen Körpers gegeneinander, die ja die Voraussetzung für die Gültigkeit des Pascalschen Gesetzes von der Druckfortpflanzung nach allen Seiten bildet, gleichzeitig die Voraussetzung für die Explosionswirkung beim Durchschießen darstellt. In der Tat ist die Explosionswirkung um so größer, je geringer die Reibung der Teilchen unter sich ist und je leichter sich die Teilchen gegeneinander verschieben.

6. Viskosität. Man könnte geneigt sein, die Viskosität (Zähigkeit) der flüssigen und halbflüssigen Körper als Erklärungsprinzip beizuziehen: Das Geschoß zieht (s. Abb. 117a) die nächstliegenden Wasserschichten 1—1 gewissermaßen nach sich, diese die angrenzenden 2—2 usw., bis schließlich die ganze Wassermasse von der Bewegung ergriffen wird, ähnlich wie man dies bei einem um

seine lotrechte Achse rotierenden, mit Wasser gefüllten Kreiszylinder bezüglich der Rotationsbewegung beobachten kann. Die auffallend lange Verzögerung der eigentlichen Explosion der Wassermasse gegenüber dem Durchschießungsmoment wäre damit einfach erklärt. Allein die Seitenwirkung, diejenige senkrecht zur Schußrichtung, wäre weniger leicht verständlich. Schießt man ferner durch ein Tonstück (s. Abb. b), das durch vertikale Luftschichten, parallel der Schußrichtung unterbrochen ist, so dürfte, wenn die Viskositätstheorie zuträfe, nur Teil 1 zertrümmert werden, nicht aber könnte 2—2, noch weniger 3—3 nachgezogen werden, während tatsächlich auch diese Teile von der Bewegung ergriffen werden. Je größer die innere

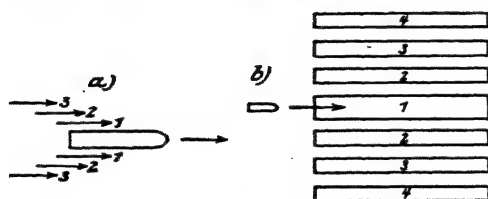


Abb. 117.

Reibung eines flüssigen oder halbflüssigen Körpers wäre, um so größer müßte unter sonst gleichen Umständen die Explosionswirkung sich gestalten; sie müßte bei Leim, Pech usw. größer sein als bei Wasser; und bei Blei, Kupfer usw., — denn auch bei

diesen kann bekanntlich von Fließen gesprochen werden, — müßte sie am größten sein. Blei zeigt allerdings die Wirkung, aber weit weniger als Wasser.

So bleiben zwei Theorien übrig, zwischen denen die Entscheidung zu treffen ist: Die Theorie der longitudinalen Verdichtungs- welle oder Druckwelle und die Theorie der translatorischen Fort- führung.

7. Die Druckwellentheorie (Reger 1884): Wenn das Geschöß mit großer Geschwindigkeit in das Wasser eindringt, so wird auf letzteres ein Stoß ausgeübt; eine longitudinale Schallwelle, bestehend aus einer Verdichtung, vielleicht auch aus mehreren aufeinander folgenden Verdichtungen und Verdünnungen der Flüssigkeit, pflanzt sich vermöge der Elastizität der letzteren nach allen Seiten fort. Die Geschwindigkeit ist diejenige des Schalls im Wasser, also etwa 1435 m/sec (möglicherweise aber auch erheblich größer, wenn nämlich, wie bei der Luft, so auch bei Wasser, die Schallgeschwindigkeit von der Intensität des Stoßes abhängt). Ist die Erschütterungs- welle an der freien Oberfläche angelangt, also an einer Wasser- schicht A, die keinen Gegendruck an einer vorliegenden Wasser- masse findet, so wird diese äußerste Schicht A abgeschleudert. Kommt der nächste Verdichtungsstoß an, so wird die nächste Schicht B, die jetzt freiliegt, weggestoßen usw. Zur Bekräftigung dieser Theorie wurde u. a. auf die Analogie einer kräftig tönenden Flüssigkeitssäule

(Cagniard-Latour und Dvorak) hingewiesen, deren Oberflächenteile als Tropfen wegfiegen.

Diese Erklärungsweise muß zunächst durchaus einleuchtend erscheinen. Ein Erschütterungsstoß muß unter allen Umständen von der Erregungsstelle aus in dem Wasser sich fortpflanzen. Denkt man sich in sehr großer Tiefe unter der Oberfläche des Meeres geschossen, so kann zwar eine eigentliche Explosion nicht erfolgen, trotzdem muß die Schallwelle sich ausbreiten. Bei Explosion von Seeminen scheint in zahlreichen Fällen dieser Stoß beobachtet worden zu sein. Die bekannte Erscheinung, daß beim Schießen gegen einen Steinblock, der nicht ganz durchschossen wird, häufig auf der Rückseite Stücke abspringen, erklärt sich vielleicht durch die longitudinale Stoßwelle. Allein die kräftige Explosionswirkung, wie sie beim Durchschießen von Wasser- und Tonmassen mit Infanteriegeschossen eintritt, wird durch die Wellen elastischer Verdichtung nicht bewirkt. Dies ergibt sich aus folgenden Versuchen.

#### Versuche von C. Cranz und K. R. Koch (1900):

a) Ein Bleirohr vom inneren Durchmesser 4,6 cm und äußeren Durchmesser 5,5 cm ist am Ende *E* (s. Abb. 118) verschlossen. Das Stück *EA* des Rohres liegt auf 60 cm Länge in der Schußrichtung. Von da ab ist das Rohr in der Form eines Kreisbogens nach rückwärts gebogen, verläuft weitere 95 cm geradlinig und horizontal und geht dann in der Länge von 28 cm lotrecht aufwärts; das Rohr ist ganz mit Wa gefüllt; bei *O* ist die freie Oberfläche.

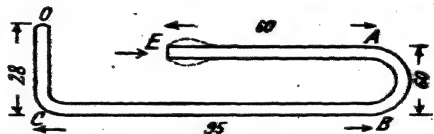


Abb. 118.

Die Ausbuchtungen der Wasseroberfläche *O* wurden in Funktion der Zeit zunächst mit Hilfe desselben Verfahrens photographisch registriert, das K. R. Koch und der Verfasser für die Aufnahme der Gewehrlaufschwingungen 1899 angewendet hatten (vgl. Band III). Weiter wurde das folgende, in der Abbildung schematisch angedeutete, sehr empfindliche photographische Verfahren benützt (Abb. 119): Von der Bogenlampe *B* geht paralleles Licht durch die Kreisblende *S* und nach totaler Reflexion in dem Glasprisma *Pr*<sub>1</sub> zur Wasseroberfläche *O* und von da zurückgeworfen und nach nochmaliger totaler Reflexion in *Pr*<sub>2</sub> durch das Objektiv *L* nach der photographischen Platte *P*. Von der Öffnung der Kreisblende wird ein Bild auf der Platte erzeugt. Wird die Platte senkrecht zum Strahl rasch weggezogen, so wird auf ihr eine schmale gerade Lichtlinie erzeugt, so lange die Wasseroberfläche *O* in Ruhe ist. Eine sehr geringe Erschütterung der Wasser-

oberfläche brachte ein beträchtliches Heben oder Senken der Lichtlinie auf der Platte hervor. Der Augenblick des Einschusses wurde durch ein Funkenbild  $\alpha$  markiert, die Zeiten wurden durch mitphotographierte Stimmgabelschwingungen registriert. Das Ergebnis der Aufnahme beim Schuß ist im Anhang von Band III, photographische Aufnahmen, gegeben;  $CD$  sind die Stimmgabelschwin-

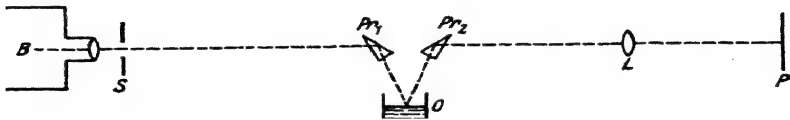


Abb. 119.

gungen,  $AB\dots$  ist die Linie der Wasseroberfläche bei Verwendung des ersten Verfahrens, die Lotrechte durch Punkt  $\alpha$  gibt den Moment des Einschusses; die Schwingungsdauer der Stimmgabel betrug 0,0023 Sekunden. Man erkennt, daß die erste Erschütterung  $B$  der Wellenoberfläche weit später erfolgt, als es nach der Schallwellentheorie zu erwarten gewesen wäre.

b) Einige weitere Versuche wurden angestellt, um den Verlauf der Explosionserscheinungen zu untersuchen:

Ein Blechzylinder von 15 cm Länge und 12,5 Durchmesser wurde in horizontaler Richtung an Schnüren aufgehängt, auf der Einschußseite mit Pergamentpapier, auf der Ausschußseite mit Gummihaut verschlossen und ganz mit Wasser gefüllt; es wurde in der Richtung

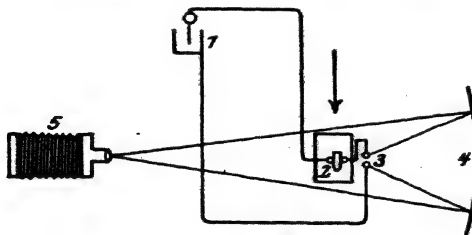


Abb. 120.

der Zylinderachse mit einem Geschöß von 6 mm Kaliber und etwa 750 m/sec Geschwindigkeit durch den Zylinder geschossen. Dieser befand sich dabei (s. schemat. Abb. 120) zwischen einem Hohlspiegel 4 mit davor angebrachter Beleuchtungsfunkstrecke 3 und einem Photographieapparat 5.

Im Innern der Wassermasse, und zwar in der (durch den Pfeil angedeuteten) Schußlinie, war eine Glasröhrenausslösung 2 angebracht. Wenn das Geschöß diese Stelle im Wasser erreichte, ging auf dem Wege 1, 2, 3, 1 die Entladung der Leydener Flasche über. Es konnte auf diese Weise die Form der Gummihaut in dem Augenblick aufgenommen werden, in dem sich

das Geschoß in der Mitte des Wassergefäßes befand. In einer Reihe von Versuchen wurde die Auslösevorrichtung innerhalb des Wassers immer weiter nach der Ausschußmembran hin verlegt. Schließlich wurde zur Auslösung des Funkens eine Franklinsche Tafel auch hinter dem Zylinder, also außerhalb des Wassers in verschiedenen Abständen angebracht. Das Ergebnis war: Solange das Geschoß sich noch im Wasser befindet, zeigt die Gummihaut nicht die geringste Ausbiegung, das ganze Gefäß ist noch völlig in Ruhe. Erst wenn das Geschoß das Wassergefäß durchsetzt hat und sich etwa 1 cm hinter ihm befindet, wird eine erste Ausbauchung der Ausschußhaut überhaupt wahrnehmbar. Aus der Einschußöffnung tritt sehr früh eine Wassergarbe nach dem Gewehr zu heraus. Diese vergrößert sich mehr und mehr, zugleich stülpen sich die Papierränder des Einschußloches immer weiter auf. Von dem Augenblick ab, in dem das Geschoß sich 1 cm hinter dem Wassergefäß befindet, vergrößert sich die erwähnte Ausbiegung der Ausschußhaut; diese Haut wird mehr und mehr in schlauchähnlicher Form durch das dem Geschoß nachströmende Wasser hervorgetrieben. Eine eigentümliche zapfenähnliche Ausbuchtung dieser Haut zeigt sich ferner am oberen Rand und vergrößert sich mehr und mehr.

Ferner wurde durch ein 1 m langes schmiedeeisernes Rohr von 8 mm Wandstärke und 13,8 cm äußerem Durchmesser geschossen, das in gleicher Weise wie der Blechzylinder durch Pergamentpapier am Einschuß und durch Gummihaut am Ausschuß verschlossen und mit Wasser gefüllt war. Am oberen Ende war ein Längsschlitz von 2 cm Breite gelassen, um die Seitenwirkung beobachten zu können. Eine Aufbiegung des Rohres war durch drei kräftige eiserne Ringe verhindert. Der obere Längsschlitz war durch eingekeiltes Holz verschlossen, und dieses Holzstück sollte durch 40 Windungen Eisendraht von 1,75 mm Durchmesser gehalten werden. Beim Schuß erreichte das Geschoß die Ausschußhaut in der langen Röhre überhaupt nicht. Die photographischen Aufnahmen durch den elektrischen Funken (der bei diesen Versuchen durch das nach oben austretende Wasser ausgelöst wurde) zeigten wiederum, daß das Zerreißen der Ausschußhaut erst sehr spät erfolgt. Es bildet sich zunächst eine immer größer werdende Ausbauchung der Haut, alsdann reißt sie. War dabei die Gummimembran sehr stark gespannt worden, so reißt sie entlang der Rohrwandung, es bildet sich also ein großes, kreisförmiges Loch; war die Membran einseitig gespannt worden, so ergab sich ein Längsschlitz; war sie endlich ohne vorhergehende Spannung gleichmäßig aufgezogen worden, so zeigte sich ein kleines rundes Loch; die zugehörigen vom Wasserstrahl weggerissenen Membranteile fander sich als nahezu kreisförmige Platten von 0,5 bis 8 cm Durchmesse



vor. Als Beleg für die Mächtigkeit der Explosionswirkung möge angeführt sein, daß die erwähnte Eisendrahtwicklung gesprengt und daher durch eine solche mit Hanfseilen von 6 mm Durchmesser ersetzt werden mußte.

Ähnliche Umstände traten ein, als kleinere Geschoßenergien und kleinere Wassermengen verwendet wurden: Schüsse durch ein 20 cm langes, mit Wasser gefülltes Bleirohr von 5,5 cm äußerem Durchmesser mit einer Flobertpistole; am oberen Teil der Röhre 6 kleine kreisförmige Öffnungen. Es zeigte sich hier deutlich, wie zunächst eine bestimmte Wassermenge, von der übrigen sich absondernd, in Pilzform vorgestoßen, und wie dadurch zugleich die Ausschußmembran ausgebuchtet wird. Durch die oberen Löcher wird Wasser gleichfalls in Pilzform ausgestoßen. Ähnliches gaben Aufnahmen über Schüsse durch eine wassergefüllte Schweinsblase für einige aufeinander folgende Augenblicke: Es tritt ein Streukegel von Wasserteilchen wiederum zuerst an der Einschußseite, dann ein solcher an der Ausschußseite hervor und vergrößert sich immer mehr. Die Blase als Ganzes ist noch längere Zeit in Ruhe. Erst wenn das Geschöß 245 cm hinter der Ausschußseite sich befindet, und dazwischen noch ein 4,3 cm dickes Brett durchschlagen hat, beginnt die eigentliche Explosion der Wasserblase. Ebenso bei einer durchschossenen Tonkugel. (Über weitere Einzelheiten vgl. die Arbeit selbst, s. Lit.-Note.)

Schon früher hat Tielmann kinematographische Aufnahmen von Schädeldurchschießungen bekannt gegeben. Der von ihm benützte Apparat mit mechanischem Momentverschluß gestattete 50 Aufnahmen in der Sekunde; die Absprengung des Schädeldaches dauerte etwa  $\frac{2}{50}$  Sekunde. Bircher schoß durch ein wassergefülltes Blechgefäß mit breiter Lötnaht; aus der Gestalt des zerrissenen Gefäßes ließ sich nach dem Schuß deutlich erkennen, daß das Zerreißen des Gefäßes erst erfolgt sein konnte, nachdem das Geschöß ausgetreten war. Ferner erweiterten später 1903 Kranzfelder und Schwinning (vgl. Lit.-Note) das Verfahren der elektrischen Momentphotographie in der Weise, daß sie zehn Leydener Flaschen nacheinander durch denselben Schuß entluden, wodurch von demselben Durchschießungsvorgang zehn Bilder erzielt wurden.

Zuletzt gaben die in Band III beschriebenen kinematographischen Aufnahmen, die in der Sekunde 5000 (und neuerdings 100 000 Einzelbilder) liefern und wovon mehrere durch kurze Bruchstücke im Anhang von Band III wiedergegeben sind, die deutlichste Analyse des Durchschießungsvorgangs.

8. Nach allen diesen Versuchen hat man sich folgende Vorstellung von dem Vorgang der scheinbaren Explosion zu machen:

Die Bewegungsenergie des Geschosses wird ganz oder zum großen Teil auf den durchschossenen Körper übertragen; das Geschöß gibt von seiner Energie den nächstliegenden Teilchen des Körpers ab, diese wiederum einen Teil ihren Nachbarn usw. Die Teilchen des Körpers werden dadurch gewissermaßen zu Geschossen, die mit großer Geschwindigkeit wegfliegen, bis durch die Widerstände der Umgebung die Geschwindigkeit Null wird. Dabei setzen sich die Massen mit den größten Beschleunigungen nach denjenigen Richtungen in Bewegung, in denen der Widerstand einschließlich desjenigen Widerstandes, der von der Trägheit der Massen selbst herrührt, am kleinsten ist.

Das Wegschleudern der Teilchen des betreffenden Körpers erfolgt dann am stärksten und die scheinbare Explosivwirkung ist folglich dann am größten, wenn sich die Teilchen des Körpers leicht gegeneinander verschieben lassen (bei Flüssigkeiten). Dagegen fällt die Wirkung weg, wenn zwischen den Teilchen des Körpers große Reibung besteht (z. B. bei trockenem Quarzsand); im letzteren Falle wird die Geschößenergie zum größten Teil unmittelbar in Reibungswärme umgewandelt.

Der Vorgang der scheinbaren Explosivwirkung ist also in der Tat sehr ähnlich demjenigen beim Zerreißen eines Körpers durch eine Sprengladung; nur mit dem Unterschied, daß die Massenteile ihre Beschleunigung beim Durchschießen durch den Stoß des Geschosses, beim Sprengen durch den Druck der erzeugten Gase erhalten. Auch bei Sprengungen bilden sich die Krater derart, daß ihre Achsen in die Richtung des kleinsten Widerstandes fallen.

Wenn also z. B. in eine Tonplatte geschossen wird, so geht folgendes vor sich: Es treten die Tonteile zuerst am Einschuß nach der Waffe zu aus, weil sie hier den kleinsten Widerstand finden. Als dann findet dasselbe am Ausschuß statt. Innerhalb des durchschossenen Körpers bildet sich um die Schußlinie herum eine Druckzone, deren Durchmesser von der Geschößenergie und von der Beschaffenheit

des Materials abhängt, nämlich mit der Reibung und Kohäsionskraft der Teilchen unter sich abnimmt. Man kann somit dieselbe Masse (Wasser oder feuchten Ton) sowohl so anordnen, daß die ganze Masse heftig explodiert, als auch so, daß von einer Explosion kaum

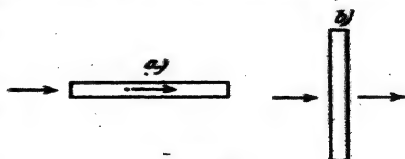


Abb. 121.

geredet werden kann. Im ersteren Fall wird man die Masse möglichst in der Nähe der Schußlinie (s. Abb. 121a), im zweiten Falle möglichst senkrecht zu ihr verteilen (s. Abb. 121b).

Mit Vorstehendem stimmt überein, daß die Wirkung gegen Wasser sehr energisch, gegen dicken Leim geringer, gegen Holz und Kautschuk (wegen deren bedeutender Kohäsionskraft) und gegen trockenen Sand (wegen dessen Reibung) sehr klein ist. Bei Sand kann wegen der Reibung der scharfkantigen Quarzteile eine Explosionswirkung kaum aufkommen; ein 6 mm-Geschoß von fast 800 m/sec Geschwindigkeit drang nur etwa 15 cm in ausgeglühten Quarzsand ein. Nach dem Schuß fühlte sich der Sand heiß an, die Geschossmantelteile waren blau angelaufen, nahezu die ganze Geschossenergie wird hier durch die Reibung in Wärme verwandelt. Ein großer Teil des Geschosses selbst scheint dabei zu zerstäuben oder zu verdampfen. (In der Mauserschen Gewehrfabrik Oberndorf a. N. wurden über 1 Million Infanteriegeschosse von je 10 g in einen Kugelfang aus trockenem Sand verfeuert; später fanden sich nach einer Mitteilung von P. Mauser II nur etwa 500 kg Metall vor statt etwa 10000 kg.) Bei Anfeuchtung des Sandes tritt die Explosivwirkung mehr und mehr hervor, das Wasser wirkt hier (wie ein Schmiermittel zwischen Lager und Achse) auf Verminderung der inneren Reibung.

Wird ferner mit einem Gewehr- oder Pistolengeschosß und einer Geschwindigkeit von mindestens 600 oder 700 m/sec in einen nach allen Seiten sehr großen Tonblock *ABKJ* geschossen, so ist der Widerstand nach den Seiten und in der Schußrichtung so groß, daß eine sichtbare Explosionswirkung nur nach der Waffe zu eintreten kann. Im Innern bildet sich die in der Abbildung 122 angedeutete

Höhlung. (Weiteres darüber siehe weiter unten.) Das Einschußloch ist kraterförmig erweitert und von einem Durchmesser, der erheblich größer ist als derjenige des Geschosses, ausgenommen, wenn längs *AB* ein Widerstand, z. B. eine Holz- oder Blechwand angebracht ist. Der Rand ist meistens aufgeworfen. Dahinter folgt eine mächtige Erweiterung; hier ist die in Betracht kommende Verbindung von Massenwiderstand und Geschossenergie am größten. Die Höhlung

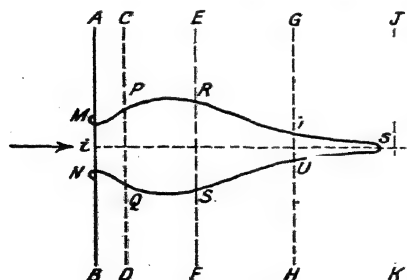


Abb. 122.

schließt sich z. B. bei Kautschuk wieder fast vollständig durch die Elastizität, bei Wasser schließt sie sich durch das Gewicht, abgesehen davon, daß beim Einschuß eine Wassergarbe heraustritt, sie schließt

sich also vollständig beim lotrecht Abwärtsschießen in eine große Wassermasse. Wenn man die Tonmasse längs  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$  durchschneidet, so daß hier Luftschichten vorhanden sind, so ist die Höhlung von ähnlicher Form, doch treten bei  $PQ$ ,  $RS$ ,  $TU$  alsdann wegen des geringeren Widerstandes Ausstülpungen ein.

Speziell mit Ton haben insbesondere die Medizinalabteilung des Pr. Kriegsministeriums, ferner A. v. Obermayer und die Versuchsanstalt für Handfeuerwaffen in Halensee (E. Thiel) systematische Versuche angestellt. E. Thiel fand bei Verwendung von Teilmantelgeschossen oder von Ganzmantelgeschossen mit wenig abgefeilter Spitze oder von Hohlsplitzengeschossen u. U. einen ziemlich glatten Einschuß mit nach innen gezogenen Rändern bei großen Tonplatten (sog. Afterwirkung). E. Thiel erklärte diese eigentümliche Erscheinung als eine Sekundärwirkung: Die Ränder des Einschußblochs sind zunächst nach außen aufgestülpt; im Innern des Tonblocks entsteht in sehr kurzer Zeit ein luftverdünnter Verdrängungsraum durch die Explosivwirkung des Geschosses; in diesen Raum stürzt die Luft von außen herein und drückt die Ränder nach innen. Die Richtigkeit dieser Erklärung hat J. Schatte durch Aufnahmen mit dem in Band III beschriebenen kinematographischen Apparat im ballistischen Laboratorium bewiesen: Man sieht, wie die Ränder zuerst nach außen gebogen werden und erst dann nach innen sich einziehen; wie ein Tonstück wieder hereinfliegt usw. Dabei wurde das in normaler Stellung und mit normaler Anfangsgeschwindigkeit auf kurze Entfernung verschossene  $S$ -Geschöß benutzt.

Einige Messungsversuche seien hier noch mitgeteilt, die 1909 im ballistischen Laboratorium mit feuchtem Ton und mit dem normalen  $S$ -Geschöß auf Veranlassung des Verfassers angestellt wurden; spezifisches Gewicht des plastischen Tons = 1,8.

a) Rechteckige Tonplatten von gleicher Höhe 60 cm, Breite 60 cm, Dicke 10 cm, mit Geschossen M. 98  $S$  von verschiedener Geschwindigkeit beschossen;  $v_0$  Auftreffgeschwindigkeit; Durchmesser des Schußblochs vorn am Einschuß  $d_e$ , in der Mitte  $d_i$ , hinten am Ausschuß  $d_a$ ; Größe der Ausstülpungen vorn am Einschuß  $a_e$ , hinten am Ausschuß  $a_a$  (Abb. 123):

$v_0$	Schußöffnungen			Ausstülpungen	
	$d_e$	$d_i$	$d_a$	$a_e$	$a_a$
	cm	cm	cm	cm	cm
870	10	8	11	4	4
710	10	8	11	4	3,5
633	5,5	4,5	10	2	3
525	4	4	8	2	2,5
475	4	4	7,5	2	2,5
400	3,5	3,5	7	2	2
388	3	3	7	2	1,5
330	3	4	6	2	2
200	2	3	5	sog. Afterwirkung { 1,5 1	
100	1	2	3		

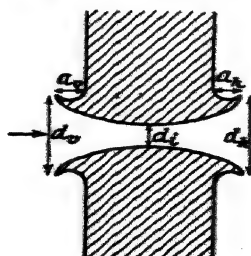


Abb. 123.

b) Tonplatten von gleicher Dicke 10 cm, aber von ungleicher Höhe = Breite mit  $v_0 = 870$  m/sec beschossen; es wurde untersucht, bei welcher Maximalhöhe (= Breite) der Platte die ganze Platte noch explosionsartig zerspringt: Es zeigte sich, daß Platten von 20 cm Höhe und Breite gerade noch oder gerade noch nicht vollständig zersprangen.

c) Tonplatten von gleicher Höhe 60 cm, gleicher Breite 60 cm, aber wechselnder Dicke mit *S*-Geschossen von gleicher Auftreffgeschwindigkeit 870 m/sec beschossen.

Plattendicke	Schußöffnungen			Ausstülpungen	
	$d_v$	$d_i$	$d_k$	$a_v$	$a_k$
cm	cm	cm	cm	cm	cm
0,5	4,5	3,2	4,5	3,5	0,4
2,0	8	5,5	8,5	1,5	1,5
4,0	11	7,5	12	3	3
6,0	11	7,5	12,5	3,5	4,5
10,0	12	8	14	3,5	4,5
20	11	12	25	5	5
30	12	15	20	5	5

d) Tonkugeln von wechselndem Durchmesser mit *S*-Geschossen von gleicher Auftreffgeschwindigkeit 870 m/sec zentral beschossen: Bei Kugeln bis zu 30 cm aufwärts trat stets totale Explosionswirkung, vollständiges Zerspringen der Kugeln ein. Erst eine Kugel von 45 cm Durchmesser blieb ganz. Die Einschußöffnung hatte einen mittleren Durchmesser von 4 cm, die Auschußöffnung einen solchen von 8 cm. Im Innern befand sich ein nahezu kugelförmiger Hohlraum von 25 cm Durchmesser. Sowohl am Einschuß wie am Ausschuß hatten sich die ursprünglichen Ausstülpungen wieder nach innen gezogen (sog. Afterwirkung); Teile davon lagen auch im Innern. Das Geschöß hatte sich im Innern der Tonkugel gewendet und ging nach oben heraus, während es wagrecht eingeschossen worden war.

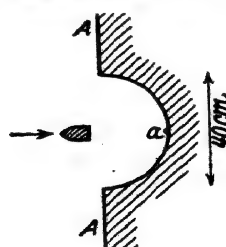


Abb. 124.

e) Tonplatten wie bei a), also von 60 cm Höhe, 60 cm Breite und 10 cm Dicke wurden mit dem *S*-Geschöß ( $v_0 = 870$  m/sec) beschossen, wobei erstens wie gewöhnlich die Spitze des *S*-Geschößes, zweitens der Boden des Geschößes nach vorn stand. Im ersten Fall war der Durchmesser  $d_i$  der Schußöffnung wieder 8 cm; im zweiten Fall, also wenn das Geschöß umgekehrt in die Patrone eingesetzt war, wurde die Öffnung erheblich größer, nämlich  $d_i = 26$  cm.

f) Gegen einen großen Tonblock von etwa 1 cbm Inhalt, mit ebener Auftrefffläche *AA* wurde mit umgekehrtem *S*-Geschöß geschossen (Abb. 124). Es bildete sich eine halbkugelförmige Mulde in der ebenen Vorderfläche des Blocks; Durchmesser der Vertiefung 40 cm, Tiefe 20 cm, die Ränder stark ausgetülpelt. Im tiefsten Punkt der Mulde (bei *a*) lag der zerfetzte Stahlmantel des Geschößes, vom Bleikern vollständig befreit. (Ausführung der Versuche und Messungen durch Oblt. Schatte.)

## § 78. Ablenkungen der Geschosßbahn im Ziel. Streifschüsse. Ricochettieren.

### 1. Ablenkung des Geschosses im Ziel.

Wie im vorhergehenden ausgeführt wurde, entsteht im Innern eines Körpers, z. B. eines Tonblocks  $EFHG$ , in den das Geschosß eindringt, eine Druckzone  $ABDC$  um die Schußlinie (vgl. schematische Abb. 125); das Geschosß stößt gegen die nächstliegenden Teilchen, diese stoßen ihre Nachbarn usw. Auf das Geschosß selbst macht sich eine kräftige Druckreaktion geltend, die sich häufig in Zerquetschung des Geschosses äußert (s. oben). Handelt es sich dabei um ein nicht rotierendes Geschosß, das aus glattem Lauf verfeuert wird, so ist keine Veranlassung zu einer wesentlichen Abänderung der Geschosßbahn gegeben, vorausgesetzt, daß die Tonmasse sehr groß und völlig homogen ist und die Geschosßachse genau in der Bahntangente liegt; in diesem Falle sind um die Geschosßbahn herum die Drücke symmetrisch verteilt.

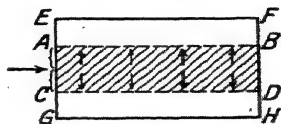


Abb. 125.

Anders ist es bei rotierenden Langgeschossen. Wenn (bei Rechtsdrall der Waffe) das Geschosß von hinten gesehen im Sinne des Uhrzeigers rotiert, so wird eine sehr kleine anfängliche Schiefstellung der Geschosßachse oder eine Unsymmetrie in der Tonmasse genügen, um kräftige Pendelungen im Sinne des Uhrzeigers auszulösen. Steht dabei die Geschosßspitze beim Einschuß z. B. nur sehr wenig nach oben, so wird die Spitze durch den Widerstand des Materials gehoben und geht dann rechts. Das Geschosß als Ganzes wird sich in diesem Fall nach oben und, wenn die Bahn des Geschosses innerhalb der Tonmasse genügend groß ist, nach rechts wenden. Stand die Geschosßspitze etwas nach unten, so geht das Geschosß nach unten und links. Derartige Erscheinungen sind bei Artillerie- und Infanteriegeschossen sehr häufig beobachtet worden. Selbst ein teilweises bumerangartiges Umkehren des Geschosses innerhalb des Ziels, ja selbst ein Zurückspringen nach der Waffe zu kommt vor.

Indessen auch aus einer anderen Ursache als der der Rotation können starke Ablenkungen des Geschosses erfolgen, wenn nämlich der betreffende Körper, z. B. der Tonblock, einseitig getroffen wird, so daß die Druckzone  $ABDC$  bis zur Grenzfläche  $EF$  des betreffenden Körpers reicht oder z. T. (s. Abb. 126) außerhalb des Körpers fällt. Im Fall der Abb. 126 ist die Druckreaktion des Tons gegenüber dem Geschosß unterhalb der Schußlinie größer als oberhalb.

Das Geschöß bewegt sich nach der Seite des kleineren Widerstands und weicht nach oben ab.

Man versteht so, weshalb ein Geschöß bei Streifschüssen eine

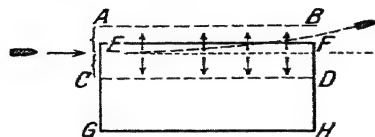


Abb. 126.

starke Abweichung von seiner vorhergehenden Bahn erfahren kann, und weshalb ein Geschöß, das nicht weit von der Oberfläche einer Wassermasse wagrecht in diese eingeschossen wird, nach oben herausspringt, falls die Geschößgeschwindigkeit genügend groß ist.

## 2. Ricochettieren des Geschosses.

Ein solches Herausspringen kann auch bei schiefem Einschuß erfolgen, wenn nur das Einschießen unter kleinem Winkel gegen die Zioberfläche erfolgt.

Man hat alsdann ein Abprallen und ein Weitergehen des (nicht krepierenden) Geschosses in anderer Richtung.

Ob ein Geschöß abprallt oder nicht, hängt ab von der Beschaffenheit des Zielgeländes, der Form und Stellung des Geschosses und von dem Einfallwinkel. Nach v. Chrismar ricochettierten französische 10-cm-Geschosse auf einer Sandfläche bei einem Auffallwinkel bis zu  $10^\circ$  aufwärts, 32-cm-Geschosse bei spitzem Auffallwinkel bis zu  $28^\circ$  stets, und gingen auf dem Kruppschen Schießplatz auf 1500 m zum erstenmal einschlagende 26-cm-Geschosse bei gefrorenem Boden und tauendem Schnee in Sprüngen über 8000 m weit.

Endlich kamen (gleichfalls nach v. Chrismar, vgl. Lit.-Note) beim Schießen mit Marine-Geschossen gegen eine glatte Wasseroberfläche die Geschosse wieder heraus, und zwar meist mit starker seitlicher Abweichung, falls der spitze Einfallwinkel kleiner als  $25^\circ$  war; französische 32-cm-Geschosse gingen auf diese Weise von 1500 m bis 11000 m in zahlreichen Sprüngen weiter; bei Seegang beobachtet man ein Weitergehen oder ein Eindringen des Geschosses je nach dem Auftreffen auf den Wellenberg.



Abb. 127.

Über diesen Gegenstand hat C Ramsauer (vgl. Lit.-Note) interessante Messungen durchgeführt: Es wurden Messingkugeln von 5,85 g Gewicht und 11 mm Durchmesser aus glattem Lauf mit der Geschwindigkeit 621 bis 625 m/sec unter verschiedenen Auftreffwinkeln  $\alpha$  in einen großen Wasserkasten geschossen. Gemessen wurde der Austrittswinkel  $\beta$  und die Austrittsgeschwindigkeit  $v_2$ . Es fand sich für

$\alpha = 1^{\circ} 1' 23''$ ,	$\beta = 1^{\circ} 0' 17''$ ,	also $\alpha - \beta = 1' 6''$
1 58 12	1 54 17	3 55
3 2 55	2 51 34	11 21
4 0 34	3 47 32	13 2
5 0 49	4 39 12	21 37
5 59 40	5 33 51	25 49
6 40 13	5 52 3	48 10

Auftreffgeschwindigkeit dabei  $v_0 = 621,2$  m/sec.

Wurde  $\alpha$  noch größer, nämlich gleich  $7^{\circ}$  gewählt, so erhob sich das Geschosß nicht mehr aus dem Wasser. Die Versuchsreihe läßt erkennen, daß der Austrittswinkel  $\beta$  stets kleiner ist als der Einfallswinkel  $\alpha$ . Daraus erklärt sich, weshalb Kugeln auf dem Wasser eine große Zahl von Sprüngen ausführen können (Ricochettieren auf Wasser. Bekanntlich läßt sich die diesbezügliche Erscheinung mit flachen Steinen auf Wasser leicht erzeugen).

Die Bahnen der Kugeln innerhalb des Wassers wurden von C. Ramsauer mit Hilfe von Schirmen festgestellt, die parallel zueinander in lotrechtér Lage in das Wasser gestellt wurden. Daß die Schirme zerrissen wurden, erst nachdem die Kugel durch die Schirme gegangen war, bewies er nach dem Bircherschen Verfahren. Auch beim Schießen aus Geschützen zeigen sich nicht selten Geschosßbahnen ähnlich der obigen  $AOB$  auf weichem, mit starker Grasnarbe versehenem Erdboden.

Der zweite Teil  $OB$  der Geschosßbahn ist dabei völlig unabhängig von dem ersten  $AO$ . Wurde nämlich eine Luftschicht  $CDFE$  in der Gegend des auf eine kurze Strecke horizontalen Teils der Geschosßbahn zuzuführen, so änderte sich an der Erscheinung nichts. Es ist dies in Übereinstimmung mit dem, was oben über das wagrechte Einschießen in Wasser nicht weit von der Oberfläche gesagt wurde; C. Ramsauer stellte auch derartige Versuche an; ferner zeigte er, daß ein ähnliches Heben des Geschosses bewirkt wird, wenn durch zehn parallele Bleiplatten von 3 mm Dicke, die je 2,5 cm voneinander entfernt lotrecht aufgestellt wurden, im Maximalabstand 9 mm vom oberen Rand wagrecht hindurchgeschossen wurde.

Die Austrittsgeschwindigkeit  $v_e$  beim schiefen Einschießen in Wasser wurde nach dem Pouillet'schen Verfahren zu verschiedenen Einfallswinkeln gemessen:

Zu $\alpha =$	$1^{\circ} 2' 13''$	$2^{\circ} 0' 44''$	$6^{\circ} 2' 31''$	$6^{\circ} 49' 27''$
gehört $v_e =$	608,3	571,5	221,5	67,5 m/sec,

dabei war  $v_0 = 625,3$  m/sec. Wenn also  $\alpha =$  etwa  $7^{\circ}$  gewählt wird,





Abb. 128.

so ist die Geschwindigkeit des Geschosses durch den Wasserwiderstand schon derartig vermindert, daß das Geschöß nicht mehr nach oben heraustreten kann, sondern innerhalb des Wassers die Bahn  $OGH$  durchlaufen muß (Abb. 128).

## Zwölfter Abschnitt.

# Die Aufstellung von Schießbehelfen.

Bearbeitet von K. Becker.

Die durch reine Rechnung oder besser durch eine entsprechende Kombination von praktischen Versuchen, Rechnung und graphischem Ausgleich gewonnenen Beziehungen zwischen den Anfangselementen der verschiedenen Flugbahnen (Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , Abgangswinkel  $\varphi$ , Seitenrichtung) und den Endelementen der gleichen Flugbahnen für den Auffallpunkt im Mündungshorizont (horizontale Gesamtschußweite  $X$ , zugehörige Gesamtflugzeit  $T$ , Fallwinkel  $\omega$ , Endgeschwindigkeit  $v$ ) werden entweder in Form von Tabellen („Erd-schußtafeln“ in Buchform) oder in entsprechenden graphischen Darstellungen oder auch, soweit die Beziehung zwischen den Anfangselementen und der Gesamtschußweite in Betracht kommt, in der Meterteilung der Richtmittel für den praktischen Gebrauch durch den Infanteristen oder Artilleristen niedergelegt. Für das Beschießen von Zielen außerhalb des Mündungshorizontes sind, soweit die Verhältnisse das einfache Schwenken der Geschößbahnen nicht mehr zulassen (vgl. § 42), also für die Flugabwehr und für den Gebirgskrieg, besondere Schießbehelfe nötig, die über den gesamten Verlauf der Geschößbahnen in geeigneter Weise Aufschluß geben: Flugbahn-bilder, graphische Schußtafeln, Ordinaten Tabellen usw.

Alle diese Schießbehelfe gelten genau nur für gewisse „schußtafelmäßige“ Normalbedingungen bezüglich der Anfangsgeschwindigkeit, des Geschößgewichtes, des Bodenluftgewichtes, ferner für normalen Verlauf der Abnahme des Luftgewichtes mit der Höhe und für Windstille. Beim praktischen Schießen sind indessen diese „schußtafelmäßigen“ Verhältnisse vielfach nicht vorhanden. Dadurch treten mehr oder minder große Abweichungen der tatsächlichen Lage des mittleren Treffpunktes von der beabsichtigten (schußtafelmäßigen) Lage ein. Diesen Abweichungen hat man im allgemeinen vor dem Jahre 1914 entweder durch Korrekturen der Treffpunktslage auf Grund von Beobachtungen (Einschießen) oder, wo ein Einschießen

nicht möglich war, durch „Streuen“ (Abgabe von Schußgruppen, deren Höhen- und Seitenrichtung, evtl. auch Zünderstellung man in weiten Grenzen, oft bis zu 10<sup>0</sup>/<sub>0</sub> der kartenmäßigen Zielentfernung und mehr variierte) Rechnung zu tragen versucht. Schon in den ersten Monaten des Weltkrieges zeigte sich indessen, daß das Einschießen in vielen Lagen nicht möglich war, das Streuen aber einen bedeutenden Munitionsverbrauch brachte, den Eintritt der Wirkung verzögerte und zu schnellerer Abnutzung der Rohre führte. So sind denn bald auf beiden Seiten Korrektionstabellen aufgestellt worden, aus denen auf Grund gewisser innerballistischer Ermittlungen und meteorologischer Messungen diejenigen Verbesserungen für Höhen- und Seitenrichtung, u. U. auch für die Zünderstellung, festgestellt werden können, die durch Abweichungen der Tagesbedingungen von den schußtafelmäßigen Bedingungen („Tageseinfüsse“ oder jetzt in der deutschen Artillerie „besondere Einfüsse und Witterungseinfüsse“ genannt) nötig werden. Über die Aufstellung dieser Korrektionstabellen (Tafeln zur Ausschaltung der besonderen Einfüsse und der Witterungseinfüsse, abgekürzt B.W.E.-Tafeln) wird daher im Anschluß an die Aufstellung der für normale Bedingungen geltenden Schießbehelfe noch besonders zu sprechen sein.

Die nachstehenden Darlegungen beschäftigen sich in der Hauptsache eingehender mit denjenigen Verfahren zur Aufstellung der Schießbehelfe, die in und nach dem Weltkriege unter der Mitarbeit zahlreicher namhafter Fachgelehrter bei der Artillerie-Prüfungskommission als zweckmäßig erprobt worden sind. Ein allgemein gültiges Rezept können und sollen die Ausführungen indessen nicht geben. Sache des mathematisch-physikalisch und praktisch-experimentell geschulten Ballistikers ist es, im besonderen Falle die zweckmäßigste Rechen- oder Ausgleichsmethode herauszusuchen und anzuwenden. Hierzu bieten die Darlegungen der früheren Abschnitte die beste Grundlage.

## § 79. Die rein rechnerische Aufstellung der Erdschußtafeln.

### A. Bahnberechnung in Teilbogen.

Bei großen Anfangsgeschwindigkeiten (etwa von 600 m/sec an aufwärts) ist die Berechnung der Geschosßbahn in Teilbogen, auch wenn es nur auf die Gesamtschußweite ankommt, unter Berücksichtigung der Abnahme des Luftgewichts mit der Höhe — wenigstens zur Erzielung genauerer Ergebnisse — der Berechnung in einem einzigen Zuge vorzuziehen. Bei der oberen Winkelgruppe wird man schon von einer Anfangsgeschwindigkeit von 300 m/sec an aufwärts, wo die Methode Euler-Otto zu versagen beginnt, zur Berechnung

in Teilbogen übergehen müssen. Bei dieser Teilbogenberechnung ist die Wahl des Formkoeffizienten  $i$  (siehe später unter B. 2) im allgemeinen wichtiger als die Wahl der Lösungsmethode, für die eines der Verfahren des 7. Abschnittes benutzbar ist. Besonders bequem für die Rechnung gestaltet sich die Eberhardsche Lösung (siehe § 40), die man indessen, soweit nicht ausgesprochene Fernbahnen vorliegen, etwas modifizieren kann.

Die bei der Geschößbahnberechnung in einzelnen Bögen nach O. v. Eberhard zu benutzenden Tafeln der sekundären Funktionen nach Fasella sind abgeleitet aus den Tafeln der primären Funktionen von Siacci (1896). Zugrunde liegt daher auch den Fasella-Tafeln das einheitliche Luftwiderstandsgesetz von Siacci. Da in § 30 bereits allgemein über die Aufstellung von Tafeln sekundärer ballistischer Funktionen gesprochen ist, kann die Herleitung der sekundären Funktionen nach Fasella hier unterbleiben. Sie findet sich im übrigen auch ausführlich in der Einleitung zu den Zahlentafeln von Fasella selbst.

Fasella führt zunächst einen reduzierten ballistischen Koeffizienten  $c'$  ein, der mit dem Koeffizienten von Siacci (1896) verknüpft ist durch die Beziehung:  $c' = \frac{1}{c \cdot \beta}$ . Demnach ist

$$c' = \frac{P}{1000 \cdot (2R)^2 \cdot i \cdot 0,896 \cdot \lambda \cdot \beta} \quad (1)$$

Darin bedeutet  $P$  das Geschößgewicht in kg,  $2R$  das Kaliber in  $m$ ,  $i$  den Formkoeffizienten, der für Kruppsche Normalgeschosse gleich der Einheit sein soll.  $\beta$  ist der Siaccische Ausgleichsfaktor, der aber bei der stückweisen Bahnberechnung nach O. v. Eberhard für die einzelnen Teilbögen nach den Angaben des § 40 jeweils gesondert berechnet werden muß.  $\lambda$  ist das Verhältnis des wirksamen Luftgewichts zum Normalluftgewicht am Boden, das Fasella, wie in den außerdeutschen Staaten meist üblich, zu 1,206 kg/cbm festsetzt. Nimmt man zur Abkürzung

$$C_0' = \frac{P}{1000 \cdot (2R)^2 \cdot i \cdot 0,896}, \quad (2)$$

so kann  $C_0'$  (von Sonderfällen abgesehen, in denen auch der Formkoeffizient  $i$  etwa wegen des zunehmenden Ausschlags der Geschößachse entlang einer Bahn verändert werden muß) als Konstante für die gesamte Bahn angesehen werden, während  $\lambda$  und  $\beta$  und damit auch

$$c' = \frac{C_0'}{\lambda \cdot \beta} \quad (3)$$

von Teilbogen zu Teilbogen zu ändern ist. Die zur Flugbahnberechnung in Teilbögen nötigen Funktionen von Fasella sind die folgenden:

$$D(u) - D(v_0) = f_0$$

$$\frac{A(u) - A(v_0)}{D(u) - D(v_0)} - J(v_0) = f, \quad (5)$$

$$\frac{J(u) - \frac{A(u) - A(v_0)}{D(u) - D(v_0)}}{\frac{A(u) - A(v_0)}{D(u) - D(v_0)} - J(v_0)} = f_2, \quad (6)$$

$$T(u) - T(v_0) = f_3, \quad (7)$$

$$J(u) - J(v_0) = f_4. \quad (8)$$

Zwischen den sekundären Funktionen  $f$ ,  $f_2$  und  $f_4$  besteht noch der manchmal zu verwertende Zusammenhang

$$f \cdot (1 + f_2) = f_4. \quad (9)$$

Mit diesen sekundären Funktionen geht das Gleichungssystem von Siacci III für einen beliebigen Flugbahnpunkt über in

$$\frac{x}{c'} = f_0. \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot f_4, \quad (11)$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x}{2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot c' \cdot f, \quad (12)$$

$$t = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot f_3, \quad (13)$$

$$v = \frac{u \cdot \cos \varphi}{\cos \vartheta} \quad (\text{wie bei Siacci III}). \quad (14)$$

Dazu entwickelt Fasella noch die weitere, in bestimmten Fällen verwendbare Beziehung

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varepsilon} = f_2 \quad (15)$$

worin  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varepsilon$ , also  $\varepsilon$  der Geländewinkel nach dem Flugbahnpunkt  $(x, y)$  ist. Das Formelsystem (10) bis (14) wird zur stückweisen Flugbahnberechnung benützt. Man kann dabei den in § 40 empfohlenen Weg einschlagen, indem man die Zoneneinteilung nach Schichten gleicher Dicke vornimmt. Beim Vergleich von photogrammetrisch festgelegten Flugbahnen, vor allem aber der zahlreichen, während des Krieges aufgenommenen Geschoßbahnen von Flugabwehrkanonen ist indessen von Gleichung (11) ausgegangen worden, die auf folgende Form gebracht wurde:

$$f_4 = (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \vartheta) \cdot \frac{2 \cos^2 \varphi}{c'}. \quad (16)$$

Der Rechnungsgang ist dann schematisch der folgende: Berechnung der Konstanten  $C_0'$  nach Formel (2); Wahl des Neigungswin-

kels  $\vartheta_1$  der Flugbahntangente am Ende des ersten Teilbogens. Schätzung der Höhe  $y_1$  der ersten Schicht. Bestimmung des Dichteverhältnisses  $\lambda_1$  für die Mitte dieser Schicht (am besten zu entnehmen aus der Tabelle bei Wiener, Die streckenweise Berechnung der Geschosbahnen, S. 59, wo das Dichteverhältnis mit  $c$  bezeichnet ist). Schätzung der Geschwindigkeit  $v_1$  am Ende des ersten Teilbogens. Diese Schätzung von  $y_1$  und  $v_1$  wird wesentlich erleichtert, wenn man in einer Vorberechnung bei konstantem  $c'$ -Wert mittels der Formeln (11) bis (14)  $\vartheta$ ,  $y$  und  $v$  in bestimmten Intervallen berechnet, als Funktion von  $x$  aufträgt und die erhaltenen Kurven dann nach der Teilbogenberechnung stückweise verbessert. Hiernach wird der mittlere Wert  $\beta_1$  für den ersten Teilbogen nach Eberhard (§ 40) bestimmt. Berechnung von  $c_1'$  nach Formel (3). Berechnung von  $f_1$  nach Gleichung (16). Zu  $f_1$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gibt die Tafel VI bei Fasella den Wert  $f_{0(1)}$ . Damit erhält man aus Formel (10)  $\xi_1$ , aus (12)  $\eta_1$ , aus (13)  $\tau_1$ , aus (14)  $v_1$  für das Ende des ersten Teilbogens, wobei die Funktionen  $f$  und  $f_2$  sowie  $u$  bezüglich aus den Tafeln II, V und I von Fasella gefunden werden. (Zur Unterscheidung der auf die Mündung bezogenen Werte  $x$ ,  $y$ ,  $t$  sind dabei im vorstehenden die auf den Anfang des jeweiligen Teilbogens bezogenen Werte mit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$  bezeichnet.) Der Vergleich der zu Beginn jeder Teilbogenberechnung geschätzten Höhe sowie der geschätzten Geschwindigkeit am Ende des Teilbogens mit den errechneten Werten zeigt, ob die Rechnung für denselben Teilbogen mit den genaueren Werten wiederholt werden muß. Wie weit man dabei mit der Annäherung der errechneten an die geschätzten Werte gehen muß, ergibt sich ebenso wie die Zahl der für eine Bahn gewählten Teilbögen und die Art der Unterteilung durch den Vergleich aus genaueren Durchrechnungen mit engerer Bogenunterteilung und grundsätzlicher Wiederholung jeder Bogenberechnung für gewisse Bahntypen. Für die artilleristische Praxis kann das Endergebnis der Rechnung als völlig genau angesehen werden, wenn die Abweichungen errechneter von erschossenen und möglichst empirisch (siehe unten) auf Windstille zurückgeführten Werten gleich oder kleiner sind als die halbe 50 prozentige Streuung auf der betreffenden Entfernung.

Für den zweiten Teilbogen dienen die Endelemente des ersten Teilbogens als Anfangselemente usw. Schließlich wird für einen Punkt  $(x, y)$ , bis zu dem die Berechnung durchgeführt wird,

$$x = \sum \xi; \quad y = \sum \eta, \quad t = \sum \tau.$$

Die Bahngeschwindigkeit im Punkte  $(x, y)$  ist gleich der Bahngeschwindigkeit am Ende des letzten Teilbogens.

Bei ganz steilen Bahnen (über  $70^\circ$ ) versagen die Fasella-Tafeln in der Nähe des Scheitels. Ihre Verlängerung nach der Richtung kleinerer Geschwindigkeiten ist daher erwünscht.

## B. Berechnung der Endelemente einer Flugbahn in einem Bogen.

Auf die Berechnung in Teilbögen kann verzichtet werden allgemein bei ersten Überschlagsrechnungen der unteren Winkelgruppe (ausgenommen die reinen Fernbahnen), sowie bei Anfangsgeschwindigkeiten unter 600 m/sec und unterer Winkelgruppe, also für die leichte Artillerie bisheriger Leistung; weiter bei kleinkalibrigen Waffen der unteren Winkelgruppe und endlich bei Anfangsgeschwindigkeiten unter 300 m/sec auch für die obere Winkelgruppe (Minenwerfer usw.). Aber auch in diesen Fällen empfiehlt es sich, mit Ausnahme vielleicht der ganz flachen Flugbahnen von Geschützen und Gewehren, die Abnahme des Luftgewichts mit der Höhe dadurch zu berücksichtigen, daß man in einer ersten Näherungsrechnung mit dem Bodenschußgewicht  $\delta_0$  die Gipfelhöhe  $y_s$  errechnet. Man setzt dann für die Wiederholung der Rechnung nach dem Vorschlage von Cranz das Luftgewicht für die Höhe  $\frac{2}{3} \cdot y_s$  oder ein nach § 49 berechnetes ballistisches Luftgewicht  $\delta_s$  ein. Im Zweifelsfalle ist durch Berechnung einer weiten Bahn der betreffenden Schußtafel in Teilbögen und in einem Bogen festzustellen, inwieweit das einfachere der beiden Verfahren zulässig ist.

### 1. Lösung mit den Tabellen Nr. 10 des Anhangs.

Das bei dieser Lösung benutzte Formelsystem ist vor den Tabellen Nr. 10 des Anhangs angegeben. Der Wert  $i_0 \cdot \beta$  ist dabei nach Vallier mit steigender Genauigkeit:

$$a) i_0 \cdot \beta = i_0 \cdot 1,$$

$$b) i_0 \cdot \beta = i_0 \cdot \cos \frac{2}{3} \varphi,$$

$$c) i_0 \cdot \beta = \frac{6 \cdot i_0 K'(v_0) \cdot \sec^2 \varphi + 5 \cdot i(v_s) \cdot (1 - 0,00011 \cdot y_s) \cdot K'(v_s)}{\{6 \cdot K'(v_0) + 5 \cdot K'(v_s)\} \cdot \sec^2 \varphi}. \quad (16)$$

Der Formkoeffizient  $i$  ist dabei, gleichfalls nach Vallier

1. für  $v > 330$  m/sec:  $i(v) = \gamma_1 \cdot \frac{v - (180 + 2\gamma_1)}{41,5 \cdot (v - 263)}$ , worin  $\gamma_1$  der halbe Öffnungswinkel der ogivalen Bogenspitze in Graden ist.

2. für  $v < 330$  m/sec gilt:

für $\gamma_1 =$	31°	33°,6	36°,9	41°,5	49°,2
ist $i$	0,67	0,72	0,78	1,00	1,10

$i_0$  bedeutet dabei den Wert von  $i$  für  $v = v_0$ . Für die früheren Krupp'schen Normalgeschosse mit ogivaler Spitze von 2 Kalibern Spitzenradius ist der Formkoeffizient konstant  $i_0 = 1$ . Nach O. v. Eberhard ist der  $i$ -Wert gegeben durch die Gleichungen des § 10, S. 60. Den Wert von  $K'(v)$  in obiger Formel c) für  $i_0 \cdot \beta$  entnimmt man der Tabelle in § 10, Ziffer c) Nr. 8 am Schluß. Die dabei benutzten Luftwiderstandsgesetze enthält § 28. Für die Wahl des Höhenluftgewichts gilt das zu Beginn des Abschnitts B. dieses Paragraphen Gesagte.

## 2. Lösung mit den Tabellen von Siacci III oder Fasella.

Das Formelsystem der Methode Siacci III ist enthalten in § 27. Tafeln für die primären Funktionen zum einheitlichen Luftwiderstandsgesetz von Siacci (III, 1896) findet man in den Tabellen Nr. 11 des Anhangs. Am Schluß dieses Tabellenwerkes ist die  $\beta$ -Tabelle von Siacci, außerdem im Diagramm Nr. VI des Anhangs eine graphische Darstellung für  $\beta$  gegeben. Wo diese Angaben nicht ausreichen, ist  $\beta$  mittels folgender Gleichung zu berechnen:

$$\beta \cdot \left[ 6 \cdot \frac{f(v_0)}{v_0^4} + 5 \frac{f(u_s)}{u_s^4} \right] \cdot \sec^2 \varphi = 6 \cdot \frac{f(v_0)}{v_0^4} \cdot \sec^2 \varphi + 5 \cdot (1 - 0,00011 \cdot y_s) \cdot \frac{f(v_s)}{v_s^4}. \quad (17)$$

Dabei sind  $u_s$  und  $v_s$  unter der Annahme  $\beta = 1$  durch eine Vorberechnung zu bestimmen, die Werte  $f(v)$  und  $f(u)$  aus der Tabelle 6 des Anhanges zu entnehmen.

Durch Spezialisierung der Gleichungen (10) bis (15) für den zweiten Schnitt der Flugbahn mit dem Mündungshorizont (Auffallpunkt:  $x = X$ ,  $y = 0$ ,  $\vartheta = -\omega$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $v = v_e$ ,  $t = T$ ) erhält Fasella folgende Formeln für die Elemente des Auffallpunktes:

$$\frac{X}{c'} = f_0 \quad (18)$$

$$\frac{\sin 2 \varphi}{c'} = f \quad (19)$$

$$\frac{\tan \omega}{\tan \varphi} = f_3 \quad (20)$$

$$v_e = \frac{u \cdot \cos \varphi}{\cos \omega} \quad (21)$$

$$T = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot l \quad (22)$$

$$\frac{\sin 2 \varphi}{X} = f_1 \quad (24)$$

Damit tritt zu den in § 79 A) erwähnten sekundären Funktionen (4)

bis (8) noch eine weitere  $f_1$  hinzu, die bestimmt ist durch

$$f_1 = f : f_0. \quad (25)$$

Zur rein rechnerischen Aufstellung einer Erdschußtafel mittels der Formeln (18) bis (24) unter Benutzung der Tafeln von Fasella hat man zunächst den  $c'$ -Wert nach Gleichung (1) des § 79 zu bestimmen. Dabei wird der ihm zugrundeliegende  $i$ -Wert aus den bei den betreffenden Stellen vorhandenen Erfahrungsgrundlagen ermittelt. Liegen solche nicht vor, so kann die Kruppsche Tabelle der  $i$ -Werte in Tafel 20 des Bandes IV der früheren Auflage dieses Buches benutzt werden, wobei jedoch dann der Faktor 0,896 im Nenner auf der rechten Seite der Formel (1) fortgelassen werden muß. Vom Abgangswinkel ausgehend, gelangt man über Formel (19) dieses Abschnittes zur Funktion  $f$  und von dieser mittels der Tafel II zum Werte  $f_0$ . Dadurch ist mit Formel (18) die Gesamtschußweite gegeben. Geht man von der Schußweite aus, so liefert Formel (18) zunächst  $f_0$ , daraus Tafel II die Funktion  $f$  und damit Formel (19) den Abgangswinkel. Die Berechnung der übrigen Elemente erfolgt mit den Formeln (20), (21) und (22), nachdem man zu  $f_0$  aus den entsprechenden Funktionstafeln die Werte  $f_2$ ,  $u$  und  $f_3$  in der Vertikalspalte der betreffenden Anfangsgeschwindigkeit aufgesucht hat. (Die hierbei wie bei allen Rechnungen in Tabellen mit doppeltem Eingang häufig nötigen doppelten Interpolationen lassen sich, wie nebenbei erwähnt sei, mit der Rechenmaschine bequem und sicher in einer Operation ausführen).

Gleichung (24) wird, wie später gezeigt werden soll, insbesondere zur Bestimmung des  $c'$ -Wertes aus Schießversuchen gebraucht. Zur Berechnung der Koordinaten  $x_s$ ,  $y_s$  des Gipfels, die zur Ermittlung des wirksamen Luftgewichtes bei der Vorberechnung nötig sind, dienen weitere sekundäre Funktionstafeln für  $f_5$  (Tafel VII) und  $f_6$  (Tafel VIII). Die zugehörigen Gleichungen sind

$$x_s = f_5 \cdot X \quad (26)$$

und

$$y_s = f_6 \cdot X \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (27)$$

Der Vorteil der Benutzung dieser und anderer Tafeln mit ballistischen sekundären Funktionen tritt besonders zutage, wenn man die Rechenmaschine in weitgehendem Maße an Stelle der logarithmischen Rechnung benutzt, wobei sich für die Bestimmung der Reziproken und der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen besonders die Tafeln von Lohse (s. Lit.-Note) bewährt haben. Vielfach genügt zur Berechnung auch der Rechenschieber. Zu beachten bleibt, daß zur Flugbahnberechnung in einem Bogen die Tafeln von Fasella ebensowenig wie das ursprüngliche Lösungssystem von Siacci bei der oberen Winkelgruppe angewandt werden dürfen.



### 3. Lösung mittels der Tafeln von Euler-Otto.

Dieses Verfahren gilt nur für Anfangsgeschwindigkeiten bis 240 m/sec und gibt die besseren Ergebnisse bei der oberen Winkelgruppe. Es kommt daher in der Hauptsache für die Schußtafelberechnung der Minenwerfer in Betracht. Die Tabellen Nr. 7 des Anhangs enthalten auch die Angabe über den ballistischen Koeffizienten dieser Lösungsmethode.

## § 80. Die Schußtafelberechnung nach Schußtafelversuchen.

### A. Ausgangsgrundlagen.

Nähere Angaben über die praktische Ausführung von Schußtafel-schießen gibt Heydenreich (s. Lit.-Note), die jedoch in vieler Hinsicht als veraltet gelten müssen. Die beste theoretische Verteilung der für einen Schußtafelversuch zur Verfügung stehenden Munitionsmenge behandelt der § 73 D. dieses Buches (am Schluß). In der Praxis wird man mit dem Erschießen der mittleren Schußweite  $X$  zu jedem Abgangswinkel  $\varphi$  auch die mittleren (50 prozentigen) Streuungen für die betreffende Entfernung feststellen und daher für das einzelne Trefferbild wenigstens 10, womöglich 15 Schuß aufwenden (vgl. § 66, 3. Absatz). Wenn die Munitionslage es erlaubt, empfiehlt sich z. B. für eine Ladung das Erschießen der mittleren Treffpunktslage bei Abgangswinkeln von  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$  und  $45^\circ$ , bei Geschützen mit oberer Winkelgruppe ist entsprechend zu verfahren. Für Geschosse mit Zeitzündern sind ferner die Beziehungen zwischen der Zünderstellung und den Koordinaten der Sprengpunkte, sowie die Flugzeiten bis zum Sprengpunkt empirisch festzulegen. Mit diesen Messungen wird gleichfalls die Ermittlung der Streuungen der Luftsprengpunkte verbunden.

Bei Geschützen mit mehreren Ladungen sind diese Ermittlungen womöglich für alle Ladungen, jedenfalls aber für die größte und die kleinste Ladung sowie für Zwischenladungen in dem Umfange durchzuführen, daß die nichtbeschossenen Ladungen mit Sicherheit interpoliert werden können. Für leichtere Waffen, besonders Gewehre empfiehlt sich die Durchführung paralleler Versuche aus einer größeren Zahl von Waffen. Bei schwereren Geschützen ist dieses Verfahren weniger nötig, auch meist durch die Munitionslage ausgeschlossen.

Zur Aufstellung der Schußtafeln aus den Schießergebnissen sind demnach folgende Messungen und Feststellungen unerlässlich:

1. Schußrichtung in genauen geographischen Angaben (möglichst auch Winkelabweichung der senkrechten Ebene durch die Seelenachse (Schußebene) von der Nullrichtung des benutzten Schießplatzes). Eine

Verkantung muß sorgfältig vermieden werden, da sie besonders bei der oberen Winkelgruppe bedeutende Fehler bringen kann.

2. Lage der Geschützstellung (Mündung) in Platzkoordinaten (Länge, Seite, Höhe über Normalnull).

3. Höhenlage des jeweiligen Aufschlaggeländes über Normalnull.

4. Periodische Messungen des Luftgewichtes am Boden, wenn möglich  $\frac{1}{2}$  stündlich. Messung des Luftgewichtes in größeren Höhen durch aerologische Sondierungen (Drachen- oder Ballonaufstiege, aerologische Flugzeugaufstiege), diese in Intervallen von höchstens 2 bis 3 Stunden.

5. Windmessungen in geringer Höhe über dem Erdboden durch registrierendes Schalenkreuzanemometer, fortlaufend während des ganzen Beschusses. Ferner Höhenwindmessungen durch Pilotaufstiege möglichst einstündlich oder noch öfter.

6. Angaben über Geschößform (Spitzenradius, konische Verjüngung), Geschößgewichte und Schwerpunktlagen. (Bei Beschüssen, die für die Bestimmung einer Geschößkonstruktion grundlegend sein sollen, sind ferner die Trägheitsmomente um Längs- und Querachse sowie die zur geometrischen Längsachse etwa exzentrische Schwerpunktlage nach einem der im Band III beschriebenen Verfahren zu bestimmen.)

7. Fortlaufende Messung der Pulvertemperatur in den gegen Sonnenbestrahlung und Niederschläge geschützten Kartuschen und Patronen. Mindestens 24stündige Einlagerung der Kartuschen vor dem Beschuß in besonderen wärmeisolierten Behältnissen, die auf eine ganz bestimmte Temperatur eingestellt werden können, ist für eine gleichmäßige Lage der Anfangsgeschwindigkeiten vorteilhaft.

8. Angaben über die Ladungen (Pulverlieferung, Ladungsgewicht, Bestimmung des Feuchtigkeitsgehaltes des Pulvers nach dem Beschuß aus zurückgebliebenen Ladungen gleicher Art).

9. Messung der Anfangsgeschwindigkeit, vielfach zu verbinden mit dem Messen der Abgangsfehlerwinkel. Zum mindesten ist die Anfangsgeschwindigkeit bei jeder Ladung einmal zu Beginn oder am Ende jedes Schußtafelversuches zu messen. Vorteilhaft sind bei längeren Versuchen öftere Messungen, zu Beginn, etwa in der Mitte und am Ende des Versuchs. Durch Auftragen dieser wiederholt gemessenen Anfangsgeschwindigkeiten in Funktion der Uhrzeit ist es dann meist möglich, mit einiger Sicherheit auf die Anfangsgeschwindigkeiten dazwischenliegender Schüsse zu schließen. Am günstigsten für die ballistische Auswertung der einzelnen Schüsse ist es indessen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit mit einem der im Band III näher zu beschreibenden besonderen Verfahren ohne Gitterrahmen Schuß für Schuß gemessen werden kann.

10. Feststellung der Schußweiten (durch Ausmessung der einzelnen Geschoßeinschläge in Platzkoordinaten oder durch photogrammetrische Aufnahme oder durch Anschneiden im Lichtmeßverfahren), Flugzeiten und Seitenabweichungen (diese bezogen auf die Schußebene) für die einzelnen Schüsse. Notierung der genauen Schußzeiten zum Zwecke des Zusammenfindens mit den gleichzeitigen meteorologischen Messungen. (Bei kleinkalibrigen Waffen Treffpunktslagenbeschüsse nach Scheiben und Flugzeitmessungen wenigstens auf den kürzeren Entfernungen.)

11. Bei Brennzünderschüssen außerdem Zünderstellung, Lage der Luftsprengpunkte nach Länge, Seite und Höhe, ferner Flugzeiten bis zu den Sprengpunkten.

12. Bei getrennter Munition sind bei allen Schüssen die Längen der Verbrennungsräume nach dem Ansetzen der Geschosse zu messen.

Einzelheiten über die Ausführung dieser verschiedenen Messungen bringt Band III. Eine mehrfache Wiederholung des gleichen Schußtafelversuchs ist wünschenswert.

### B. Vorbereitende Rechnungen.

1. Umrechnung der beobachteten Schußweiten auf den Mündungshorizont (Reduktion auf Geländewinkel Null).

a) Bei kleinem Abgangswinkel und Geländewinkel, wo das Schwenken der Bahn (vgl. § 42) zulässig ist: Der Abgangswinkel zur Horizontalen sei  $\varphi = \sphericalangle BOA_1$ ; mit ihm werde auf dem geneigten Gelände mit

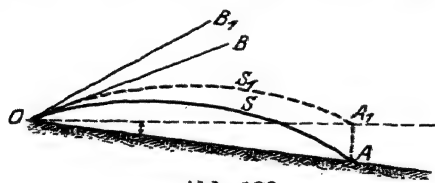


Abb. 129.

der Flugbahn  $O-S-A$  die schiefe Schußweite  $O-A$  erreicht. Der Geländewinkel, negativ genommen, wenn das Gelände vom Geschütz zum Ziel fällt, sei  $\gamma = \sphericalangle A_1OA$ . Man denke sich die Flugbahn  $O-S-A$  und damit auch die Anfangstangente

$O-B$  an die Flugbahn um den Geländewinkel  $\gamma$  nach oben geschwenkt, so daß  $A$  mit  $A_1$  zusammenfällt. Dann ist die wagrechte Schußweite  $O-A_1 = O-A$ . Sie wird erreicht mit einem reduzierten Abgangswinkel

$\varphi_r = \varphi + \gamma$ , wenn das Gelände nach dem Ziel hin abfällt,

$\varphi_r = \varphi - \gamma$ , wenn das Gelände nach dem Ziele hin steigt.

Bei den Treffpunktslagenbeschüssen kleinkalibriger Waffen ist unter Berücksichtigung des Abgangsfehlerwinkels, des Visier-(Aufsatz-)winkels und der Höhenlage des mittleren Treffpunktes zur Horizontal-schußweite  $X$  (gleich dem Abstand der Scheibe) der reduzierte Abgangswinkel mittels des Schwenkens der Bahn zu bestimmen.

b) Ist das Schwenken der Bahn nicht zulässig, so kann man den Schnittpunkt  $C$  des Mündungshorizontes  $O-A_1$  mit Flugbahn  $O-S-A$  suchen. Man mache  $O-A_1 = O-A$  und berechne in erster Näherung den spitzen Auffallwinkel  $\omega$ . Dann erhält man  $A_1C = \sim AA_1 \cdot \cotg \omega$ . Um dieses Maß  $A_1C$  ist die beobachtete Schußweite  $O-A = O-A_1$  zu verkürzen, um die auf die Mündungswagrechte reduzierte Schußweite  $O-C$  zu erhalten.

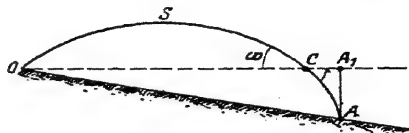


Abb. 130.

c) Auch die Parabelsubstitution wird zur Umrechnung eines auf dem schiefen Gelände beobachteten Geschoßeinschlages mit den Koordinaten  $x, y$  auf die Schußweite  $X$  im Mündungshorizont u. U. verwandt werden können. Es ist  $y = x \cdot \tg \omega \cdot \left(1 - \frac{x}{X}\right)$  (siehe Formelzusammenstellung im § 7, 1). Hieraus ist  $X$  zu berechnen.

d) Bei größeren Höhenunterschieden führen die vorausgehenden Verfahren mehr oder minder alle zu Fehlern. Man verwendet in diesem Fall besser die beobachteten Koordinaten  $x, y$  des Geschoßeinschlages im Gelände unmittelbar zur Berechnung des ballistischen Koeffizienten  $c'$ . Aus Formel (12) kann  $c' \cdot f = (x \cdot \tg \varphi - y) \cdot \frac{2 \cos^2 \varphi}{x}$  berechnet werden.  $f$  ist nun selbst nach dem früher Dargelegten eine Funktion von  $c'$  und  $x$ . Daher muß man aus der Fasellaschen Tafel II  $c'$  durch Probieren bestimmen.

## 2. Berücksichtigung des Abgangsfehlerwinkels.

Der Abgangsfehlerwinkel  $\delta$  ist, je nach dem Sinne der Abweichung der Seelenachse beim Schuß von ihrer Lage unmittelbar vorm Abschuß, zum Erhöhungswinkel  $\varepsilon$  zu addieren oder von ihm abzuziehen. Man erhält dann z. B. bei einem Erhöhungswinkel  $\varepsilon$ , einem positiven Abgangsfehlerwinkel  $\delta$  und einem negativen Geländewinkel  $\gamma$ , wenn das Schwenken der Bahn zulässig ist, als reduzierten Abgangswinkel, mit dem die weiteren Berechnungen durchzuführen sind,

$$\varphi_r = \varepsilon + \delta + \gamma.$$

## 3. Umrechnung der gemessenen Bahngeschwindigkeit auf die Mündung (Berechnung der Tagesanfangsgeschwindigkeit).

In der Regel mißt man mit dem Boulengé-Apparat (vgl. hierzu Band III) die Zeit  $t$ , die das Geschoß vom Durchreißen des ersten Gitters  $G_1$  bis zum Durchreißen des zweiten Gitters  $G_2$  braucht. Die beiden Gitter stehen dabei meist lotrecht. Ist ihr wagrechter Abstand  $a$  (meist gleich  $\frac{1}{10}$  der zu erwartenden  $v_0$  gewählt), so ist die durch-

schnittliche wagrechte Komponente  $v_x = v \cdot \cos \vartheta = \sim v \cdot \cos \varphi$  der Geschößgeschwindigkeit zwischen den beiden Gittern bestimmt durch  $v_x = \frac{a}{t}$ . Diesen Wert teilt man, unter der Annahme einer gleich-

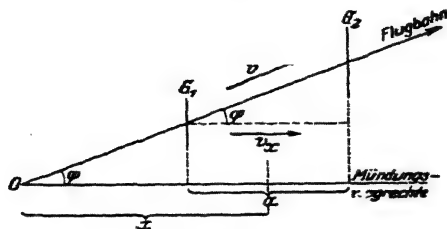


Abb. 131.

mäßigen Abnahme der Geschwindigkeit innerhalb der Meßstrecke, der um die Entfernung  $x$  vor der Mündung liegenden Mitte der Meßstrecke zu. Aus dem gemessenen Wert  $v_x$  erhält man die Bahngeschwindigkeit  $v$  im Bahnpunkt mit der Abszisse  $b$  zu  $v = \frac{v_x}{\cos \varphi} (O-G_1-G_2$  als grad-

linig angenommen). Dieser Wert

$v$  ist nun noch auf die Mündung umzurechnen. Hierzu ist beispielsweise die Siaccische Formel

$$\frac{x}{c'} = D(u) - D(v_0)$$

brauchbar, in der  $u = v$  gesetzt werden kann. Den Wert von  $c'$  berechnet man in erster Näherung nach der Formel (1) zu Beginn des § 79, demnächst aus einer mittleren Schußweite nach dem weiter unten beschriebenen Verfahren.

Besonders bequem für die Umrechnung der Bahngeschwindigkeit auf die Mündung gestalten sich Tabellen der Firma Krupp, die im bisherigen Band IV (Tafel 24) enthalten sind.

#### 4. Berechnung der schußtafelmäßigen Anfangsgeschwindigkeit.

Die erhaltenen Werte der Tagesanfangsgeschwindigkeit sind auf normale Temperatur (meist  $+10^\circ \text{C}$ ) und normale Feuchtigkeit des Pulvers sowie u. U. auf normales Geschößgewicht umzurechnen. Hierzu sind womöglich durch Sonderversuche für die betreffenden Verhältnisse ermittelte Umrechnungsfaktoren zu verwenden (vgl. Band II). Liegen derartige Erfahrungen noch nicht vor, so dient für die Berücksichtigung der Pulvertemperatur  $t^\circ \text{C}$  die Näherungsregel  $\frac{\Delta v_0}{v_0} = \frac{10-t}{1000}$ , für die Berücksichtigung der Pulverfeuchtigkeit die aus amerikanischen Versuchen der Vorkriegszeit hergeleitete Regel:

$$\frac{\Delta v_0}{v_0} = -0,045 \cdot \Delta h.$$

Darin ist  $\Delta h$  die Differenz: normaler prozentualer Feuchtigkeitsgehalt des Pulvers minus tatsächlicher prozentualer Feuchtigkeitsgehalt des Pulvers.

Zur Umrechnung der mit einem Geschößgewicht  $P$ , gemessenen Anfangsgeschwindigkeit auf normales Geschößgewicht  $P_r$ , benutzt man am besten eine empirische durch Messung mit verschiedenen Geschößgewichten erhaltene Beziehung zwischen Anfangsgeschwindigkeit und Geschößgewicht. Soweit diese nicht vorliegt, dient zur Reduktion die Näherungsformel

$$\frac{\Delta v_0}{v_0} = -\nu \cdot \frac{\Delta P}{P}, \quad \text{wobei } \Delta P = P_r - P \quad \text{und } \nu = 0,3 \text{ bis } 0,5.$$

Liegen wiederholte Messungen von mehreren Schießtagen für eine Ladung vor, so wird als endgültige schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit der Mittelwert, nötigenfalls unter Berücksichtigung der Gewichte der Tagesmittel, aus den reduzierten Mittelwerten der einzelnen Tage gewählt. Handelt es sich um ein Geschütz mit mehreren Ladungen, so trägt man in Funktion der Ladungsgewichte die reduzierten Werte der einzelnen Tagesanfangsgeschwindigkeiten graphisch auf und zieht eine ausgleichende Kurve. Aus ihr werden dann die schußtafelmäßigen Anfangsgeschwindigkeiten der verschiedenen Ladungen endgültig bestimmt.

#### 5. Die Umrechnung der Tagesschußweiten auf Normalbedingungen.

Die Tagesschußweiten  $X_1', X_2', X_3'$  usw. (zugehörig zu den mittleren Treffpunkten der einzelnen Bodentreffbilder) für bestimmte Abgangswinkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  usw. sind auf Windstille, schußtafelmäßiges Luftgewicht am Boden (bei der deutschen Landartillerie 1,22 kg/cbm) schußtafelmäßiges Geschößgewicht und schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit umzurechnen. Für alle Änderungen  $\Delta v_0, \Delta \delta, \Delta X$  usw. möge  $\Delta$  die Korrektur bedeuten, die dem beobachteten Wert hinzuzufügen ist, um zum reduzierten Wert zu gelangen (also  $\Delta$  = reduzierter Wert minus beobachteter Wert).

a) Reduktion der Schußweiten auf Windstille. Soweit nicht bei größeren Schußweiten eine bogenweise Berücksichtigung des Windeinflusses nötig wird (siehe § 49), ist die Scheitelhöhe der betreffenden Flugbahn in einer Vorberechnung zu ermitteln (siehe Formel (27) des § 79) und entweder der in § 3 der Scheitelhöhe gemessene Wind oder genauer der für die betreffende Scheitelhöhe aus den Windmessungen abgeleitete ballistische Wind in Rechnung zu setzen (über dessen Ermittlung vgl. § 49). Da Schußrichtung und Richtung des ballistischen Windes bekannt sind, kann dieser in seine beiden Komponenten in der Schußrichtung  $w_r$  und senkrecht zur Schußrichtung  $w_s$  zerlegt werden. Bei längeren Versuchen kann ein graphischer Ausgleich der Windmessungen nach Uhrzeit und Höhe nach § 81 B, Ziffer 6a zweckmäßig sein. Zur Reduktion der Schuß-

weiten auf Windstille dient die Komponente  $w_p$  in der Schußrichtung. Eine kleine Vereinfachung der Rechnung erreicht man, wenn man die Formeln (12) und (13) des § 47 in folgender Form verwendet:

$$\text{für } v_0 < 300 \text{ m/sec } \Delta_1 X = -w_p \cdot \left( T - \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{1}{f_s} \right)$$

$$\text{für } v_0 > 300 \text{ m/sec } \Delta_1 X = -w_p \cdot \left\{ T - \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi} \cdot \left( \frac{2}{f_s} - 1 \right) \right\}$$

( $w_p$  positiv bei Mitwind, negativ bei Gegenwind).  $f_s$  ist dabei aus den Tagesbedingungen  $X'$ ,  $\varphi$ ,  $v_0$  auf dem Wege über Formel (24) des § 79 zu ermitteln. Bei sehr großen Reduktionen (weiten Entfernungen, starkem Wind) versagen diese Formeln vielfach, da sie nach ihrer Ableitung auf der Voraussetzung kleiner Beträge von  $\Delta X$  aufgebaut sind. Daraus ergibt sich die Forderung, zu Schußtafelversuchen möglichst Tage mit schwachen Winden auszusuchen. Wo die Platzverhältnisse (Schießen gegen See) und die sonstigen Umstände dies erlauben, schaltet man den Windeinfluß besser empirisch aus, indem man unter sonst gleichen Bedingungen gleichzeitig Treffbilder nach mehreren, mindestens aber nach zwei um  $180^\circ$  verschiedenen Richtungen erschießt. (Näheres siehe Lit.-Note.)

b) Reduktion der Schußweiten auf normales Luftgewicht. Normales (schußtafelmäßiges) Luftgewicht  $\delta_r$ , Luftgewicht zur Zeit des betreffenden Treffbildes  $\delta$  (beide Werte zunächst geltend für die Höhe der Mündung), also  $\Delta \delta = \delta_r - \delta$ . Die Reduktion erfolgt bei allen Anfangsgeschwindigkeiten nach  $\frac{\Delta_s X}{X'} = - \left( 1 - \frac{1}{f_s} \right) \cdot \frac{\Delta \delta}{\delta}$  (entspricht der Formel (49) bzw. (58) in § 44). Genauer verfährt man wiederum, wenn man an Stelle der Luftgewichtswerte im Mündungshorizont die ballistischen Luftgewichte für die betreffende Flugbahn einsetzt (siehe § 49, Schluß).

c) Reduktion der Schußweiten auf schußtafelmäßiges Geschoßgewicht.  $P_r$  schußtafelmäßiges Geschoßgewicht,  $P$  Geschoßgewicht des Treffbildes,  $\Delta P = P_r - P$ . Unter Berücksichtigung der Formel (13) des § 44 läßt sich dann Gleichung (49) bzw. (58) des § 44 auf folgende Form bringen:  $\frac{\Delta_s X}{X'} = + \left( 1 - \frac{1}{f_s} \right) \cdot \frac{\Delta P}{P}$  (Bestimmung von  $f_s$  wie bei a).

d) Reduktion der Schußweiten auf schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeiten. Tagesanfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit  $v_{0,r}$ , demnach  $\Delta v_0 = v_{0,r} - v_0$ . Die Reduktion der Schußweiten erfolgt entweder nach den Formeln (52) und (61) des § 44 oder für alle Geschwindigkeiten nach  $\frac{\Delta_s X}{X'} = f_v \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0}$ , wobei  $f_v$  aus Tafel IX von Fasella zu entnehmen ist. Auch der

Geltungsbereich dieser Formeln ist auf kleine Unterschiede in  $\Delta X$  beschränkt. Bei Geschützen mit mehreren Ladungen trägt man besser für einzelne der in Frage kommenden Abgangswinkel die Schußweiten bezogen auf Anfangsgeschwindigkeiten graphisch auf und liest die Werte  $\Delta X$  für die betreffenden Werte  $\Delta v_0$  ab.

Damit sind die wichtigsten Reduktionen der Schußweiten durchgeführt. Die reduzierte Schußweite  $X_r$  ergibt sich sodann aus der beobachteten Schußweite  $X'$  zu  $X_r = X' + \Delta_1 X + \Delta_2 X + \Delta_3 X + \Delta_4 X$ . Man erhält als Endergebnis für jede beschossene Ladung eine Reihe von zusammengehörigen Wertepaaren für  $X_r$  und  $\varphi$ . (Im nachfolgenden ist der Index  $r$  bei den reduzierten Schußweiten der Einfachheit halber wieder fortgelassen.)

### C. Weiterer Gang der Schußtafelberechnung.

#### 1. Lösung nach der Methode von Fasella.

(Nur für die untere Winkelgruppe.)

a) Aufstellung der  $c'$ -Kurven. Die reduzierten Schußweiten  $X$  trage man zum vorläufigen Ausgleich als Funktion der Abgangswinkel  $\varphi$  auf. Abszisse: Schußweite  $X$  (reduziert) und daneben auch  $X'$  (unreduziert), zusammengehörige Werte von  $X$  und  $X'$  verbunden durch einen Pfeil im Sinne der Reduktion. Ordinate: Abgangswinkel  $\varphi$ . Die Kurve  $\varphi = F(X)$  beginnt im Nullpunkt des Koordinatensystems. Die größte Schußweite wird erreicht bei einem Abgangswinkel von annähernd  $45^\circ$  (gewöhnlich zwischen  $43^\circ$  und  $45^\circ$ , Ausnahmen siehe § 20). Bei  $\varphi = 90^\circ$  erhält man wieder die Schußweite Null (d. h. Schuß senkrecht nach oben). Die Schußweite wächst also mit wachsendem  $\varphi$  von  $0^\circ$  bis etwa  $45^\circ$ , erreicht dort ein Maximum und vermindert sich dann wieder bis zum Werte Null bei  $\varphi = 90^\circ$ . Da im Abgangspunkt die Flugbahnen des leeren und des luftgefüllten Raums bei gleichen Werten von  $v_0$  und  $\varphi$  nicht nur die Tangentenrichtung, sondern auch die Krümmung gemeinschaftlich haben (vgl. § 20, Absatz 8, Schluß), so können für den ersten Teil der Kurve  $\varphi = F(X)$  die Verhältnisse des luftleeren Raumes als Anhalt dienen. Die Schußweite im luftleeren Raum ist:  $X = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ . Hieraus folgt:  $dX = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \cos 2\varphi \cdot d\varphi$ . Im Anfang ( $X=0$ ,  $\varphi=0$ ) ist  $\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)_{\varphi=0} = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} = \operatorname{tg} \psi$ .  $\psi$  ist demnach die Neigung der Anfangstangente zur Ab-

Durch die erschossenen und reduzierten Elemente läßt sich die Kurve  $\varphi = F(X)$  bei Beachtung der vorstehenden allgemeinen Gesichtspunkte über ihren Beginn und Verlauf meist sicher zeichnen. Ergebnisse weiterer Schießtage werden entsprechend verwertet.



Aus den nunmehr fertig reduzierten Schußweiten und den zugehörigen Abgangswinkeln berechnet man nach Formel (24) des § 79 jeweils  $f_1 = \frac{\sin 2\varphi}{X}$  und findet hierzu aus der Tabelle III von Fasella für die schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  der zugehörigen Ladung die Werte  $f_0$ . Es ist dann  $c' = \frac{X}{f_0}$  der ballistische Koeffizient, der dem weiteren Verfahren zugrunde gelegt wird. Die gefundenen Werte von  $c'$  trage man als Funktion von  $\varphi$  auf (Abszisse  $\varphi$ , Ordinate  $c'$ ) in nicht zu großem Maßstabe. Man wird hierbei ungünstigenfalls finden, daß die Punkte sehr stark streuen, besonders für kleine Werte von  $\varphi$ . Bessere Anfangswerte für  $c'$  erhält man aus Luftwiderstandsmessungen in der Nähe der Mündung. Sollte in besonderen Fällen sich durch die so aufgetragenen Punkte keine glatte Kurve legen lassen, so kann man als Anhalt aus den oben behandelten vorläufigen Kurven  $\varphi = F(X)$  für runde Werte von  $\varphi$  oder  $X$  die  $c'$ -Werte berechnen und zu den aus den reduzierten Schußweiten direkt gewonnenen Punkten eintragen. Mit diesen Hilfsmitteln zeichne man die Kurve  $c' = F(\varphi)$  so, daß die Abweichungen von den erschossenen Punkten möglichst gering sind. Über die Natur und Form der Kurve  $c' = F(\varphi)$  ist grundsätzlich nur zu sagen, daß sie gewöhnlich (besonders für Kanonen) in Richtung der positiven  $c'$ -Achse gesehen, flach konkav gekrümmt ist und daß bei Hunderten von  $c'$ -Kurven, die im Laufe vieler Jahre gezeichnet wurden, niemals mehr als ein Wendepunkt beobachtet worden ist. Eine gute Kontrolle dafür, daß die  $c'$ -Kurven richtig gezeichnet wurden, bieten die später aus  $c'$  gerechneten Flugzeiten, die mit den beim Schießen gewonnenen und reduzierten Flugzeiten gute Übereinstimmung zeigen müssen. Sind mehrere Ladungen vorhanden, so muß zwischen den  $c'$ -Kurven für die einzelnen Ladungen ein gesetzmäßiger Zusammenhang bestehen, der später noch in einem besonderen Abschnitt behandelt werden wird (siehe Ladungsausgleich). Die  $c'$ -Kurven bilden im allgemeinen die weitere Grundlage der Berechnung. In manchen Fällen gelangt man indessen zu einer etwas größeren Gleichmäßigkeit, wenn man nicht die  $c'$ -Werte unmittelbar benutzt, sondern nach der Formel (3) des § 79 die  $c'_0$ -Werte errechnet und diese in Funktion der Abgangswinkel aufträgt.

b) Ermittlung der Erhöhungskurven. Aus der grundlegenden  $c'$ -Kurve werden für runde Werte von  $\varphi$ , im allgemeinen von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  fortschreitend, die zugehörigen  $c'$ -Werte abgelesen. Dann berechnet man die Werte  $f = \frac{\sin 2\varphi}{c'}$  und sucht zu diesen bei der schußtafelmäßigen Anfangsgeschwindigkeit in Tafel II von Fasella die entsprechenden Werte  $f_0 = \frac{X}{c'}$ . Der nochmalige graphische Ausgleich

der so erhaltenen  $f_0$ -Werte ist empfehlenswert ( $f_0$  bezogen auf  $\varphi$  in großem Maßstab), da von  $f_0$  die gesamten weiteren Berechnungen abhängen. Nun erhält man  $X = c' \cdot f_0$  und damit die endgültige Beziehung zwischen Abgangswinkel  $\varphi$  und schußtafelmäßiger Schußweite  $X$ . Ist der Erhöhungswinkel  $\varepsilon$ , der Abgangsfehlerwinkel  $\pm \delta$ , so ist  $\varepsilon = \varphi \mp \delta$ . Damit kann auch die Erhöhungskurve  $\varepsilon = F(X)$  gezeichnet werden. Sie entspricht in ihrem Verlauf völlig der Kurve  $\varphi = F(X)$ , ist jedoch parallel zu dieser um den Betrag  $\mp \delta$  in der Ordinatenrichtung verschoben.

c) Ermittlung der übrigen Endelemente. Man liest bei Fasella zur schußtafelmäßigen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und zu  $f_0$  ab: in Tafel I  $u$ , in Tafel IV  $f_2$ , in Tafel V  $f_3$ . Dann ergibt sich der Fallwinkel  $\omega$  aus  $\operatorname{tg} \omega = f_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi$ , die Endgeschwindigkeit  $v_e$  aus  $v_e = \frac{u \cdot \cos \varphi}{\cos \omega}$ , die Flugzeit  $T$  aus  $T = f_3 \cdot \frac{c'}{\cos \varphi}$ . Diese Werte werden als Funktion der Schußweite graphisch aufgetragen und nötigenfalls ausgeglichen. Die Kurve  $v_e = F(X)$  beginnt bei  $X = 0$  mit dem Werte  $v_e = v_0$ . Die Kurve  $\omega = F(X)$  beginnt im Koordinatennullpunkt und hat die gleiche Anfangstangente wie die Kurve  $\varphi = F(X)$ .

Sind bei den Schußtafelversuchen Flugzeiten gemessen, so werden diese zunächst auf Normalbedingungen umgerechnet. Diese Reduktionen erfolgen

$\alpha$ ) für das Luftgewicht bei allen Anfangsgeschwindigkeiten

$$\Delta_1 T = \frac{\Delta \delta}{\delta} \cdot \left( \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e \cdot \sin \omega} - T \right);$$

$\beta$ ) für das Geschossgewicht ebenso bei allen Anfangsgeschwindigkeiten nach

$$\Delta_2 T = - \frac{\Delta P}{P} \cdot \left( \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e \cdot \sin \omega} - T \right);$$

vgl. für  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) § 44 Formel (13), (50) und (59).

$\gamma$ ) für die Anfangsgeschwindigkeit für  $v_0 > 300$  m/sec nach

$$\Delta_3 T = \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \left( \frac{3 X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e \cdot \sin \omega} - 2 T \right);$$

vgl. § 44 Formel (53); für  $v_0 < 300$  m/sec nach

$$\Delta_3 T = \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \left( \frac{2 X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{v_e \cdot \sin \omega} - T \right);$$

vgl. § 44 Formel (62);

$\delta$ ) für den Wind findet eine Reduktion nicht statt (vgl. die Bemerkung bei Formel (13) des § 47).

Die Summe der drei Korrekturen  $\Delta_1 T + \Delta_2 T + \Delta_3 T$  wird an der gemessenen Flugzeit  $T''$  angebracht. Die reduzierten und die nicht reduzierten Werte  $T_r$  und  $T''$  sind graphisch aufzutragen ( $T = F(X)$ )

und zusammengehörige Werte von  $T_r$  und  $T'$  (wie bei den Erhöhungskurven die Werte  $X_r$  und  $X'$ ) durch Pfeile im Sinne der Reduktionen zu verbinden. Auf das gleiche Kurvenblatt werden die aus den  $c'$ -Kurven berechneten Flugzeiten eingetragen; sie müssen bei richtiger  $c'$ -Kurve gute Übereinstimmung zu den unmittelbar aus den gemessenen Flugzeiten durch Reduktion erhaltenen Werten zeigen. Die Kurve  $T = F(X)$  geht vom Koordinatennullpunkt aus. Ferner gilt für den luftleeren Raum  $T = \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi}$ . Hieraus ergibt sich  $\frac{dT}{dX} = \frac{1}{v_0 \cdot \cos \varphi}$ .

Für  $X = 0$  wird  $\left(\frac{dT}{dX}\right)_{\varphi=0} = \frac{1}{v_0}$ . Zur Konstruktion der Anfangstangente trägt man daher z. B. vom Koordinatennullpunkt aus auf der Abszissenachse  $10 \cdot v_0$  im Abszissenmaßstab auf, im Endpunkt der Strecke errichtet man ein Lot und trägt auf diesem die Länge von  $10 \text{ sec}$  im Ordinatenmaßstab ab. Der Endpunkt des Lots, verbunden mit dem Koordinatennullpunkt ergibt die gesuchte Anfangstangente an die Kurve  $T = F(X)$ .

## 2. Lösung nach der Methode von Piton-Bressant.

Da das Verfahren ausführlich in § 32 beschrieben ist, genügen hier einige kurze Angaben. Man bestimmt aus den wie oben reduzierten Schußweiten  $X$  und den dazugehörigen Abgangswinkeln  $\varphi$  die Werte  $Z = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g \cdot X}$  und daraus die Funktionen  $K = \frac{Z-1}{X}$ . Der Koeffizient  $K$  ist als Funktion von  $X$  graphisch auszugleichen. (Würde man  $K$  als Funktion von  $\varphi$  darstellen, so würden sich bei der weiteren Entwicklung quadratische Gleichungen ergeben). Aus der ausgeglichenen Kurve  $K = F(X)$  werden für runde Werte von  $X$ , etwa von 1000 zu 1000 m fortschreitend, die  $K$ -Werte abgelesen, aus ihnen die  $Z$ -Werte bestimmt nach  $Z = 1 + K \cdot X$ . Dann erhält man

$$\text{die Abgangswinkel aus: } \sin 2\varphi = \frac{g \cdot X}{v_0^2} \cdot Z,$$

$$\text{die Flugzeiten aus: } T = \frac{2}{9} \cdot \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{(3Z-2)^{3/2} - 1}{Z-1},$$

$$\text{die Fallwinkel aus: } \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(2 - \frac{1}{Z}\right),$$

$$\text{die Endgeschwindigkeiten aus: } v_e = \frac{v_0 \cdot \cos \varphi}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{3Z-2}}.$$

Das Verfahren wurde besonders bei Haubitz- und Mörserschußtafeln im Vergleich zur Methode von Siacci-Fasella und zur nach genannten Methode von Euler-Otto angewandt. Soweit es sich um Erhöhungen und Flugzeiten innerhalb des durch Schießversuche gefaßten Bereiches handelte, war die Übereinstimmung stets eine

sehr gute. Dagegen zeigen Fallwinkel und Endgeschwindigkeiten teilweise erhebliche Abweichungen (siehe unten).

### 3. Lösung nach dem Ausgleichsverfahren von Euler-Otto.

Das Verfahren ist im allgemeinen hauptsächlich für die obere Winkelgruppe und — als Ausgleichsverfahren bei einer erschossenen Schußtafel — für Anfangsgeschwindigkeiten bis etwa zur Schallgeschwindigkeit geeignet. Es wird daher heute in erster Linie noch für die Schußtafelauftellung der Minenwerfer verwandt.

Man bildet, wie unter 1. beschrieben, die vorläufigen Kurven  $\varphi = F(X)$  für die verschiedenen Ladungen, liest aus diesen Kurven zu dem Abgangswinkel  $\varphi$  etwa von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  fortschreitend, die Schußweiten  $X$  ab und berechnet die Werte  $\frac{v_0^2}{2g \cdot X}$ . Für diese liest man

aus Tabelle Nr. 7 oder Diagramm IV des Anhangs entweder  $\frac{c \cdot v_0^2}{g}$  oder  $2c \cdot X$  ab. Aus beiden Werten kann man  $c$  berechnen. Die einzelnen  $c$ -Werte sind als Funktion von  $\varphi$  ladungsweise graphisch auszugleichen. Die ausgeglichenen Werte bilden die Grundlage für die weitere Berechnung (siehe die Köpfe der Tabelle Nr. 7).

Die anderen, im wesentlichen in den früheren Abschnitten geschilderten Verfahren werden im allgemeinen in der Praxis der Schußtafelberechnungen in Deutschland seltener angewendet. Doch muß sie der praktische Ballistiker kennen, da die drei im vorausgehenden geschilderten Verfahren durchaus kein für alle Fälle brauchbares Rezept darstellen. Im einzelnen Falle kann sehr wohl die Notwendigkeit eintreten, auch bei der Schußtafelauftellung auf Grund von Schießversuchen nach einer anderen Ausgleichsmethode zu greifen. Jedenfalls bleibt aber zu betonen, daß, wie zu erwarten und durch zahlreiche Parallelrechnungen nach den verschiedensten Methoden bestätigt, die Wahl des Ausgleichsverfahrens so lange keine für die Praxis ins Gewicht fallenden Verschiedenheiten bringt, als man das betreffende Rechenverfahren gewissermaßen nur als Interpolationsmethode für die empirisch ermittelten Beziehungen zwischen Anfangsgeschwindigkeit, Abgangswinkel, Schußweite und Flugzeit benutzt. Größere Unterschiede treten dagegen sofort zwischen den mit den einzelnen Verfahren erhaltenen Resultaten auf, wenn man entweder mit den aus Schießversuchen erhaltenen Koeffizienten über die beschossenen Entfernungen hinaus extrapoliert oder die Fallwinkel und Endgeschwindigkeiten berechnet. Namentlich in den Fallwinkeln sind die Unterschiede, je nach dem angewandten Verfahren, oft sehr erheblich. Welche Methode für Fallwinkel und Endgeschwindigkeiten die richtigeren Werte liefert, wird wohl so lange unentschieden bleiben müssen, als praktisch ermittelte Fallwinkel und

Endgeschwindigkeiten nur in dem ganz beschränkten Umfange, wie dies bis jetzt leider der Fall ist, vorliegen. Dem experimentellen Ballistiker ist hier in der Anwendung neuzeitiger Verfahren zur Messung der Endgeschwindigkeiten und Fallwinkel auch auf den weiteren Entfernungen ein dankbares Forschungsgebiet eröffnet (vgl. hierzu auch Band III).

## D. Weitere spezielle Ausgleichungen und Berechnungen.

### 1. Ladungsausgleich.

(Für Geschütze mit mehreren Ladungen.)

Für jeden von Ladung zu Ladung konstant genommenen Abgangswinkel  $\varphi$  stellt sich die Schußweite lediglich als eine Funktion der Anfangsgeschwindigkeit dar:  $X = F(v_0)$ . Man trägt diese Beziehungen, etwa von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  im Abgangswinkel fortschreitend, graphisch auf (Abszisse  $X$ , Ordinate  $v_0$ ) und gleicht durch Kurvenzug aus. Die Kurven  $X = F(v_0)$  beginnen im Koordinatennullpunkt. Für sehr kleine Schußweiten und Anfangsgeschwindigkeiten können die Verhältnisse des luftleeren Raums herangezogen werden:  $X = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\varphi$ . Danach wird, da  $\varphi$  konstant,  $\frac{dX}{dv_0} = \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot \sin 2\varphi$ . Im Anfangspunkt ist  $\left(\frac{dX}{dv_0}\right)_{v_0=0} = 0$ . Die Anfangstangente an die Kurve  $X = F(v_0)$  ist somit die Ordinatenachse selbst. Weiter stellt die Beziehung des luftleeren Raums  $X = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\varphi$  bei konstantem Wert von  $\varphi$  die Gleichung einer Parabel dar, deren Scheitel im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt. Von dieser Parabel weicht die Kurve des luftgefüllten Raums  $X = F(v_0)$  für denselben Abgangswinkel  $\varphi$  um so mehr ab, je größer die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und ferner je größer der Abgangswinkel  $\varphi$  ist, und zwar liegt die Kurve über der entsprechenden, für den gleichen Abgangswinkel geltenden Parabel, da bei gleichem Abgangswinkel zur Erreichung ein und derselben Schußweite im luftgefüllten Raum eine größere Anfangsgeschwindigkeit nötig ist als im luftleeren Raum.

Für die  $c'$ -Werte, die Fallwinkel und die Endgeschwindigkeiten haben gleichfalls Ladungsausgleiche stattzufinden.

### 2. Berechnung der schußtafelmäßigen Seitenverschiebung (Drallausgleich).

Zur Berechnung der schußtafelmäßigen Seitenverschiebung, die zum Ausgleich der durch den Drall verursachten Seitenabweichung der Geschosse aus der Schußebene dient, sind zunächst die Abweichungen  $Z$  der mittleren Treffpunkte von der Schußebene zu er-

mitteln. Die einzelnen Geschoßeinschläge eines Treffbildes werden meist in Platzkoordinaten durch Ausmessen erhalten. Das arithmetische Mittel ergibt u. a. auch die Seitenlage des mittleren Treffpunktes auf dem Platze. Hieraus und aus der Seitenlage des Geschützes sowie der beim Schießen etwa eingestellten oder durch schräggestellten Aufsatz verursachten Seitenverschiebung (Abweichung der Schußebene von der Parallelen zur Mittellinie des Platzes) werden die Seitenabweichungen  $Z$  der mittleren Treffpunkte von der Schußebene berechnet. ( $Z$  positiv, wenn der mittlere Treffpunkt, vom Geschütz gesehen, rechts der Schußebene liegt.) Die erhaltenen Werte sind weiter auf Windstille zu reduzieren nach  $\Delta Z = -w_s \cdot \left(T - \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi}\right)$  (vgl. § 48 Formel (19), für alle Anfangsgeschwindigkeiten geltend). In dieser Formel ist  $w_s$  die Komponente des ballistischen Windes senkrecht zur Schußebene, und zwar gemäß § 48, Abs. 1 positiv, wenn sie von links nach rechts wirkt. Dann ist die auf Windstille reduzierte Seitenabweichung:  $Z_0 = Z + \Delta Z$  (in Metern). Zum Ausgleich der  $Z_0$ -Werte, die meist sehr stark streuen, eignet sich bei der unteren Winkelgruppe die oft erprobte Berechnung nach Helié über den „Ablenkungswert“  $A$  (vgl. § 59, 1), der für gleiche Anfangsgeschwindigkeit konstant sein soll. Man berechnet für die einzelnen mittleren Treffpunkte  $A = \frac{Z_0}{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}$ , bildet (für jede Ladung gesondert,  $v_0$  = Tagesanfangsgeschwindigkeit) das arithmetische Mittel der  $A$ -Werte und trägt diese Mittelwerte als Funktion der Anfangsgeschwindigkeiten der verschiedenen beschossenen Ladungen auf. Durch die erhaltenen Punkte wird eine ausgleichende Kurve  $A = F(v_0)$  gezogen, aus ihr rückwärts für jede Ladung der  $A_0$ -Wert abgelesen und mit diesem  $A$ -Wert die Berechnung der schußtafelmäßigen Seitenabweichung  $Z_s$  (in Metern) für einzelne Abgangswinkel durchgeführt nach § 59 Formel (1):  $Z_s = A_0 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi$  (hierbei  $v_0$  = schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit). Schließlich wird der einzelne in Metern erhaltene Wert  $Z_s$  nach der zum gleichen Abgangswinkel gehörigen Schußweite  $X$  in Winkelmaß (Seitenverschiebung in Teilstrichen, bei der deutschen Artillerie ist für die Seite 1 Teilstrich =  $3' 22,5''$ ) umgerechnet:  $s = \frac{Z_s}{X} \cdot 1017$  (Teilstrich). Man trägt endlich zu den Schußweiten  $X$  als Abzissen die Seitenverschiebungen  $s$  als Ordinaten für jede Ladung gesondert auf und liest aus der Ausgleichskurve  $s = F(X)$  die endgültigen Seitenverschiebungswerte für die Schußtafel ab.

Bei Geschützen mit schräggestelltem Aufsatz ist der durch diese Schrägstellung allein berücksichtigte Betrag in Anrechnung zu bringen (vgl. Lit.-Note).

Bei der oberen Winkelgruppe kann die empirische Formel von Helié nicht angewendet werden. Doch kann hier zum Ausgleich der erschossenen Seitenabweichungen Formel (4) oder (6) des § 59 benutzt werden.

### 3. Berechnung der sogenannten Korrekturmaße.

( $\frac{1}{16}$  Grad ändert die Schußweite um ... m, bzw. verlegt den Treffpunkt nach der Höhe um ... m.)

Man legt an die endgültige Erhöhungskurve  $\varepsilon = F(X)$  von 500 zu 500 m die Normalen (am besten mit dem Spiegellineal von Reusch, siehe Band III) und die Tangenten. Dann konstruiert man in dem betreffenden Punkt der Erhöhungskurve ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse mit der Tangente an die Erhöhungskurve zusammenfällt, macht die zur Abszissenachse ( $x$ -Achse) parallele Kathete gleich 1000 m und bestimmt die Größe  $a$  der anderen Kathete in Sechzehntelgraden. Dann ist  $\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon} = \frac{1000}{a}$  die gesuchte Korrektur. Der Anfangspunkt der nun zu zeichnenden Kurve

$\left(\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon}\right)_{\Delta \varepsilon = \frac{1}{16}^\circ} = F(X)$  ergibt sich wiederum aus entsprechenden Erwägungen für den luftleeren Raum. Für diesen ist  $\frac{dX}{d\varphi} = \frac{dX}{d\varepsilon} = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \cos 2\varphi$ , also  $\left(\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon}\right)_{X=0} = \frac{2v_0^2}{g}$ . Für eine Änderung der Erhöhung um ein Sechzehntelgrad wird dann  $\left(\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon}\right)_{X=0} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{2\pi}{360 \cdot 16}$ .

Die Kurve  $\left(\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon}\right)_{\Delta \varepsilon = \frac{1}{16}^\circ} = F(X)$  beginnt beim Punkte ( $X=0$ ,  $\left(\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon}\right) = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{2\pi}{360 \cdot 16}$ ). Der Wert  $\left(\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon}\right)$  nimmt mit steigendem  $X$  ab. Die Kurve hat für größere Anfangsgeschwindigkeiten zwei Wendepunkte und fällt steil ab zum Punkte ( $X = X_{\max}$ ,  $\frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon} = 0$ ). Die

ausgleichende Kurve wird nach diesen Überlegungen gezeichnet und das Korrekturmaß für runde Werte von  $X$  zur Aufnahme in die Schußtafel abgelesen.

Multipliziert man die abgelesenen Werte jeweils mit der Tangente des der Entfernung  $X$  entsprechenden Fallwinkels  $\omega$ , so erhält man den Betrag in Metern, um den eine Erhöhungsänderung um  $\frac{1}{16}$  Grad

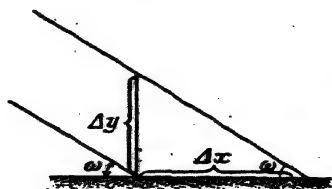


Abb. 132.

den Treffpunkt nach der Höhe verlegt:  $\frac{\Delta Y}{\Delta \varepsilon} = \frac{\Delta X}{\Delta \varepsilon} \cdot \operatorname{tg} \omega$ .

Die Kurve  $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta \varepsilon}\right)$  beginnt im Koordinatennullpunkt, steigt

bis zu einem, allgemein nicht näher zu bestimmenden, Maximum und fällt dann wieder sehr steil zum Punkte ( $X = X_{\max}$ ,  $\frac{\Delta Y}{\Delta s} = 0$ ).

Wie sich aus der Herleitung der beiden Korrekturmaße ergibt, haben diese, streng genommen, nur Geltung für kleine Änderungen. Für größere Entfernungskorrekturen ergeben sich falsche Werte, man liest in diesem Falle die Erhöhungsänderungen besser unmittelbar aus der Erhöhungskurve oder aus der von ihr abgeleiteten Schußtafel ab. Die Angaben werden daher heute eigentlich nur mehr traditionell in die Schußtafeln aufgenommen. Dagegen behält die Herleitung der Funktion  $\frac{\Delta X}{\Delta s}$  eine gewisse Bedeutung durch die nachträgliche Prüfung des stetigen Verlaufs der Erhöhungskurve.

#### 4. Ermittlung der Streuungsangaben der Schußtafel.

Aus der Lage der einzelnen Geschoßeinschläge in Platzkoordinaten, einmal gemessen in der Schußrichtung, das andere Mal senkrecht zu dieser, berechnet man nach § 66 die sogenannten mittleren (50prozentigen) Längsstreuungen  $l_{50}$  und Breitenstreuungen  $b_{50}$  für die betreffende Entfernung. Letztere trägt man ohne weitere Rechnung und Reduktion in Funktion der Schußweite graphisch auf, wobei für die Schußweite Null (Mündung) auch die Breitenstreuung Null sein muß, die Kurve  $b_{50} = F(X)$  also im Koordinatennullpunkt beginnt.

Die erschossenen 50prozentigen Längsstreuungen  $l_{50}$  werden mittels der Tagesfallwinkel  $\omega'$  der betreffenden Entfernung auf Streuungswerte  $q_{50}$  (senkrecht zur mittleren Flugbahn) umgerechnet:  $q_{50} = \sin \omega' \cdot l_{50}$  (bei der deutschen Artillerie Querstreungen genannt). Auch diese Querstreungen werden in Funktion der Schußweite graphisch aufgetragen, wobei die Kurve  $q_{50} = F(X)$  wiederum vom Koordinatennullpunkt ausgehen muß, da unmittelbar an der Mündung auch die Querstreuung Null sein muß. Aus der Kurve  $q_{50} = F(X)$  werden für runde Entfernungen, etwa von 500 zu 500 m, die Querstreungen abgelesen und mittels der schußtafelmäßigen Fallwinkel  $\omega$ , die nach Ziffer 1c bereits berechnet vorliegen, in die Werte der mittleren Längsstreuungen zurückgerechnet:  $l_{50} = \frac{q_{50}}{\sin \omega}$ . Die so erhaltenen Werte der mittleren Längsstreuungen werden in Funktion der Schußweiten aufgetragen, wobei zu beachten ist, daß der Ausgangspunkt der Kurve  $l_{50} = F(X)$  über dem Koordinatennullpunkt auf der Ordinatenachse liegt.

Aus den Querstreungen findet man ferner nach  $h_{50} = \frac{q_{50}}{\cos \omega}$  die 50prozentigen Höhenstreungen  $h_{50}$  der Flugbahnen, die gleichfalls in Funktion von  $X$  aufgetragen werden. Diese Kurve geht vom Koordinatennullpunkt aus.



Aus den beobachteten Koordinaten der Sprengpunkte werden, gleichfalls nach § 66, die mittleren (50prozentigen) Längenstreuungen und Höhenstreuungen der Sprengpunkte berechnet. Diese Werte sind ohne weitere Reduktion in Funktion der Schußweite graphisch auszugleichen. Die Kurve für die Längenstreuung der Sprengpunkte beginnt über dem Koordinatennullpunkt, die Kurve der Höhenstreuung der Sprengpunkte geht von diesem aus. Für Satzringbrennzünder sind im allgemeinen die Längenstreuungen der Sprengpunkte, ebenso vielfach auch die Höhenstreuungen der Sprengpunkte wesentlich größer als die entsprechenden Längen- und Höhenstreuungen der Flugbahnen. Dagegen ist durch zahlreiche Beschüsse während des Krieges die auch theoretisch, zuerst wohl durch Großmann (siehe Lit.-Note) dargelegte Beobachtung erhärtet, daß bei guten mechanischen Zündern die Höhenstreuungen, besonders aber die Längenstreuungen der Sprengpunkte kleiner sein können als die entsprechenden Flugbahnstreuungen.

Schließlich werden aus den einzelnen Kurven der in Funktion von  $X$  aufgetragenen Streuungen die Streuungsangaben für die in der Schußtafel gewünschten Entfernungen abgelesen. Die Breitenstreuungen der Sprengpunkte werden nicht besonders ermittelt und eingetragen, in der praktisch zweifellos richtigen Annahme, daß der Geschoßflug durch das Brennen des Satzringes oder das Laufen des Uhrwerks nicht beeinflusst wird, daß also die Breitenstreuungen der Sprengpunkte gleich den Breitenstreuungen der Flugbahnen gesetzt werden können.

#### 5. Verwertung der Zeitzünderschüsse für die Aufschlagschußtafel

Die Zeitzünderschüsse, wenn auch in erster Linie zur Ermittlung der Schußtafelangaben für die Zünderstellung und für Streuungen der Sprengpunkte verfeuert, können auch zur Berechnung der grundlegenden Koeffizienten der Aufschlagschußtafel mit verwertet werden. Man hat zu diesem Zwecke die mittlere Flugbahn, die zum mittleren Sprengpunkt  $(x, y)$  eines Brennlängenbildes gehört, rechnerisch bis zum Schnitt mit dem Mündungshorizont zu verlängern, und findet so für jeden mittleren Sprengpunkt eine zugehörige mittlere Schußweite  $X$ , die man genau wie die unmittelbar erschossenen Aufschlagschußweiten reduziert und weiter verwertet. Zu diesen Umrechnungen kommen besonders drei Verfahren in Frage:

a) Bei kleinen Sprenghöhen und besonders auch den kleineren Anfangsgeschwindigkeiten der Minenwerfer, Mörser und Haubitzen kann man das fehlende Stück der Flugbahn als Parabel ansehen

und aus der Gleichung  $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(1 - \frac{x}{X}\right)$  die gesuchte Aufschlagschußweite  $X$ , aus der Gleichung  $y = \frac{g}{2} \cdot t \cdot (T - t)$  die gesuchte Gesamtflugzeit  $T$  aus der gemessenen mittleren Flugzeit  $t$  des Brennlängenbildes berechnen (vgl. Formelzusammenstellung des § 7).

b) Sind die Werte für die Endgeschwindigkeit  $v_e$  und den Fallwinkel mit genügender Sicherheit aus einer verwandten Schußtafel zu entnehmen, so kann nach E. Stübler die Berechnung nach folgenden Gleichungen stattfinden:

$$X = x + y \cdot \cotg \omega - \frac{g \cdot y^2 \cdot \cotg^2 \omega}{v_e^2 \cdot \sin^2 \omega},$$

$$T = t + \frac{y}{v_e \cdot \sin \omega}.$$

c) Bei größeren Sprenghöhen, wo besonders das Verfahren nach a zu ungenau würde, rechnet man besser und genauer aus der Flugbahngleichung des angewandten Lösungssystems den gesuchten ballistischen Koeffizienten aus, etwa aus Gleichung (12) des § 79 das Produkt  $c' \cdot f$ . Daraus muß dann, weil  $f$  selbst wieder eine Funktion von  $c'$  ist, mittels der Tafel II von Fasella  $c'$  durch Probieren bestimmt werden.

d) Weitere Verfahren, um bei gegebenem Abgangswinkel  $\varphi$  und gegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  die Aufschlagschußweite  $X$  zu berechnen für eine Flugbahn, die durch einen Punkt  $(x, y)$ , den mittleren Sprengpunkt, geht, ferner um die Gesamtflugzeit bis zum Mündungshorizont zu berechnen, wenn die Flugzeit  $t$  bis zum Punkt  $(x, y)$  gemessen ist, findet man für das Lösungssystem Didion-Wuich bei Kozak (siehe Lit.-Note).

## 6. Ermittlung der schußtafelmäßigen Zünderstellungen.

Die Sekundenteilung am Zünder (oder am Stellschlüssel oder an der Stellmaschine) wird zunächst ermittelt durch „Brennproben“ des ruhenden Satzringbrennzünders, durch „Laufproben“ des ruhenden mechanischen Zünders. Beim Geschoßflug wird nun das Brennen des Satzringes und das Laufen des Uhrwerkes durch die fortschreitende Bewegung und die Umdrehung des Geschosses, das Brennen des Satzringes allein aber noch ganz besonders durch den mit der Flughöhe sich ändernden Luftdruck, in geringerem Maße auch durch den Wind beeinflusst. Da die rechnerische Beherrschung dieser Einflüsse trotz beachtlicher Arbeiten (siehe Lit.-Note) doch noch nicht sicher genug möglich ist, müssen gerade diese Einflüsse durch ausreichende Schießversuche ermittelt werden.

Ist die am Zünder beim Schußtafelversuch eingestellte Sekunden-  
zahl für ein Brennlängenbild  $\beta'$ , die zugehörige mittlere Flugzeit  
(das arithmetische Mittel aus den gemessenen einzelnen Flugzeiten)  $t'$ ,  
so hat man  $\beta'$  in Funktion von  $t'$  aufzutragen. Die Kurve  $\beta' = F(t')$   
ergab sich beim deutschen mechanischen Zünder als gerade Linie,  
der nach Tausenden im Kriege ausgeführten Beschüssen die Gleichung  
zukam:  $\beta' = a + b \cdot t'$ . Darin wechselten die Konstanten  $a$   
und  $b$  nur mit dem Geschütz und der Ladung. Für den Satzring-  
brennzünder verläuft die Kurve  $\beta' = F(t')$  anders. In der Regel ist  
bei ihm auf den kleineren Entfernungen die gemessene Flugzeit  $t'$   
kleiner als die Zünderstellung (d. h. der Zünder brennt schneller als  
in Ruhe); sie wird auf einer bestimmten, mit Geschütz und Ladung  
wechselnden Entfernung gleich der Zünderstellung und schließlich  
auf den weiteren Entfernungen größer als die Zünderstellung (d. h.  
hier brennt der Zünder infolge der größeren Flughöhen und des ge-  
ringeren Luftdruckes langsamer als in Ruhe). Für die Bestimmung  
der schußtafelmäßigen Zünderstellung macht man nun die allgemein  
übliche und wohl auch zulässige Annahme, daß die Zünderstellung  
des Versuchstages  $\beta'$  sich zur gemessenen mittleren Flugzeit  $t'$   
verhalte wie die schußtafelmäßige Zünderstellung  $\beta$  zu der ent-  
sprechenden schußtafelmäßigen Flugzeit  $t$ . Man findet daher z. B.  
für die Entfernung  $X$  und eine mittlere Sprenghöhe Null die schuß-  
tafelmäßige Zünderstellung  $\beta$  einfach dadurch, daß man für die zu  
 $X$  gehörige Gesamtflugzeit  $T$  aus der Kurve  $\beta' = F(t')$  den Wert  $\beta'$   
abliest und gleich der schußtafelmäßigen Zünderstellung  $\beta$  setzt.  
Will man statt für die Sprenghöhe Null für eine Sprenghöhe  $y$  die  
schußtafelmäßige Zünderstellung haben, so kann man bei flachen  
Flugbahnen diese um das gewünschte Maß  $y$  schwenken. Genauere  
Werte erhält man, indem man nach einer der Ausgleichsmethoden  
zur Abszisse  $x = X$  und der gewünschten Sprenghöhe  $y$  die Flug-  
zeit  $t$  berechnet und für diese aus der Kurve  $\beta = F(t)$  die  $\beta$ -Werte  
abliest. Diese sind dann die schußtafelmäßigen Zünderstellungen für  
eine Sprenghöhe  $y$  auf der Entfernung  $X$ . Bei Schrapnells soll der  
mittlere Sprengpunkt um ein mit der Geschosskonstruktion und der  
Entfernung wechselndes Maß  $a$  vorm Ziel liegen. Man hat daher  
für eine Abszisse  $x = X - a$  die Ordinate  $y$  und die zugehörige  
Flugzeit  $t$  zu berechnen, was am besten mit einem der Verfahren der  
vorausgehenden Ziffer 5. erfolgt. Zu  $t$  findet man aus der Kurve  $\beta = F(t)$   
die zugehörige mittlere Zünderstellung.

Die so in bestimmten Intervallen errechneten Angaben der schuß-  
tafelmäßigen Werte der Zünderstellung werden nunmehr in Funktion  
der Gesamtschußweite  $X$  aufgetragen und aus der Ausgleichskurve  
für die Zwischenentfernungen die Schußtafelwerte abgelesen.

## 7. Ermittlung des bestrichenen Raums.

Die gewöhnlich benutzte Formel ist in § 5, Absatz 2c gegeben. Für die Schußtafeln der Artillerie hat der bestrichene Raum keine Bedeutung mehr.

## 8. Berechnung der Libellentafeln.

Die Aufsätze der Geschütze haben meist besondere Einrichtungen, mit denen gewisse Zusatzkorrekturen zur eingestellten Rohrerhöhung gegeben werden können (Regler, Libelle, Aufsatzschieber usw.), ohne daß die eingestellte Erhöhungszahl selbst geändert wird. Dazu enthalten die Schußtafeln vielfach Tabellen mit doppeltem Eingang (Kartenentfernung, Zielhöhe), aus denen solche Zusatzkorrekturen  $\lambda$  (Libellenkorrekturen) entnommen werden können, die beim Bekämpfen von Zielen außerhalb des Mündungshorizontes bei nicht zu großen Höhendifferenzen eingestellt werden müssen.

a) Zur genauen Berechnung kann man z. B. für eine bestimmte Kartenentfernung  $x$  folgendermaßen verfahren: Man entnimmt zu  $x = X$  aus der Schußtafel  $\varphi_x$ . Sodann wählt man innerhalb der Grenzen der Libellenausschaltvorrichtung in bestimmten Abständen einige Libellenkorrekturen  $\lambda_1, \lambda_2$  usw. und bildet die Abgangswinkel  $\varphi_1 = \varphi_x + \lambda_1, \varphi_2 = \varphi_x + \lambda_2$ . Aus der von der Schußtafelberechnung her vorhandenen Kurve  $c' = F(\varphi)$  entnimmt man zu  $\varphi_x, \varphi_1, \varphi_2$  usw. die zugehörigen  $c'$ -Werte und berechnet zu diesen nach  $f = \frac{\sin^2 \varphi}{c'}$  die zugehörigen  $f$ -Werte  $f(\varphi_x), f(\varphi_1), f(\varphi_2)$ . Dann gibt die Flugbahngleichung  $y_1 = x \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \left(1 - \frac{f(\varphi_x)}{f(\varphi_1)}\right)$  usw. die zu  $\varphi_1, \varphi_2$  gehörigen Werte der Zielhöhen  $y_1, y_2$  usw. Entsprechend wird mit negativen Libellenkorrekturen verfahren. Die Funktion  $y = F(\lambda)$  kann nunmehr graphisch aus den berechneten Werten dargestellt werden. Aus der Ausgleichskurve findet man für die Kartenentfernung  $x$  zu runden Werten der Zielhöhen die zugehörigen Libellenkorrekturen. Entsprechend wird dann für weitere Kartenentfernungen  $x$  (etwa in Intervallen von 1000 zu 1000 m verfahren. Die für die Libellentafel erforderlichen Zwischenwerte gewinnt man durch graphische Interpolation.

b) Eine in der Praxis auch vielbenutzte Annäherungsrechnung geht aus von der Formel (3) des § 2, wonach der zum Treffen eines Zieles  $(x, y)$  erforderliche Abgangswinkel  $\varphi$  sich ergibt aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{2h}{x}\right)^2 - \frac{2h}{x} \cdot \frac{2y}{x} - 1}$$

(+ - Zeichen für obere, - - Zeichen für untere Winkelgruppe).

Nun ist nach der Formelzusammenstellung des § 7, 3  $x = 2h \cdot \sin 2\varphi_x$ , also  $\frac{2h}{x} = \operatorname{cosec} 2\varphi_x$ , wobei  $\varphi_x$  wieder der zur Gesamtschußweite  $x$  aus der Schußtafel entnommene Abgangswinkel sein möge. Damit geht die Formel für  $\operatorname{tg} \varphi$  nach einigen Umformungen über in folgende Form:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cosec} 2\varphi_x (\pm) \sqrt{\operatorname{cosec}^2 2\varphi_x - \left(1 + \frac{2y}{x} \cdot \operatorname{cosec} 2\varphi_x\right)}$$

und die Libellenkorrektur für das Ziel  $(x, y)$  wird  $\lambda = \varphi - \varphi_x$ .

### 9. Berechnung der Tafeln zum Überschießen von Deckungen.

Diese Tafeln sollen die Feststellung gestatten, mit welcher kleinsten Rohrerhöhung eine nahe vor der Feuerstellung liegende Deckung noch überschossen werden kann, wenn man die Kartenentfernung  $x$  zwischen Feuerstellung und Deckungskamm kennt und mit besonderen Meßeinrichtungen (Deckungswinkelmesser usw.) die Neigung der Sehlinie nach dem Deckungskamm zur Horizontalen, den Deckungswinkel  $\gamma$  gemessen hat.

Im Prinzip läuft auch diese Aufgabe darauf hinaus, zu dem Flugbahnpunkt  $(x, y = x \cdot \operatorname{tg} \gamma)$ , dem Deckungskamm, den zugehörigen Abgangswinkel zu bestimmen. Man kann daher diese Ermittlungen gleichfalls mit genauer Flugbahnberechnung durchführen. Ein einfacheres Rechenverfahren geht auf E. Stübler zurück. Er nimmt die Flugbahngleichung in folgender Form

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x \cdot B(x)}{2 \cdot \cos^2 \varphi}, \quad (a)$$

wobei  $B(x) = \sin 2\varphi_x$  ist. (Dies setzt voraus, daß der ballistische Koeffizient nur von  $x$ , nicht von der Höhe abhängig ist, was nach E. Stübler bis etwa  $40^\circ$  zutreffen soll.) Für eine horizontale Schußweite  $x$  gleich der Kartenentfernung der Deckung sei der Abgangswinkel wiederum  $\varphi_x$ . Wäre das Schwenken der Bahn zulässig, so würde mit einem Abgangswinkel  $\varphi = \varphi_x + \gamma$  gerade der Deckungskamm getroffen. Bezeichnet man mit  $\psi$  den durch das Bahnschwenken gemachten Winkelfehler, so ist genau richtig  $\varphi = \varphi_x + \gamma + \psi$ . Aus (a) folgt, da  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x}$ , zunächst  $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi - \frac{B(x)}{2 \cos^2 \varphi}$  und, da  $2 \cdot \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi$ , weiter  $\operatorname{tg} \gamma \cdot [1 + \cos 2\varphi] = \sin 2\varphi - B(x)$ . Führt man obigen genauen Wert für  $\varphi = \varphi_x + \gamma + \psi$  ein, so wird  $\operatorname{tg} \gamma \cdot [1 + \cos 2(\varphi_x + \gamma + \psi)] = \sin 2(\varphi_x + \gamma + \psi) - B(x)$  und durch Auflösung nach  $\gamma$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin 2(\varphi_x + \psi) - B(x)}{1 - \cos 2(\varphi_x + \psi)}. \quad (b)$$

Entwickelt man in der Gleichung (b) die rechte Seite nach Potenzen

von  $\psi$ , so erhält man

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \cdot \cos 2 \varphi_x}{1 - \cos 2 \varphi_x} \cdot \psi + \dots,$$

woraus sich die Zusatzkorrektur, die zum Ausgleich des durch das Bahnschwenken gemachten Fehlers nötig ist, ergibt zu

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot (\sec 2 \varphi_x - 1). \quad (c)$$

(Zu einer ganz entsprechenden Formel gelangt auf anderem Wege Kozak, Geschosßbewegung im Vakuum, Nr. 28). Will man  $\psi$  in Sechzehntelgraden haben, so hat man zu setzen:

$$\psi \text{ (Sechzehntelgrad)} = \frac{917}{2} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot (\sec 2 \varphi_x - 1).$$

Endlich ist noch die Höhenstreuung zu berücksichtigen. Die mittlere Flugbahn muß mindestens um den doppelten Betrag der 50prozentigen Höhenstreuung des Schießtages über den Deckungskamm hinweggehen, wenn die tiefste Bahn der Garbe gerade noch über den Kamm gehen soll. Da erfahrungsgemäß die Streuungen beim gefechtsmäßigen Schießen gegenüber den Schußtafelangaben wachsen, nimmt man als Höhenstreuung des Schießtages den doppelten Betrag der Höhenstreuung  $h_{50}$  der Schußtafel. Die mittlere Flugbahn ist also um  $(4 \cdot h_{50})$  m oder um  $\left(\frac{4 \cdot h_{50}}{x} \cdot 917\right)$  Sechzehntelgrade über den Deckungskamm zu legen. Der kleinste zulässige Abgangswinkel wird dann

$$\varphi = \gamma + \varphi_x + \frac{917}{2} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot (\sec 2 \varphi_x - 1) + \frac{4 \cdot h_{50}}{x} \cdot 917. \quad (d)$$

Bezeichnet man den Abgangsfehlerwinkel mit  $\delta$ , die bezüglichen Rohrerhöhungen mit  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_x$ , so ist  $\varphi = \varepsilon + \delta$  und  $\varphi_x = \varepsilon_x + \delta$ . Setzt man diese Werte in obige Gleichung (d) ein, so fällt der Abgangsfehlerwinkel  $\delta$  heraus und man erhält für die kleinste zulässige Rohrerhöhung schließlich:

$$\varepsilon = \gamma + \varepsilon_x + 917 \cdot \left[ \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} \cdot (\sec 2 \varphi_x - 1) + \frac{4 \cdot h_{50}}{x} \right] = \gamma + \alpha. \quad (e)$$

Wie leicht einzusehen, stellt der zum gemessenen Deckungswinkel  $\gamma$  hinzuzufügende Zuschlag

$$\alpha = \varepsilon_x + 917 \cdot \left[ \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} \cdot (\sec 2 \varphi_x - 1) + \frac{4 \cdot h_{50}}{x} \right] \quad (f)$$

den Aufsatzwinkel dar, mit dem man beim direkten Richten den Deckungskamm anvisieren müßte, damit auch die tiefste Geschosßbahn der Garbe über die Deckung noch hinweggeht.

Bei Berechnung der Zuschläge  $\alpha$  kann noch eine weitere Vereinfachung dadurch eintreten, daß sich dieser Wert mit dem Deckungswinkel nur wenig ändert.  $\alpha$ , das streng genommen eine Funktion von  $x$  und  $\gamma$  ist, kann also für eine bestimmte Kartenentfernung  $x$

der Deckung als konstant angenommen werden. Man berechnet dann für einen Deckungswinkel von z. B.  $20^0$  und Kartenentfernungen von 100 m bis zu etwa 1000 m die Zuschläge  $\alpha$ . Das Ergebnis der Rechnung kann in Tabellenform oder graphisch niedergelegt werden. Bei größerem Abstand zwischen Deckung und Geschütz sind die entsprechenden Ermittlungen mit den Schießbehelfen für den Gebirgskrieg auszuführen.

Damit sind die wichtigsten, heute vom Artilleristen für eine Erdschußtafel geforderten Angaben hinsichtlich ihrer Herleitung besprochen. Es bleibt noch zu betonen, daß bei Aufstellung der Zahlentabellen für die Schußtafel ein letzter sorgfältiger Ausgleich durch Bildung der ersten und nötigenfalls auch der zweiten Differenzenreihen erfolgen muß.

Für die infanteristischen Waffen (Gewehre und Maschinengewehre) kommen eine ganze Anzahl der besprochenen Ermittlungen in Fortfall. Die verbleibenden Ermittlungen zur Schußtafelauaufstellung (Beziehung zwischen Visierwinkel und Entfernung in erster Linie, Fallwinkel, Endgeschwindigkeiten, Flugzeiten) erfolgen entsprechend den geschilderten Vorgängen. Nur tritt an Stelle des Erschießens von Bodentreffbildern das Erschießen von Treffbildern nach der vertikalen Scheibe (vgl. § 80, S. 506). In vielen Fällen reichen bei Berechnungen für Gewehre die Tabellenwerke nicht aus.

## § 81. Die Aufstellung der Schießbehelfe zur Flugabwehr.

### (Flakschußtafeln.)

#### I. Die rein rechnerische Ermittlung der Flakschußtafeln.

Liegen für die Schußtafel einer Flugabwehrkanone keinerlei praktische Ergebnisse vor, so muß die Berechnung der Flugbahn in Teilbögen durchgeführt werden. Dies gilt für alle Kaliber bis herab zum Gewehr. Irgendeines der Verfahren des 7. Abschnittes kann im Prinzip benutzt werden. Was im § 79 A, 1. Absatz, über die Wahl des Formkoeffizienten  $i$  gesagt wurde, gilt auch hier. Eine gewisse Vereinfachung gegenüber der Berechnung der Geschosbahn in Teilbögen nach § 79 A tritt insofern ein, als für die obere Winkelgruppe zur Flugabwehr im allgemeinen nur der aufsteigende Ast in Betracht kommt. Im übrigen kann die in § 79 A näher ausgeführte Methode unter Benutzung der Fasella-Tafeln und der Wahl des  $\beta$ -Wertes nach Eberhard auch hier benutzt werden. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit unter 600 m/sec ist eine weitere Vereinfachung wenigstens für ein erstes überschlägiges Schußtafelprojekt dadurch möglich, daß man für die untere Winkelgruppe die Flugbahnen nach der aus Formel (12) des § 79 abgeleiteten, für den Gebrauch der Fasella-Tafeln und der

Rechenmaschine besonders geeigneten Gleichung

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{f(X)}\right)$$

berechnet. Darin entspricht  $f(X)$ , entnommen aus Tafel II von Fasella, der zum Abgangswinkel  $\varphi$  gehörenden Gesamtschußweite  $X$ ,  $f(x)$  der jeweiligen Abszisse  $x$ , zu der die Ordinate  $y$  gesucht wird.  $f(X)$  ist demnach entlang ein und derselben Bahn als konstant angenommen, während  $f(x)$  sich mit der Abszisse  $x$  ändert. Die Art, wie sich die demnach auf verschiedene Weise berechnete obere und untere Winkelgruppe aneinander schließen, zeigt, inwieweit das vereinfachte Verfahren zulässig ist.

Ein Ausgleich der errechneten Flugbahnpunkte auf dem Wege über die Kurven gleicher Aufsatzwinkel  $\alpha$  empfiehlt sich auch bei der rein rechnerischen Ermittlung der Flakschußtafeln. Dieser Ausgleich ist genauer im nachfolgenden Abschnitt II beschrieben. Die Flugzeiten ergeben sich bei der Berechnung in Teilbogen, wie in § 79 A geschildert: bei der Berechnung nach vorstehender Vereinfachung für die untere Winkelgruppe aus Formel (13) des § 79. Die Kenntnis der Bahngeschwindigkeiten hat, bei der fast ausschließlichen Verwendung von Brisanzgranaten zur Flugabwehr, keine besondere Bedeutung. Wo sie nicht ohnehin, wie bei der bogenweisen Berechnung, für Bestimmung der  $\beta$ -Werte erhalten werden, braucht man sie daher nicht besonders zu berechnen.

## II. Die Berechnung einer Flakschußtafel nach Schießversuchen.

Beim Erschießen einer Flakschußtafel werden in der Regel einzelne Flugbahnen des gesamten Erhöhungsbereichs des Geschützes punktweise durch photogrammetrische Aufnahmen von Sprengpunkten festgelegt. Man kann zwar auch in diesem Falle die Geschößbahn-berechnung in Teilbögen durchführen, wobei der  $i$ -Wert in wiederholter Rechnung so lange zu ändern ist, bis die errechnete Bahn sich den erschossenen und völlig reduzierten Elementen gut anpaßt. Doch wird man im allgemeinen dieses zeitraubende Verfahren nur anwenden, wenn nur vereinzelte Schießergebnisse vorliegen. Sonst führt das nachstehende Ausgleichsverfahren, das Veithen und Neuen-dorf in den Jahren 1917 und 1918 bei der Artillerie-Prüfungs-kommission ausgearbeitet haben, erheblich schneller zu genauen Ergebnissen.

### A. Ausgangsgrundlagen (erschossen oder gemessen).

Die am Anfang des § 80 für das Erschießen einer Erdschußtafel als notwendig bezeichneten Messungen und Feststellungen der dortigen Nummern 1 bis 9 sind auch beim Erschießen einer Flakschuß-



tafel erforderlich. Hinzu kommen aber hierbei folgende weitere Feststellungen:

10. Für eine Reihe von Flugbahnen, je nach der verfügbaren Munition in verschiedenen großen Intervallen, z. B. mit Abgangswinkeln von  $15^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$ ,  $70^{\circ}$  (dies möge die Erhöhungsgrenze des Geschützes sein), werden jeweils mit verschiedenen Zünderstellungen Sprengpunktgruppen geschossen und photogrammetrisch aufgenommen (siehe hierzu Band III). So mögen z. B. auf der Flugbahn mit  $70^{\circ}$  Erhöhung mindestens je 5, womöglich je 10 Schuß (letztere Zahl, wenn Streuungsangaben ermittelt werden sollen) mit den Zünderstellungen von 10, 20, 30, 40 Sekunden abgefeuert werden. Das Intervall von  $15^{\circ}$  von einer punktweise festzulegenden Flugbahn zur anderen, von 10 Sekunden in den Zünderstellungen hat sich im allgemeinen sehr gut bewährt. Es gibt ein dichtes Netz von Punkten, durch das man das gesamte Flugbahnbild sicher festlegen kann.

Die mit dem Stereokomparator ausgewerteten Koordinaten der einzelnen Sprengpunkte werden gruppenweise gemittelt.  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mögen bereits die arithmetischen Mittel aus den einzelnen Sprengpunktgruppen sein. Zu den einzelnen Sprengpunktgruppen sind die Uhrzeiten im Hinblick auf das Zusammenpassen mit den gleichzeitigen meteorologischen Messungen zu vermerken,

11. die Flugzeiten zu den einzelnen Sprengpunkten werden mit der Löbnerschen Tertienuhr, wenn möglich immer gleichzeitig durch mehrere voneinander unabhängig arbeitende Beobachter, gestoppt und gleichfalls gruppenweise gemittelt. Im nachfolgenden sei  $t$  bereits das Flugzeitmittel einer Sprengpunktgruppe.

12. Die Gesamtschußweiten der einzelnen beschossenen Abgangswinkel werden jeweils mit mehreren Schüssen festgelegt, desgleichen die zugehörigen Gesamtflugzeiten.

### B. Vorbereitende Rechnungen.

1. Die Reduktion der für einzelne Flugbahnen erschossenen Gesamtschußweiten auf den Mündungshorizont erfolgt nach § 80, B 1 Verfahren c oder d.

2. Die Berücksichtigung des Abgangsfehlerwinkels.

Erwünscht ist die Ermittlung des Abgangsfehlerwinkels für verschiedene Rohrerhöhungen, etwa mit dem Dudagerät (vgl. Band III). Seine Berücksichtigung erfolgt dann nach § 80 B 2. Ist der Abgangsfehlerwinkel nur für den Flachschuß nach einem der älteren Verfahren festgestellt, so läßt man ihn besser bei der Berechnung ganz außer Betracht.

### 3. Die Umrechnung der gemessenen Bahngeschwindigkeiten auf die Mündung.

Es wird nach § 80 B 3 verfahren. Die Festlegung der Anfangsgeschwindigkeit für jeden einzelnen Schuß entweder nach dem dort geschilderten überschlägigen Verfahren aus der Beziehung: Anfangsgeschwindigkeit in Funktion der Uhrzeit oder mit Sondergeräten durch direkte Messung ist besonders bei den Flugabwehrkanonen von Wichtigkeit.

### 4. Die Berechnung der schußtafelmäßigen Anfangsgeschwindigkeit erfolgt nach § 80 B 4.

### 5. Die Umrechnung der Gesamtschußweiten $X$ und der Gesamtflugzeiten $T$ auf Normalbedingungen führt man nach § 80 B 5 und § 80 C 1 c aus.

### 6. Umrechnung der Koordinaten der mittleren Sprengpunkte und der zugehörigen mittleren Flugzeiten auf Normalbedingungen.

a) Reduktion auf Windstille. Man berechnet aus den Höhenwindmessungen unter entsprechendem Anschluß an die gleichzeitigen Messungen des Bodenwindes für die einzelnen, im meteorologischen Protokoll angegebenen Höhenstufen die Windkomponenten in der Schußrichtung  $w_p$  (positiv bei Mitwind, negativ bei Gegenwind) und  $w_s$  senkrecht zur Schußrichtung (positiv bei Wind von links, negativ bei Wind von rechts). Diese Windkomponenten gleicht man für jeden Pilotaufstieg in Funktion der Höhe graphisch aus. Zu den einzelnen beobachteten Höhenstufen werden die Uhrzeiten eingeschrieben. Ferner wird für einzelne Höhenstufen eine zweite graphische Darstellung angefertigt, die für konstante Höhen  $h$  die Windkomponenten  $w_p$  und  $w_s$  in Funktion der Uhrzeit gibt. Aus diesen Diagrammen läßt sich dann für jede zwischenliegende Höhenstufe und Uhrzeit die betreffende Windkomponente entnehmen. Sind weiter die Mittelwerte der Elemente einer Sprengpunktgruppe  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  und  $t_1$ , so ermittelt man nach einem der in § 49 beschriebenen Verfahren die Komponenten des ballistischen Windes für die Höhe  $y_1$  unter Benutzung der beiden vorerwähnten Diagramme. Es ergeben sich somit für verschiedene Sprengpunktgruppen verschiedene ballistische Windkomponenten. (Gegenüber einer Erdschußtafel ist hier die Bestimmung des ballistischen Windes insofern wesentlich erleichtert, als man für jede beschossene Erhöhung die Funktion  $y = F(t)$  empirisch festgelegt hat, somit die Gewichtsfaktoren zur Bildung des ballistischen Windes genauer erhält.)

Es mögen die zu den Elementen  $x_1, y_1, z_1$  und  $t_1$  gehörigen Komponenten des ballistischen Windes  $w_{p,1}$  und  $w_{s,1}$  sein. Dann erfolgt die Umrechnung auf Windstille, für die die Elemente  $x_0, y_0, z_0$  und  $t_0$  seien, nach:

$$x_0 = x_1 - w_{p,1} \cdot \left\{ t_1 + \frac{x_1}{v_0 \cdot \cos \varphi} \right\} \quad \text{Formel (9) § 47}$$

$$y_0 = y_1 + \frac{2 \cdot w_{p,1}}{v_0 \cdot \cos \varphi} \cdot \{ x_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi - 2 y_1 \} \quad \text{Formel (10) § 47}$$

$$z_0 = z_1 + w_{s,1} \cdot \left\{ t_1 - \frac{x_1}{v_0 \cdot \cos \varphi} \right\} \quad \text{Formel (19) § 48}$$

$$t_0 = t_1 \left\{ 1 - \frac{2 \cdot w_{p,1}}{v_0 \cdot \cos \varphi} \right\} \quad \text{Formel (11) § 47}$$

b) Reduktion auf Normalluftgewicht. Liegen aerologische Aufstiege (Drachen, Ballon, Flugzeug- oder Raketenmeteorograph) vor, so sind danach die Luftgewichte der einzelnen Höhenstufen zu errechnen und, wie beim Wind, in zwei Diagrammen darzustellen. Fehlen solche Aufstiege, so ist vom Bodenluftgewicht auszugehen und das Luftgewicht für die einzelnen Höhenstufen, etwa mit den Wienerschen Tabellen (siehe § 79) des Dichteverhältnisses zu bestimmen. Diese können auch zur Extrapolation über die mit den aerologischen Aufstiegen erreichten Höhen hinaus benutzt werden. Aus den beiden erwähnten Diagrammen wird das ballistische Luftgewicht nach einem der in § 49 erwähnten Verfahren bestimmt.

Das ballistische Normalluftgewicht für die Höhe  $y$  sei  $\delta_y$ , das ballistische Luftgewicht der Versuchszeit für die gleiche Höhe  $\delta$ . Dann ist  $\Delta \delta = \delta_y - \delta$  und die Reduktion auf Normalluftgewicht erfolgt nach folgenden Gleichungen:

$$\Delta_1 x = - \frac{\Delta \delta}{\delta} \cdot x_1 \quad \text{Formel (25) des § 44}$$

$$\Delta_1 y = + \frac{\Delta \delta}{\delta} \cdot \{ x_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi - 2 y_1 \} \quad \text{Formel (26) des § 44}$$

$$\Delta_1 t = - \frac{\Delta \delta}{\delta} \cdot t_1 \quad \text{Formel (27) des § 44.}$$

c) Reduktion auf schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit. Die schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit sei  $v_{0,r}$ , die Anfangsgeschwindigkeit der betreffenden Sprengpunktgruppe  $v_0$ , so ist  $\Delta v_0 = v_{0,r} - v_0$ . Man erhält die Korrekturen:

$$\Delta_2 x = - \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot x_1 \quad \text{Formel (29) des § 44}$$

$$\Delta_2 y = + \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot \{ 3 x_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi - 4 y_1 \} \quad \text{Formel (30) des § 44}$$

$$\Delta_2 t = - 2 \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot t_1 \quad \text{Formel (31) des § 44.}$$

Schließlich erhält man die völlig auf Normalbedingungen reduzierten Elemente einer Sprengpunktgruppe zu

$$x_r = x_0 + \Delta_1 x + \Delta_2 x$$

$$y_r = y_0 + \Delta_1 y + \Delta_2 y$$

$$t_r = t_0 + \Delta_1 t + \Delta_2 t.$$

## 7. Reduktion der Zünderstellung.

Man trägt, für jeden beschossenen Abgangswinkel für sich, die Zünderstellungen  $\beta$  der einzelnen Sprengpunktgruppen in Funktion der zugehörigen, gemessenen (nicht bereits reduzierten) Flugzeiten  $t$  auf und gleicht durch Kurvenzug aus. Aus diesen Kurven  $\beta = F(t)$  kann man auf Grund der gleichen Annahme, die in § 80 D 6 erwähnt ist, ohne weiteres zu den reduzierten Flugzeiten  $t_r$  die zugehörige reduzierte Zünderstellung  $\beta_r$  ablesen.

## C. Aufstellung der Flugbahnbilder.

### 1. Ausgleich über die Kurven gleicher Aufsatzwinkel.

Der Winkel zwischen der Visierlinie und der Seelenachse (Aufsatzwinkel) sei mit  $\alpha$ , der Winkel der Visierlinie zum Horizont (Geländewinkel) mit  $\gamma$ , der Abgangswinkel mit  $\varphi$  bezeichnet. Dann ist, vom Abgangsfehlerwinkel und von besonderen Verhältnissen beim schräggestellten Aufsatz abgesehen,  $\varphi - \alpha = \gamma$ . Man berechnet für die reduzierten Punkte jedes Abgangswinkels die zugehörigen Geländewinkel aus  $\text{tg } \gamma = \frac{y_r}{x_r}$ . Dann erhält man die zu den betreffenden Punkten zugehörigen Aufsatzwinkel zu  $\alpha = \varphi - \gamma$ . Sodann werden, für jeden beschossenen Abgangswinkel gesondert, diese Aufsatzwinkel in Funktion der zugehörigen Werte  $x_r$  aufgetragen und durch Kurvenzug ausgeglichen. Sämtliche Kurven  $\alpha = F(x_r)$  haben, wie sich aus den Verhältnissen des luftleeren Raumes ergibt, eine gemeinsame Anfangstangente, deren Neigung  $\varepsilon$  zur Abszissenachse gegeben ist durch  $\text{tg } \varepsilon = \frac{g}{2v_0^2}$ . Ferner sind die Endpunkte der Kurven  $\alpha = F(x_r)$  bestimmt durch die Punkte  $P(x = X, \alpha = \varphi)$ , d. h. diese Endpunkte liegen auf der Erhöhungskurve der zugehörigen Erdschußtafel, die man daher zweckmäßig in das Kurvenblatt der  $\alpha = F(x_r)$  mit einträgt. Aus den Kurven  $\alpha = F(x_r)$  kann man dann für jeden beschossenen Abgangswinkel  $\varphi$  eine Tabelle aufstellen, die zu runden Werten der Aufsatzwinkel, etwa von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  fortschreitend, die zugehörigen Abszissenwerte  $x$  gibt.

Auf dem Kurvenblatt, das zur Aufzeichnung des Flugbahnbildes dienen soll, werden nunmehr zunächst die erschossenen (nicht redu-

zierten) und die reduzierten Punkte eingetragen (Abszisse  $x$ , Ordinate  $y$ ) und zusammengehörige Werte durch Pfeile im Sinne der Reduktion verbunden. Ferner zieht man in angemessenen Intervallen, etwa unter Neigungen von  $2^{\circ}, 5^{\circ}, 7^{\circ}, 10^{\circ}$  usw. durch den Koordinatennullpunkt die Geländewinkelgeraden. Nun können die Kurven gleicher Aufsatzwinkel punktweise festgelegt werden, was am Beispiel des Aufsatzwinkels  $\alpha = 5^{\circ}$  erläutert werden möge: Man entnimmt aus der Tabelle für  $\varphi = 15^{\circ}$  zum Aufsatzwinkel  $\alpha = 5^{\circ}$  die zugehörige Abszisse  $x$  und bezeichnet auf der Geländewinkellinie für  $\gamma = 10^{\circ}$  den Punkt  $P$ , der diese Abszisse hat. Weiter entnimmt man der Tabelle für  $\varphi = 20^{\circ}$  wiederum zum Aufsatzwinkel  $\alpha = 5^{\circ}$  die zugehörige Abszisse  $x'$  und markiert auf der Geländewinkellinie für  $\gamma = 15^{\circ}$  den Punkt  $P'$ , der die Abszisse  $x'$  hat, usw. Dann sind  $P, P'$  usw. Punkte der Aufsatzwinkelkurve für  $\alpha = 5^{\circ}$ , denn sie erfüllen obige Bedingung, daß  $\gamma = \varphi - \alpha$ .

Für das endgültige Ziehen der Kurven gleicher Aufsatzwinkel sind noch folgende Punkte zu beachten: Die Kurven beginnen im Mündungshorizont bei einer Abszisse, die gleich der Schußweite  $X$  zum Abgangswinkel  $\varphi = \alpha$  ist. Des weiteren haben die Kurven gleicher Aufsatzwinkel die gleiche Einhüllende wie die Flugbahnscharen. Endlich fallen bei kleinen Aufsatzwinkeln  $\alpha$  die Kurven gleicher Aufsatzwinkel ganz oder nahezu zusammen mit den Flugbahnen für die Abgangswinkel  $\varphi = 90^{\circ} - \alpha$ . Meist ließen sich bei den zahlreichen, während der Jahre 1917 und 1918 nach diesem Verfahren aufgestellten Luftschußtafeln die Kurven gleicher Aufsatzwinkel glatt und ohne besondere Abweichungen von den Einzelpunkten ziehen.

## 2. Konstruktion der Flugbahnen.

Durch die erschossenen und reduzierten Punkte, besonders aber durch die Schnittpunkte der Kurven gleicher Aufsatzwinkel mit den Geländewinkelgeraden sind nunmehr auch die einzelnen Geschoßbahnen sicher festgelegt. So erhält man z. B. für die Geschoßbahn mit  $\varphi = 40^{\circ}$  außer den zu diesem Abgangswinkel gehörenden reduzierten Flugbahnpunkten als weitere Punkte die Schnitte der Geländewinkelgeraden für  $\gamma = 35^{\circ}$  mit der Aufsatzwinkelkurve für  $\alpha = 5^{\circ}$ ; ferner der Geländewinkelgeraden für  $\gamma = 30^{\circ}$  mit der Aufsatzwinkelkurve für  $\alpha = 10^{\circ}$ , usw. Selbstverständlich müssen die Flugbahnkurven noch den Mündungshorizont (die Abszissenachse) bei der zu dem betreffenden Abgangswinkel  $\varphi$  gehörigen Gesamtschußweite  $X$  der Erdschußtafel schneiden; auch muß die Endtangente an die Geschoßbahn mit der Abszissenachse den Fallwinkel  $\omega$  der Erdschußtafel einschließen.

### 3. Konstruktion der Kurven gleicher Flugzeiten.

Man zeichnet auf gesondertem Kurvenblatt für jeden Abgangswinkel  $\varphi$  die reduzierten Flugzeiten  $t_r$  in Funktion der zugehörigen reduzierten Abszissen  $x_r$  auf und gleicht durch Kurvenzüge aus. Die einzelnen Anfangstangenten zu diesen Kurven  $t = F(x)$  haben zur Abszissenachse die Neigungen  $\tau$ , wobei sich aus den Verhältnissen des luftleeren Raumes ergibt:  $\operatorname{tg} \tau = \frac{1}{v_0 \cdot \cos \varphi}$ . Aus den Kurven  $t = F(x)$  werden nun, getrennt für die einzelnen Abgangswinkel, umgekehrt zu runden Werten der Flugzeit, z. B. für 5, 10, 15 usw. Sekunden die Abszissenwerte abgelesen. Soll nun z. B. die Kurve der Flugzeit von 10 Sekunden gezeichnet werden, so markiert man auf der Flugbahn für  $\varphi = 70^\circ$  den Punkt, der die gleiche Abszisse hat, wie sie aus der Kurve  $t = F(x)$  für  $70^\circ$  abgelesen wurde. Entsprechend werden die Schnittpunkte der Kurve für 10 Sekunden auf den anderen Flugbahnen gezeichnet. Der Schnitt der Flugzeitkurve mit der Abszissenachse wird durch die zur betreffenden Flugzeit gehörige Schußweite der Erdschußtafel bestimmt. Durch die erhaltenen Punkte wird eine ausgleichende Kurve gezogen.

Bei kleinen Flugzeiten verlaufen diese Kurven konzentrisch mit den Kreisbögen gleicher Zielentfernung, die um den Koordinatennullpunkt (Mündung) geschlagen werden. Bei wachsender Flugzeit zeigen die in der gleichen Zeit erreichten Punkte mit zunehmender Höhe abnehmende direkte Entfernungen zur Mündung. Nur bei sehr großen Anfangsgeschwindigkeiten tritt infolge des günstigen Einflusses der abnehmenden Luftdichte wieder die umgekehrte Tendenz ein.

### 4. Konstruktion der Kurven gleicher Zünderstellung.

Das Verfahren entspricht völlig dem unter 3. geschilderten. Man zeichnet für die einzelnen beschossenen Abgangswinkel  $\varphi$  gesonderte Kurven  $\beta_r = F(x_r)$ , die aber im Gegensatz zu den Kurven  $t_r = F(x_r)$  nicht vom Nullpunkt ausgehen, liest für runde Zünderstellungen die zugehörigen Abszissenwerte aus diesen Kurven ab und markiert die Schnittpunkte der Kurven gleicher Zünderstellung mit den Flugbahnen wie oben erwähnt. Bei mechanischen Zündern verlaufen die Kurven gleicher Zünderstellung fast völlig konzentrisch zu den Kurven gleicher Flugzeit. Bei Satzringbrennzündern dagegen brennen die Zünder mit zunehmender Höhe infolge des geringeren Luftdrucks langsamer. Die Kurven gleicher Zünderstellung weichen daher mit wachsender Höhe immer mehr nach der Einhüllenden zu von den Kurven gleicher Flugzeit ab.

## 5. Konstruktion der Kurven gleicher Seitenverschiebung.

Die reduzierten Seitenabweichungen  $z_r$  von der Schußebene werden an Hand der zugehörigen Abszissen  $x_r$  in Seitenverschiebungen  $s$  im Winkelmaß (Teilstriche) umgerechnet  $s = \frac{z_r}{x_r} \cdot 1017$ . Dann trägt man auf einem Kurvenblatt für jede beschossene Erhöhung gesondert die Werte  $s$  in Funktion der zugehörigen Abszisse auf (Kurven gehen vom Nullpunkt aus), gleicht graphisch aus und liest umgekehrt für runde Seitenverschiebungswerte die Abszissen ab. Die Schnittpunkte der Kurven gleicher Seitenverschiebung mit den Flugbahnen werden, genau wie dies bei den Flugzeitkurven besprochen, markiert und die Kurven gezogen.

Aus dem fertiggestellten Flugbahnbild lassen sich dann die Flakschußtafeln auch in Tabellenform ableiten. Man gibt entweder die absolute Rohrerhöhung  $\varphi$  oder den Aufsatzwinkel  $\alpha$  in Abhängigkeit von zwei anderen Größen: direkte Zielentfernung und Zielhöhe oder statt dieser auch den Geländewinkel.

Es muß zum Schluß dieses Paragraphen noch betont werden, daß die besprochenen Schießbehelfe für Flugabwehrkanonen nur den rein ballistischen Teil der Aufgabe betreffen. Sie geben zunächst nur die Grundlage für die Bekämpfung von Luftzielen, die ihren Raumort nicht ändern. Die schnelle Bewegung und Richtungsänderung bedingt aber die Aufstellung weiterer Behelfe, die auch der Ortsveränderung des Flugzeuges während der Kommandozeit, Ladezeit und Geschößflugzeit auf Grund besonderer vorausgehender Ermittlungen Rechnung tragen. Als solche Behelfe sind zuerst sogenannte Kommandotafeln aufgestellt worden. Später ist man mehr und mehr dazu übergegangen, die Aufgabe der Kommandobildung unter Berücksichtigung der ballistischen Verhältnisse und der Flugzeugbewegung zu mechanisieren. Eine nähere Besprechung der Wege, die zu solchen Kommandotafeln oder Kommandogeräten führen, verbietet sich im Rahmen dieses Buches.

## § 82. Herstellung der Schießbehelfe für den Gebirgskrieg.

### A. Flugbahnbilder (Flugbahnaufrisse).

In der Regel werden die Flugbahnbilder aus bereits vorhandenen Erdschußtafeln abgeleitet. Je nach der Leistung der betreffenden Waffe kommen dafür verschiedene Verfahren in Frage.

Bei Anfangsgeschwindigkeiten bis etwa 100 m/sec (Minenwerfer mit Ausnahme von deren größten Ladungen) genügt, wie 1917 und 1918 Vergleiche mit zahlreichen, in ihrem vollen Verlaufe photographisch aufgenommenen Minenflugbahnen gezeigt haben, mit einer für die Bedürfnisse der Praxis völlig ausreichenden Genauig-

keit die Anwendung der mehrfach erwähnten Flugbahngleichung des luftleeren Raums

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(1 - \frac{x}{X}\right),$$

in der aber  $X$  nicht etwa die parabolische Schußweite bedeutet. Vielmehr wird der Abgangswinkel  $\varphi$  aus der Erdschußtafel zur tatsächlichen Schußweite  $X$  entnommen. Für Anfangsgeschwindigkeiten bis etwa 200 m/sec hat sich bisher auch diese Gleichung in der etwas modifizierten Form

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot \left(1 - \frac{x}{X}\right)$$

noch gut bewährt, wobei nach Siacci  $\operatorname{tg} \psi$  aus der empirischen Beziehung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{x \cdot \operatorname{tg} \omega + (X - x) \cdot \operatorname{tg} \varphi}{X}$$

zu berechnen ist. Beide Formen der Flugbahngleichung sind für obere und untere Winkelgruppe brauchbar. E. Stübler hat zur Berechnung des Flugbahnverlaufs bis zu etwa 300 m/sec, speziell für die obere Winkelgruppe, die Methode Euler-Otto etwas abgeändert; F. Rückle hat hierzu ausführliche Tabellen berechnet, die aber bisher nicht veröffentlicht sind. Ein näheres Eingehen auf die Stüblersche Methode muß daher unterbleiben.

Bei Anfangsgeschwindigkeiten über 200 m/sec (natürlich, soweit die betreffenden Funktionstabellen ausreichen, auch schon darunter) kann im Bereiche der unteren Winkelgruppe, aber nur bei dieser, die Berechnung des Flugbahnaufisses aus der Flugbahngleichung  $y = F(x)$  eines der in den früheren Paragraphen beschriebenen Lösungssysteme erfolgen. Nach Vergleichen, die Nowakowski (siehe Lit.-Note zu § 41) mit photogrammetrisch festgelegten Flugbahnen, allerdings nur für geringere Leistungen bis ca. 300 m/sec durchgeführt hat, ist dabei die in Österreich benutzte Methode Didion-Wuich recht brauchbar, wenn man den ballistischen Koeffizienten aus der zugehörigen Erdschußtafel ableitete. In Deutschland haben ähnliche, vielleicht aber erheblich umfangreichere Vergleiche mit empirisch festgelegten Geschosbahnen gezeigt, daß auch die Flugbahngleichung des Lösungssystems von Siacci III bis zu einer Anfangsgeschwindigkeit von etwa 600 m/sec noch brauchbar ist. Dabei gestaltet sich besonders bequem die Verwendung dieser Gleichung in der von Fasella gegebenen Form:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{f(X)}\right).$$

Liegt von der Berechnung der zugehörigen Erdschußtafel die endgültige Kurve  $c = F(\varphi)$ , wie dies die Regel sein wird, vor, so kann man zunächst zur Gesamtschußweite  $X$  der betreffenden Flugbahn



über  $f_0 = \frac{x}{c}$  aus der Tafel II von Fasella die Funktion  $f(X)$  bestimmen. Diese oder der aus einer Reziprokentafel entnommene Wert  $\frac{1}{f(X)}$  ist dann für die ganze Flugbahn konstant. Nun sind in gewissen Abszissenintervallen  $x_1, x_2$  usw., ebenso über den Wert  $f_0 = \frac{x}{c}$  die Funktionen  $f(x_1), f(x_2)$ , usw. aus Tafel II zu ermitteln. Dann gibt vorstehende Gleichung in einfachster Weise die Ordinaten  $y_1, y_2$  usw. Die Koordinaten des Gipfels sind ebenfalls glatt nach den Formeln (26) und (27) des § 79 zu berechnen. Liegen die Kurven  $c' = F(\varphi)$  nicht vor, so bestimmt man nach Gleichung (24) des § 79 zunächst die Funktionen  $f_1$ , zu diesen aus Tafel III  $f_0$ , zu diesen wieder aus Tafel II  $f$ .

Für die größtenteils graphische Aufstellung von Flugbahnbildern benutzte E. Stübler die Flugbahngleichung in der Form

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x \cdot B(x)}{2 \cdot \cos^2 \varphi},$$

die für die untere Winkelgruppe bis zu  $40^\circ$  sehr genau sein soll. Die Funktion  $B(x)$  ist dabei durch Spezialisierung für  $x = X, y = 0$  zu berechnen:  $B(x) = \sin 2\varphi$ . Die Anwendung der Gleichung setzt voraus, daß  $B(x)$  allein von  $x$ , nicht aber von der Flughöhe abhängt, eine Annäherung, die jedenfalls nur für die untere Winkelgruppe mit einiger Genauigkeit gemacht werden darf. Für die größeren Schußweiten und für die obere Winkelgruppe wendet Stübler gewisse Korrekturen an. Ein näheres Eingehen auf das Stübler'sche Verfahren, das namentlich bei der im Kriege nötig gewordenen Herstellung der Flugbahnbilder auf schnellstem Wege ausgezeichnete Dienste leistete, ist ohne weitgehende zeichnerische Darstellungen nicht möglich.

Für die obere Winkelgruppe über etwa 300 m/sec und für die untere Winkelgruppe über 600 m/sec ist Bahnberechnung in Teilbogen nach einem der Verfahren des 7. Abschnittes nötig. Auch hierbei hat die im § 79 A erläuterte Berechnungsweise sich besonders bewährt. Es kommt, wenn bereits eine erschossene Erdschußtafel vorliegt, darauf an, durch wiederholte Rechnung mit verschiedenem  $i$ -Wert die Flugbahn so zu bestimmen, daß ihre Horizontalschußweite mit den Angaben der Erdschußtafel übereinstimmt.

Wird ein Flugbahnbild etwa in ähnlicher Weise wie eine Flakschußtafel erschossen, was immer vor der reinen Rechnung den Vorzug haben wird, so erfolgt der Ausgleich bis zum fertigen Schaubild in genau derselben Art, wie dies im vorausgehenden Paragraphen ausführlich besprochen wurde.

Die Berechnung der Kurven gleicher Flugzeiten erfolgt über die in der jeweils zur Ordinatenberechnung angewandten Lösungsmethode

gegebenen Gleichungen für die Flugzeit; bei empirisch erschossenen Flugzeiten in der im § 81 geschilderten Art.

### B. Graphische Schuß tafeln.

Denkt man sich aus einem Pivotgeschütz die einzelnen mittleren Flugbahnen für Erhöhungen, steigend von Grad zu Grad, erschossen und festgelegt, und dabei bei jeder Erhöhungsänderung auch die Seitenrichtung um einen konstanten Betrag, etwa gleichfalls  $1^\circ$ , geändert, so liegen die mittleren Flugbahnen auf der Oberfläche eines Berges, den Amman, auf den das Verfahren zurückgeht, Flugbahnberg nennt. Stellt man diesen Flugbahnberg, genau wie einen Berg im Gelände, durch Schichtlinien dar, so erhält man die „graphische Schuß tafe l“. Aus ihr kann man, genau wie aus einer topographischen Schichtlinienkarte die Höhenverhältnisse der verschiedenen Flugbahnen rückwärts feststellen. Die graphischen Schuß tafeln haben im Kriege neben den Flugbahn bildern sich gut bewährt zur Lösung von Schießaufgaben des Gebirgskrieges.

P. Lötzbeyer gewinnt eine andere Art graphischer Schuß tafeln, indem er sich mit jeder Erhöhungsänderung die Schußebene parallel zu ihrer ersten Lage um gleiche Beträge verschoben denkt. Den so erhaltenen Flugbahnberg stellt er gleichfalls durch Schichtlinien dar.

### C. Ordinaten tafeln (Flughöhentafeln).

Bei einzelnen Artillerien sind an Stelle der vorerwähnten graphischen Darstellungen Ordinaten tabellen im Gebrauch. Für die Art ihrer Gewinnung gilt das unter A Gesagte.

## § 83. Die Aufstellung der Korrektions tafeln zur Ausschaltung der besonderen Einflüsse und der Witterungseinflüsse.

### A. Die innerballistischen Einflüsse.

Abweichungen der tatsächlich beim praktischen Schießen auftretenden Anfangsgeschwindigkeiten vom Schuß tafe l wert (in Deutschland „besondere Einflüsse“ genannt) verursachen in erster Linie eine Änderung der Schußweite. Die Berechnung entsprechender Korrektions tabellen erfolgt entweder für Anfangsgeschwindigkeiten über 300 m/sec nach Formel (52), unter 300 m/sec nach Formel (61) des § 44, oder für alle Geschwindigkeiten bei Benutzung der Fasella tafeln nach der Formel

$$\Delta X = X \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} \cdot f_v, \quad (a)$$

wobei die Funktion  $f_v$  aus der Tafel IX entnommen wird zu den

$f_0$ -Werten, die aus der bei der Schußtafelberechnung nach Fasella aufzustellenden Kurve  $f_0 = F(\varphi)$  abgelesen werden. Meist wird dabei  $\Delta v_0 = 10 \text{ m/sec}$  gesetzt. Nur in der deutschen Landartillerie ist als Maß für die Geschwindigkeitsänderung die sogenannte Stufeneinheit genommen, die gleich  $\frac{1}{300} \frac{0}{0}$  der Geschwindigkeit ist. Damit wird die Schußweitenänderung für eine Stufeneinheit:

$$\Delta X = \frac{X}{300} \cdot f_v. \quad (b)$$

Zuverlässiger als die Rechnung mit diesen Differentialformeln ist es, bei Geschützen mit mehreren Ladungen, die Schußweitenänderung aus dem Ladungsvergleich für gleiche Abgangswinkel zu gewinnen (vgl. hierzu § 80B 5d).

Zur Berechnung der Änderung der Anfangsgeschwindigkeit durch abweichende Pulvertemperatur, abweichendes Geschößgewicht und abweichende Pulverfeuchtigkeit dienen, soweit nicht besondere empirische Koeffizienten vorliegen, die Formeln des § 80B 4. Auf den Vorzeichen-sinn ist dabei besonders zu achten. So bringt höhere Tagestemperatur für sich allein höhere Anfangsgeschwindigkeit und damit Weitschuß, die Korrektur der Schußweite muß daher negativ werden.

## B. Die außerballistischen Einflüsse.

### 1. Einfluß abweichenden Luftgewichtes.

Die Berechnung der Korrekturtafeln erfolgt für alle Anfangsgeschwindigkeiten nach Formel (49) und (58) des § 44, wobei nach Formel (13) des gleichen Paragraphen  $\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta \delta}{\delta}$  gesetzt werden darf. Liegen von der Schußtafelberechnung nach Fasella her für bestimmte Abgangswinkel  $\varphi$  die Funktionen  $f_s$  vor, so rechnet man etwas kürzer nach

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta \delta}{\delta} \left(1 - \frac{1}{f_s}\right).$$

Mit dem Luftgewichtseinfluß wird vielfach kombiniert der außerballistische Einfluß des Geschößgewichts. Nach Formel (13) des § 44 wirkt eine bestimmte relative Änderung des Geschößgewichts in gleicher Größe, aber mit umgekehrtem Vorzeichen wie die gleiche relative Änderung des Luftgewichtes auf den ballistischen Koeffizienten. Man kann daher aus  $\frac{\Delta P}{P}$   $\frac{\Delta \delta}{\delta}$  bestimmen, welche Korrekturen am beobachteten Luftgewicht anzubringen sind, um einer bestimmten Abweichung des Geschößgewichts Rechnung zu tragen, dafür im Einzelfalle eine kurze Tabelle geben und liest beim Schießen dann zu dem so korrigierten Luftgewicht die Entfernungskorrektur aus der Haupttabelle ab.

## 2. Windeinfluß.

Am besten ist eine empirische Ermittlung der Windeinflußtafeln durch Schießen nach verschiedenen Richtungen unter sonst völlig gleichen Bedingungen und bei sorgfältigstem meteorologischem Dienst. Wo derartige Erfahrungen nicht vorliegen, berechnet man den Einfluß des Seitenwindes für alle Anfangsgeschwindigkeiten mit der Formel (19) des § 48, den Einfluß des Längswindes entweder bei Anfangsgeschwindigkeiten unter 300 m/sec mit Formel (12) des § 47, über 300 m/sec mit Formel (13) des § 44 oder, wenn aus der Schußtafelberechnung nach Fasella die Funktionen  $f_s$  für bestimmte Abgangswinkel schon vorliegen, etwas kürzer

$$\text{für } v_0 < 300 \text{ m/sec nach } \Delta X: \quad -w_p \cdot \left[ T - \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{1}{f_s} \right],$$

$$\text{für } v_0 > 300 \text{ m/sec nach } \Delta X = -w_p \cdot \left[ T - \frac{X}{v_0 \cdot \cos \varphi} \cdot \left( \frac{2}{f_s} - 1 \right) \right].$$

Auf den Vorzeichensinn ist bei Aufstellung der Tabellen zu achten. Bei Mitwind muß die Entfernungskorrektur negativ, bei Gegenwind positiv werden. Die Seitenkorrektur ist bei Wind von links positiv, bei Wind von rechts negativ.

Die Berechnung der einzelnen Korrekturtafeln erfolgt bei den innerballistischen und den äußerballistischen Einflüssen in bestimmten Entfernungsintervallen. Für alle Korrekturen werden dann graphische Darstellungen in Funktion der Entfernung aufgezeichnet und danach die nicht berechneten Zwischenwerte ermittelt.

## C. Berechnung der Korrekturwerte gegen Ziele außerhalb des Mündungshorizontes.

Die Aufstellung kurzer Tabellen, wie sie bei Zielen im Mündungshorizont möglich ist, kommt bei Zielen außerhalb desselben nicht in Betracht. Man wird im einzelnen Falle nach den Formeln der § 44, 47 und 48 für beliebige Punkte  $(x, y)$  die Berechnungen durchführen und nun zusehen, ob man in dem betreffenden Falle zu bestimmten, ausreichend genauen Vereinfachungen kommt. So fand z. B. E. Stübler für ein bestimmtes Geschütz, daß die Kurven gleicher Verbesserung für das Luftgewicht etwa verlaufen wie die Kurven gleicher Flugzeiten. Daraus ergab sich für das praktische Schießen die Näherungsregel: Man gehe vom Zielpunkt  $(x, y)$  gleichlaufend mit der nächsten Kurve gleicher Flugzeiten bis zum Mündungshorizont und ermittle für die hier erhaltene Gesamtschußweite aus den Tabellen die erforderlichen Korrekturen. Diese sind an derjenigen wagrechten Schußweite anzubringen, die zum gleichen Abgangswinkel wie der Punkt  $(x, y)$  gehört.

## Literaturnoten und Bemerkungen zu Band I.

(Äußere Ballistik.)

### Zeitschriften.

- Archiv für die Offiziere der Kgl. Preuß. Artillerie und des Ingenieurkorps,  
Bd. 1—68. Berlin 1837—1870. Fortgesetzt als:  
Archiv für die Artillerie- und Ingenieuroffiziere des deutschen Reichsheeres,  
Bd. 69—104. Berlin 1871—1897; seit 1898 eingegangen (Arch. f. Art.- u.  
Ing.-Off.).
- Army and Navy Journal, New York.  
Army Ordnance, Washington.  
Army Quarterly, London.  
Artilleriskii Journal, 1. Bd. Petersburg 1839 (Petersb., Art. Journ.).  
Allgemeine schweizerische Militärzeitung, 1. Bd. Basel 1863.  
Artilleristische Monatshefte, 1. Bd. Berlin 1907 (Art. Monatsh.).  
Artilleristische Umschau, München.  
Artilleri Tidskrift, Upsala.  
Dansk Artilleri Tidskrift, Kopenhagen.  
De Militaire Spectator, s'Gravenhage.  
Der Schweizer Artillerist, Zürich.  
Heerestechnik, Berlin, Verlag Offene Worte.  
Journal of the Royal Artillery, Woolwich.  
Journal of the United States Artillery, Fort Monroe (Virginia), eingegangen.  
Kriegskunst in Wort und Bild, Berlin, Verlag Offene Worte.  
Kriegstechnische Zeitschrift, 1. Bd. Berlin 1898 (Kriegstechn. Z.) fortgesetzt in  
„Heerestechnik“, s. o.  
Kugel und Schrot, Berlin.  
La Corrispondenza, 1. Bd. Livorno 1899 (La corrisp.), eingegangen.  
The Kynoch Journal, Birmingham.  
Marinerundschau, Berlin, Verlag Mittler & Sohn.  
Memorial de Artilleria, 1. Bd. Madrid 1844.  
Mémorial de l'Artillerie de la Marine, Paris.  
Mémorial de l'Artillerie française, 1. Bd. Paris 1922.  
Mémorial des poudres et salpêtres, Paris.  
Militärwissenschaftliche und technische Mitteilungen, Wien.  
Mitteilungen des k. k. Geniekomitees über Gegenstände der Ingenieurkunst und  
des Kriegswesens. Wien 1856—1870. Fortgesetzt als:  
Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Wien, seit 1870  
(Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes.), eingegangen 1918.  
Norsk Artilleri Tidskrift, Christiania.  
Organ der militärwissensch. Vereine, 1. Bd. Wien 1870.  
Proceedings of the royal Artillery Institution, Woolwich.  
Revue d'Artillerie, 1. Bd. Paris 1873 (Rev. d'Art.).  
Revue d'Infanterie, Paris.  
Revue de l'armée belge, Liège.

- Revue du Génie militaire, Paris.  
 Revue militaire française, Paris.  
 Revue militaire générale, Paris.  
 Revue maritime et coloniale, 1. Bd. Paris 1872.  
 Revista Artileriei, Bukarest.  
 Rivista di Artiglieria e Genio, Roma (Riv. d'art. e gen.).  
 Rivista marittima, 1. Bd. Roma 1868 (Riv. mar.).  
 Schweizerische Vierteljahrsschrift für Kriegswissenschaft, Basel.  
 Suomen Sotilaseikakauslehti, Helsingfors.  
 Svensk Kust Artilleri-Tidsskrift, Karlskrona.  
 Technik u. Wehrmacht, Berlin, eingegangen 1923, fortgesetzt „Heerestechnik s. o.“  
 The Coast Artillery Journal, Fort Monroe.  
 The Field Artillery Journal, Philadelphia.  
 Vojensko-Technicke Zprávy, Prag.  
 Wissen und Wehr, Berlin, Verlag Mittler & Sohn.  
 Zeitschrift der deutschen Versuchsanstalt für Handfeuerwaffen, Berlin-Halensee.  
 Zeitschrift für das gesamte Schieß- und Sprengstoffwesen, 1. Bd. München 1906  
 (Z. f. d. ges. Schieß- u. Spr.-Wes.).  
 Zeitschrift „Schuß und Waffe“, Versuchsanstalt Neumannswalde-Neudamm.

## Lehrbücher und Monographien.

### Äußere Ballistik.

- Bashforth, F.: Mathematical treatise on the motion of projectiles. London 1873; supplement 1881 (Bashforth).  
 Becker, K.: Die Waffentechnik in ihren Beziehungen zur Physik u. Mathem. „Kultur der Gegenwart“. IV, 12, Leipzig 1913.  
 Becker, K.: Artillerietechnik; Technik im 20. Jahrhundert, Bd. IV, Braunschweig. Berlin: Handb. d. Waffenlehre, 3. Aufl. Berlin 1912.  
 Bianchi, Corso teorico pratico di Balistica esterna, Turin 1922.  
 Braccialini, S.: Über die praktische Lösung der Probleme des Schießens, deutsch von v. Scheve. Berlin 1884.  
 Brandeis, F.: Der Schuß, Erklärung der den Schußserfolg beeinflussenden Umstände und Zufälligkeiten. Wien und Leipzig 1896.  
 v. Burgsdorff, A. und v. Recklinghausen: Tafeln zur Flugbahnberechnung von Infanteriegeschossen. Berlin 1897.  
 Burileano, S.: Probabilité du tir. Paris 1911.  
 Charbonnier, P.: Traité de balistique extérieure. Paris 1904 (Charbonnier 1).  
 — Balistique extérieure rationnelle, 3 Teile. Paris 1907. Teil der Encyclopédie scientifique Toulouse (Charbonnier 2 u. 3).  
 — Manuel de balistique extérieure. Paris 1908.  
 v. Chrismar: Leitfaden für den Unterricht in der Ballistik, Heft I. Charlottenburg 1904.  
 Didion, J.: Traité de balistique. Paris 1848 (Didion). 2. Aufl. 1860.  
 — Lois de la résistance de l'air. Paris 1857.  
 — Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles. Paris 1858.  
 v. Eberhard, O.: Das Wesen der modernen Visiervorrichtungen. Berlin 1908.  
 — Die Waffentechnik in ihrer Beziehung zur Optik. „Kultur der Gegenwart“, IV, 12. Leipzig 1913.  
 — Einiges über die Ballistik großer Schußweiten. Berlin: G. Barth 1924.  
 Fasella, F.: Tavole balistiche secondarie. Genova 1901.

- Groos, Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf dem Gebiete der Schießlehre. Berlin 1912.
- Groß, W.: Die Berechnung der Schußtafeln (frühere Kruppsche Rechenmethode). Leipzig 1901.
- Hamilton, A.: Ballistics; Fort Monroe (Virginia) 1908. I und II (äußere Ballistik).
- Haupt, P.: Mathematische Theorie der Flugbahnen gezogener Geschosse. Berlin 1876.
- Hélie, F.: Traité de ballistique expérimentale. Exposé général des principales expériences d'artillerie exécutées à Gâvre en 1830—66. Paris 1865; 2. éd., 2 vol. Paris 1884 (Hélie).
- v. Heim, J. P. G.: Beiträge zur Ballistik in besonderer Beziehung auf die Umdrehung der Artilleriegeschosse. Ulm 1848 (Heim).
- Heydenreich, W.: Lehre vom Schuß und die Schußtafeln, 2 Bde. Berlin 1898 (Heydenreich). 2. Aufl. 1908.
- Indra, A.: Graphische Ballistik. Wien 1876.
- Ballistik der Handfeuerwaffen. Wien 1879.
- Synthetische Entwicklung eines allgem. Luftwiderstandsgesetzes. Wien 1886.
- Neue ballistische Theorien. Pola 1893.
- Ingalls, J. M.: Exterior ballistics. New York 1886.
- Handbook of problems in direct and indirect fire. New York 1890.
- Handbook of problems in exterior ballistics. Washington 1900 (Ingalls).
- Justrow, Geschoskonstruktion, Berlin 1920 (Druckerei der Insp. f. Waffen und Gerät).
- Kozák, J.: Grundprobleme der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wien u. Leipzig 1907/10. Geschosbewegung im Vakuum. Wien u. Leipzig 1909. Einführung in die äußere Ballistik, Wien 1911.
- Krause: Die Gestaltung der Geschosgarbe der Infanterie beim gefechtsmäßigen Schießen. Berlin 1904.
- Kritzinger, H.: Schuß und Schall in Wetter und Wind. Leipzig 1918.
- de la Llave, J.: Balística abreviada, 1. Aufl. Madrid 1884; 2. Aufl. 1894.
- Lorenz, H.: Ballistik; die mechanischen Grundlagen der Lehre vom Schuß. 2. Aufl. München u. Berlin 1917.
- Mayevski, N.: Traité de balistique extérieure (russ.). St. Petersburg 1870; franz. Übersetzung unter demselben Titel. Paris 1872 (Mayevski).
- Über die Lösung der Probleme des direkten und indirekten Schießens (russ.). St. Petersburg 1882; deutsche Übersetzung von Klussmann unter demselben Titel mit einem Anhang: Krupp, F.: Ballistische Formeln von N. Mayevski nach F. Siacci, samt der Kruppschen Luftwiderstandstabelle (bis  $v=700$  m). Berlin 1886 (Mayevski-Klussmann).
- Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendung auf das Schießen (russ.). St. Petersburg 1881.
- v. Minarelli-Fitzgerald, A.: Das moderne Schießwesen. Wien 1901 (v. Minarelli).
- Müller, H.: Die Entwicklung der Feldartillerie in bezug auf Material, Organisation und Taktik von 1815 bis 1892. Berlin 1893.
- Negrotto, Balística Experimental y Aplicada, Madrid 1920, Bd. IV, äußere Ballistik.
- Neithardt: Die Lehre vom Treffen beim Abteilungsfeuer der Infanterie. Oldenburg (ohne Datum).
- Ritt. v. Niesiolowski-Gawin, V.: Ausgewählte Kapitel der Technik, mit besonderer Rücksicht auf militärische Anwendungen, 2. Aufl. Wien 1908.

- Otto, J. C. F.: *Mathematische Theorie des Ricochetschusses*. Berlin 1833.  
 — *Tafeln für den Bombenwurf*. 1842.  
 — *Hilfsmittel für ballistische Rechnungen*. Berlin 1859.  
 Parodi, *Balistica esterna*, herausgeg. von E. Cavalli. Turin 1901.  
 Pétry: *Monographies de systèmes d'Artillerie*. Brüssel 1910.  
 Piobert: G.: *Traité d'artillerie théorique et pratique*. 3 Bde. Paris 1831—1859.  
 Poisson, S. D.: *Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air* Paris 1839.  
 — *Formules relatives aux effets du tir sur les différentes parties de son affût* 2. éd. Paris 1838.  
 Resal, H.: *Mécanique générale*, t. 2. Paris 1873 (Resal).  
 Rohne, H.: *Studie über den Schrapnellschuß der Feldartillerie*. Berlin 1894.  
 — *Schießlehre für die Feldartillerie*. Berlin 1895.  
 — *Schießlehre für die Infanterie*. Berlin 1896 u. 1906.  
 — *Neue Studie über den Schrapnellschuß*. Berlin 1911.  
 Ronca, G.: *Manuale del tiro*. Livorno 1901.  
 — *Manuale di balistica esterna*. Livorno 1901. Dazu:  
 — und Bassani, A.: *Balistica esterna*. Livorno 1901.  
 — und Pesci, G., Abbachi per il tiro: abbachi generali della balistica. Livorno 1901.  
 Rutzki, A.: *Theorie und Praxis der Geschoß- und Zünderkonstruktion*. Wien 1871 (Rutzki).  
 Sabudski, N.: *Über die Lösung der Probleme des indirekten Schießens und über den Winkel größter Schußweite* (russ.). St. Petersburg 1888; Supplement 1890.  
 — *Außere Ballistik* (russ.). St. Petersburg 1895 (Sabudski).  
 — *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihre Anwendung auf das Schießen und auf die Theorie des Einschießens*, deutsch von Ritt. v. Eberhard. Stuttgart 1906.  
 — *Bewegung der Langgeschosse*. Stuttgart 1907 (deutsch von O. v. Eberhard).  
 Siacci, F.: *Corso di balistica*, 3 vol. Roma 1870/84; 2. éd. Torino 1888; franz. Übersetzung hiervon unter dem Titel: *Balistique extérieure*. Paris 1892 (Siacci).  
 — *Balistica e pratica*, Giorn. d'art. e gen. 1880, deutsche Übersetzung von Günther unter dem Titel: *Ballistik und Praxis*. Berlin 1882.  
 de St. Robert, P.: *Mémoires scientifiques*, 2 vol. Turin 1872/74 (St. Robert).  
 de Sparre, M.: *Mouvement des projectiles oblongs dans les cas du tir de plein fouet*. Paris 1875.  
 — *Sur le mouvement des projectiles dans l'air*. Paris 1891.  
*Textbook of gunnery*. London 1902.  
 Thiel, E.: *Das Infanteriegewehr, eine ballistisch-technische Studie*. Bonn 1883.  
 de Tilly, J. M.: *Balistique extérieure*. Gand 1875.  
 Vahlen, Th.: *Ballistik*. Berlin u. Leipzig 1922.  
 Vallier, E.: *Balistique expérimentale*. Paris 1894 (Vallier).  
 — *Balistique extérieure*, Teil der „Encyclopédie scientifique des Aide-Mémoire“. Paris, ohne Datum.  
 — *Referat über „Ballistik“ in der „Encyclopédie des sciences mathématiques“* (Paris: Gauthier-Villars), herausgeg. von J. Molik; Bd. 4, Nr. 21. Paris-Leipzig 1913 („Vallier, Enc.“).  
 Wille, R.: *Waffenlehre*, 1. Aufl. Berlin 1896; 2. Aufl. 1900; 3. Aufl. 1905 (Wille).



Witting. A.: Soldaten-Mathematik, Bd. 22 der „Mathemat. Bibliothek“, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig: Teubner 1916.  
 v. Wuich, N.: Lehrbuch der äußeren Ballistik. Wien 1886 (v. Wuich).

**Zu § 1 bis 7. Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands:** Obermayer, A. v.: Wien. Ber. 110, S. 365. 1901. Charbonnier, I., S. 278. Vgl. auch Weigner, A.: Mitt. üb. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. S. 1. 1890. Weiteres üb. d. Bahn im luftleer. Raum: v. Sinner, V. A.: Lehrb. d. Ball., nur 1. Teil, luftleer. Raum. Bern 1834. Tait, P. G.: Proceed. Roy. Soc. of Edinb. 7, S. 107. 1885. Walton, W.: Quart. Journ. of pur. and appl. Math. 10, S. 72. 1869. (Scheer de Lionastre: Théorie bal. bes. S. 20. Gand 1827. Lampe, E.: Boltzmann-Festschrift, S. 215. Leipzig 1904. Bezügl. d. Satzes § 6 über den schiefen Wurf mit Rücksicht auf die Erdkrümmung vgl. Cranz, C.: Kompend. d. Ball., S. 33. Leipzig 1896. Vgl. auch Kozák, J.: GeschöBbewegung im Vakuum. Wien u. Leipzig 1909. Über d. Parabelscharen hat Barisien einige weitere Sätze abgeleitet, die jedoch ballistisch kaum von Bedeutung sind: Nouvell. Annales (3) 6, S. 372. 1887; dazu vgl. auch Leinekugel, G.: ebendort (3) 14, S. 112. 1895. Ferner vgl. Schatte, J.: Kriegstechn. Z. 14, S. 450. 1911. Schmidt, J.: Mitt. üb. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes., S. 879. 1910. Behandlung durch projektivisch-geometrische Betrachtungen: Kulp, F.: Arch. d. Math. u. Phys. (23) 3, S. 244ff. 1914. Ricochet-schuß im leeren Raum: Nach Bordon: Memorie della Società italiana, Bd. 17, I, S. 191. 1816. Vgl. auch: de Jonquières, E.: Compt. Rend. t. 97, S. 1278. Lombard: Théorie du tir à ricochet. Brüssel 1841; dort zahlreiche Zahlenangaben; ebenso bei Persy: Cours de balistique, S. 61. Metz 1827/31/33. Radowitz: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off., S. 41. 1835; weiteres ebenda 5, S. 248. 1837; 17, S. 181. 1845; 24, S. 185. 1849; 28, S. 153 u. 208. 1850.

**Zu § 8 bis 16, Luftwiderstand:** Luftwiderstand überhaupt: d' Alembert: Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris 1744; Poncelet, J. V.: Introduction à la mécanique industrielle, S. 522ff. Bruxelles 1839. Didion, J.: Lois de la résistance de l'air. Paris 1857. Vallier, E.: Rev. d'art. 26, S. 226ff. und 324ff. 1885. Indra, A.: Mitt. üb. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. S. 1ff. 1886. v. Wuich: S. 49 u. 101ff. Page, C. F.: De la résistance de l'air, Paris 1878 und Rev. d'art. 11, S. 254, 345, 457, 561. 1878; 13, S. 531. 1879; 14, S. 38. 1879; 15, S. 128. 1879. Ferner Thibault, L. A.: Recherches expérimentales sur la résistance de l'air, S. 11, 62, 128. Paris 1826. Silvestre, F.: Rev. d'art. 18, S. 236. 1881. Prehn, M.: Über die bequemste Form des Luftwiderstandsgesetzes. Berlin 1874; Mayevski, N.: St. Petersb. Bull. de l'Acad. (class. de phys. et math.) 17, S. 337. 1858 (für sphärische Geschosse), und ebenda 27, S. 1. 1881. Pfister: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 88, S. 489. 1881. Journée: Rev. d'art. 49, S. 293. 1897. Hélie: 2, S. 150. Sabudski: 1, S. 55 und Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 102, S. 18. 1895. Sabudski, N.: Petersb. Art. Journ., Nr. 4, S. 299. 1894; Chapel, F.: Paris Comptes Rendus 119, S. 977. 1894. Chapel, F.: Rev. d'art. 45, S. 119 u. 453. 1895. Denecke: Kriegstechn. Zeitschr. 2, S. 482. 1899. Mach, L.: Z. f. Luftschiffahrt, S. 129. 1896 (Strömungslin. d. Luft). Prandtl, L.: Handwörterbuch der Naturwissenschaften 4, S. 558. 1913 („Gasbewegung“), und ebenda S. 129 (Widerstand von Körpern in Flüssigkeiten). Riabouchinski, D.: Mém. de l'art. franç. Bd. II, Heft 3, S. 689. 1923 (Arbeiten aus dem russ. aerodynam. Institut zu Koutchino u. theoret. Berechn. über den Luftwid. bei großen Geschw.). — Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstands vgl. bes. auch: Th. von Kármán u. Rubach, Physikal. Zeitschr. 13 (1912), S. 49.

Über die Abhängigkeit vom Kaliber 2 R: vgl. Didion: S. 53. Ferner Wolf Barry, J.: Engineering (2) 66, S. 408. 1898 u. Finsterwalder: Enzyklop. d. math. Wiss. IV, 17, S. 161; sowie Zeppelin, F. v.: Z. f. Luftschiff. 15, S. 172. 1896.

Über die Änderung der Luftwiderstandsfunktion in der Nähe der Schallgeschwind.: Mayevski, N.: Petersb. Bull. de l'Acad. 27, S. 1. 1881. Indra, A.: Mitt. üb. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes., S. 1—80. 1886. Emden, R.: Habilit.-Schrift., Techn. Hochsch., S. 94. München 1899, u. Ann. Phys. Chem. (2) 69, S. 454. 1899. Thiel, E.: Arch. f. Art. u. Ing.-Off. 94, S. 492. 1887.

Luftwellen: Mach, E.: Wien. Ber. 77, S. 7. 1878; 73, S. 819. 1878; 95, S. 765. 1887; 97, S. 1045. 1888; 98, S. 41. 1889; 98, S. 1257. 1889; 101 S. 977. 1892. Luftdichtenbestimmung: 93, S. 1318. 1839. Über die Stromlinien an Körpern, die durch Wasser bewegt werden, Sichtbarmachung dieser Linien (durch Bärappmehl bzw. präparierte Sägespäne) u. photogr. Fixierung, vgl. die Jahrgänge 1904, 1905, 1909 des Jahrb. d. Schiffbaut. Ges. sowie Ahlborn, E.: Phys. Z. 11, Nr. 5, S. 201. 1910. Derselbe, Z. d. deutsch. Luftfahrtsgesellsch. Jahrg. 16, Ausgabe B, Nr. 5, S. 98. 1912 (Widerstand von Luftschiffen und Tragflächen).

Betr. weiterer Literatur über den Luftwiderstand (L. H. F. Melsens, H. Nimier, P. Henrard, F. A. Journeé, P. Vieille, B. Hugoniot, E. L. M. Gibert, J. Hadamard, W. C. Hojel, P. Touche) vgl. auch Vallier, E.: Enc. (französ. Ausgabe der Enc. d. math. Wiss.).

Über theoretische Ableitungen: Newton, J.: Philosophiae natur. principia, lib. 2, sect. 7; § 40; 1726 (Schmidt, J. C. E.: Theorie des Widerstandes der Luft bei der Bewegung der Körper. Göttingen 1831. Dazu Otto, J. C. F.: Z. Math. Phys. 11, S. 515. 1866, u. Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes., S. 481, 1879). Schmidt, A.: Programm des Stuttgarter Realgymnasiums 1878. Vallier, E.: Rev. d'Art. 26, S. 226, 324. 1885. Résal: 2, S. 1874. Mata, O.: (span.) Rev. de l'arm. belge 19, S. 85. 1895. Bassani, A.: La corrip. 1, S. 299. 1900. Vieille, P.: Compt. Rend. 130, S. 235. 1900. Okinghaus, E.: Wien. Ber. 109, S. 1159 u. 1291. 1900 u. Monatsh. f. Math. u. Phys. 15, S. 150. 1904. Vgl. auch die allgemeinen Bemerkungen von H. v. Helmholtz: Über den Charakter der von der Geschwindigkeit abhängigen Kräftefunktionen, Vorl. üb. theoret. Phys., Bd. I, S. 31—32. Leipzig 1898. Jouquet, E.: Compt. Rend. 132, S. 677. 1901; 145, S. 500. 1907. Haupt, P.: Art. Monatsh. I, S. 249 u. II, S. 241. 1912; I, S. 321 u. 401. 1911; II, Nr. 62, S. 91; Nr. 62, S. 91. 1912. Kobbe, V.: ebenda II, Nr. 55, S. 22. 1911; Nr. 65, S. 383; Nr. 58, S. 283 u. 1912, Nr. 65, S. 382. Engelhardt: ebenda, Nr. 52, S. 245. 1911 u. Nr. 65, S. 383. 1912. Cranz, C.: ebenda II, Nr. 56, S. 85, 1911 (über die Widerstandsgesetze usw., Erwidern auf P. Haupt.). Lorenz, H.: Ballistik, die mechanischen Grundlagen der Lehre vom Schuß, Z. V. d. I., S. 625. 1916. Lorenz, H.: Beitrag z. Theor. d. Schiffswiderstands, ebenda S. 1824. 1907. Vieille, P.: Mémor. des poudr. et salp. 10, S. 177. 1899/1900 und 10 S. 255, 1900. Hadamard, J.: Leçons sur la propagation des ondes, S. 206. Paris 1903; dazu Zemplén, G.: Enzyklop. d. mathem. Wissensch. IV, 19, Nr. 12, S. 315. Betreff Lancaster, W.: Aerodynamics, London 1907, vgl. Kriloff, A. u. Müller, C. H.: Enzyklop. der mathem. Wissensch. IV, 22 (Theorie des Schiffs), S. 572. Jäger, M.: Graphische Integrationen in der Hydrodynamik, Dissertation. Göttingen 1909. Ricci, G.: Riv. d'art. e gen. 33, vol. I, S. 366. 1913; dasselbe bei M. de Masson d'Autume: Mém. de l'art. nav. (3) 7, Nr. 22, 2. Teil, S. 3. 1913, („apriorische Bestimmung des ballistischen Koeffizienten“). Das Luftwiderstandsgesetz von

A. Sommerfeld in dem bekannten Werk über den Kreisel: Klein, E. und Sommerfeld, A.: Theorie des Kreisels, Leipzig, Teubner 1910, Teil IV, Abschnitt C (Ballistik), Nr. 7. Dieses Gesetz nach Art. von Siacci angewendet von P. Riebesell-Hamburg, Arch. f. Math. u. Phys. 25, Heft 2, S. 103. 1916. Über sonstige Theorien bezüglich des Luftwiderstands vgl. das Referat über Ballistik in der „Encyclop. des scienc. math.“, herausgeg. von J. Molk: Paris. Gauthier-Villars, Bd. 4, Nr. 21 (Balistique extérieure, von E. Vallier-C. Cranz). Ferner vgl. Darrieus, C.: Mém. de l'art. franç. Bd. I, H. 2, S. 241. 1922; dazu die Aufsätze von Langevin, P.: ebenda S. 253 und von Jouquet, E.: S. 267 und Garnier, M.: S. 271. Darrieus findet durch Betrachtungen gemäß der kinet. Gastheorie den Luftwiderstand prop.  $\delta \cdot v^3 \cdot \psi \left( \frac{v}{s} \right)$ , wo  $s$

die von der Temp. abhängige Schallgeschw. ist; die Funktion  $\psi$  hängt nur von der Form des Geschosses ab; (ein ähnliches Resultat hat schon früher L. Prandtl erhalten, vgl. darüber Becker, K. u. Cranz, C.: Art. Monatsh. 1912, Nr. 69 u. Nr. 71. Schluß). Prandtl, L.: Enzykl. d. math. Wiss. Bd. 5 (Physik) Artikel 5b: Derselbe: Physik. Z. 8, S. 23. 1907 und Handwörterbuch d. Naturwiss. Bd. 4 1913, Artikel „Gasbewegung“, S. 559. Falkenhagen, H.: Art. Monatsh. 1924, Nr. 205/206 (zum Gesetz von H. Lorenz). — Ableitung aus Dimensionsberechnungen: Vahlen, Th.: Ballistik, S. 11 u. f. Berlin u. Leipzig 1922; u. E. Gehrke Z. f. techn. Phys. IV, 1923, S. 292 u. Astr. Nachr. Bd. 2190 (1923) S. 266. Kritische Bemerkungen bei J. Wallot, Z. f. Phys. Bd. 10, Heft 5, 1922, S. 338; ferner Lamothe, A.: Mém. de l'Art. franç., Bd. 2, H. 2, S. 347. 1923; erhält  $W = \text{konst.} \cdot R^3 \cdot \pi \cdot \delta \cdot v^3 \cdot \psi \left( \frac{v}{s}, \frac{v}{s} \cdot \frac{2R}{l} \right)$ , wo  $l$  die freie Weglänge des Moleküls ist. Dabei werden die Entwicklungen, die Darrieus gegeben hatte, kritisiert und für viskose Medien vervollständigt.

Zu § 10 und 11. Empir. Luftwid.-Gesetze: Indra, A.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. S. 1—80. 1886. Ökinghaus, E.: Wien. Ber. 108, S. 1559. 1899 u. 109, S. 1275. 1900. Denecke, Kriegstechn. Z. 2, S. 426. u. 474. 1899, bes. S. 482 (neue Zonengesetze bis  $v = 500$  m auf Grund deutscher Versuche). Chapel, C.: Compt. Rend. 120, S. 677. 1895 u. 119, S. 997. 1894. Groß, W.: Schweiz. Z. f. Art. u. Gen. 39, S. 409. 1903. v. Scheve, W.: Kriegstechn. Z. 10, S. 14. 1907 (Gesetz von Chapel-Vallier). Über die Zonengesetze von Mayevski-Sabudski: Mayevski: S. 41. 1872. Sabudski: Petersb. Art. Journ. 1894, Nr. 4, S. 299 u. Klussmann: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 102, S. 18. 1895. Über das neue einheitl. Gesetz von Siacci: Riv. d'art. e gen., vol. 1, S. 5, 195. 341 1896; u. Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 103, S. 5, 195. 1896 u. u. bes. 341. Becker, K. u. Cranz, C.: Art. Monatsh. 1912, Nr. 69, S. 189 u. 1912, Nr. 71, S. 833 (neue Luftwiderstandsmessungen mit Gewehrgeschossen). v. Eberhard, O.: ebenda 1912, Nr. 69, S. 196 (dasselbe für Artilleriegeschosse. [Vgl. auch Hardcastle, J. H.: Arms and explosives 1913, Nr. 249, vol. 21, S. 86, Übersetzung der Arbeit von K. Becker u. G. Cranz].

Über Geschosse mit Malandrin-Platten: Z. Schuß u. Waffe 7, S. 241. 1914.

Für kleine Geschwind. Widerstand proport.  $v$ : Thiesen, M.: Ann. Phys. Chem. (2) 26, S. 314. 1885. v. Lössl: Luftwiderstandsgesetze. Wien 1896.

Patent der rauchgebenden Geschosse von Semple (Ver. St. Amer.), D. R. P. 190051, Kl. 1, 72d (26. Aug. 1905). Dazu vgl. Rohne, H.: Art. Monatsh. 1908, S. 347 (Kruppsche Rauchbahnen) u. Dtsch. Waffenz. 1908, S. 17. Olker: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoff-Wes. 11, S. 145, 167, 185. 1916 (Rauchbahnen).

Über Leuchtgeschosse: Deutsch. Reichspatente Kl. 72 d. Gruppe 19, Nr. 242 554, 265 383, 268 324, 271 095, 272 070, 272 115. Bei Verwendung von Rauchgeschossen oder von Leuchtgeschossen zu Luftwiderstandsversuchen müßte

übrigens vor allem geprüft werden, ob durch die betreffende Einrichtung die Flugbahnverhältnisse abgeändert werden oder nicht.

Über die Messung des Luftwiderstands s. besonders Didion, J.: *Lois de la résistance de l'air*. Paris 1857, und Page, C. E.: *De la résistance de l'air*. Paris 1878. — Über die Aufstellung von Luftwiderstandsgesetzen auf Grund von Beobachtungen, u. a. mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, s. Siacci, Not. I, p. 313. Sabudski: *Petersb. Art. Journ.* 1894, Nr. 4, S. 299; 1892, Nr. 6, S. 601 u. Klussmann: *Arch. f. Art- u. Ing.-Off.* 97, S. 546. 1890. Siacci: *Riv. d'art. e gen.*, vol. 3, S. 227. 1889 u. vol. 1, S. 199. 1891, sowie *Arch. f. Art- u. Ing.-Off.* 99, S. 172. 1892. Schatte, J.: *Kriegstechn. Z.* 16, S. 1, 57, 111. 1913. Hamilton, A.: *Journ. of the Unit. Stat. Art.* 24, S. 31, 99, 1905 u. 30, S. 363, 1908.

Finsterwalder, S.: Referat über Aerodynamik, *Enzykl. d. math. Wiss.*, Bd. IV, 17, 4, S. 163. 1903.

Close, C. F.: *Proc. Roy. Art. Inst.*, Januarheft 1905. Greenhill, G.: *Journ. of the Roy. Art.* 1906, Febr. u. 1909, Febr., S. 473. Wolff, C. E.: ebenda, Aprilheft 1908. Vgl. auch § 19 u. 42.

**Zu § 12 und 13.** Komponenten des Luftwiderstands bei Schiefstellung des Geschosses u. Lage des Angriffspunkts, sowie Berechnung von Formwerten: Mayevski: S. 40. Mayevski-Klussmann: S. 58. Robert, St.: I, S. 251—276. Rutzki: S. 68 ff. Siacci: S. 378, Note 5 (Begriff des Widerstandspotentials eingeführt). Sparre, M. de: *Sur le mouvement des projectiles dans l'air*, S. 64. Paris 1891. v. Wuich: S. 70—101, besonders S. 92 mit Tabelle. — Dazu Cranz: *Z. Math. Phys.* 43, S. 133 u. 169. 1898. — Kummer, E.: *Berl. Abh. S.* 1. 1875, mit Nachtrag (Experimente) S. 1. 1876. Gauthier: *Ann. éc. norm.* 5, S. 7—65. 1868. Wellner, G.: *Z. f. Luftschiff.* 12, S. 237. 1897 u. *Z. öst. Ing.-V.* 45, S. 25—28. 1893. Résal, H.: *Nouv. ann.* (2) 12, S. 561—565. 1873. Ingalls, J. M.: *Journ. of Un. Stat. art.* 4, S. 191. 1895. v. Obermayer, A.: *Wien. Ber.* 104, S. 963. 1895. Duchemin: *Mém. de l'art marine* 5, S. 65. 1842. Touche, P.: *Rev. d'art.* 36, S. 131. 1890. Ferner Vallier, E.: S. 10 u. *Rev. d'art.* 36, S. 160. 1890. Ingalls: *Journ. of Un. Stat. art.* 4, S. 208. 1895 u. *Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes.* 1896. S. 411. Siacci: S. 7. Sabudski: I, S. 57—90; erschossene Formwerte bei Heydenreich, W.: *Lehr. v. Schuß*, II, S. 116. Berlin 1908. Hamilton, A.: *Journ. of the Un. Stat. Art.* 1908, Heft 3 u. *Art. Monatsb.* 1909, Nr. 26, S. 133 (deutsch von Nonn). Hélie: *Traité de bal. expér.* II, S. 150. Paris 1884. Frank, A.: *Z. V. d. I.* Bd. 1906. Ferner vgl. betr. der Formkoeffizienten i: Sjöhwist, A.: *Kust-Art. Tidsskrift* 1916, Heft 3.

Aerodynamische Messungen von  $M$  u.  $W$ , in Frankreich: Andreau: *Mém. de l'art. franç.* Bd. 1, H. 3, S. 485. 1922 (Luftstrom gegen das ruhende aufgehängte Geschöß). — Dasselbe in England mit anderem Verfahren, nämlich mit Schießen im Laboratorium u. Beobachten der Scheibendurchschläge: Fowler, R. H., Gallop, E. G., Lock, C. N. H. u. Richmond, H. W.: *Mém. de l'art. franç.* Bd. I, H. 2, S. 379. 1922 u. H. 3, S. 727; *aérodynamique d'un projectile tournant*. — Aerodynam. Messungen in Italien (Polytechnikum zu Turin): Burzio: *Riv. di art. e gen.* 37, vol. 3, S. 155. 1920.

Über die Modell-Regeln vgl. v. Helmholtz, H.: *Wissensch. Abhandl.* I, S. 158 ff. Leipzig 1882. Lorenz, H.: *Z. V. d. I.* 1907, S. 1824. Niesiolowski-Gawin, V. v.: *Ausgew. Kap. d. Techn.* S. 326 u. folg. Wien 1908.

**Zu § 14.** Günstigste Spitzenform: Vgl. außer Newton insbesondere Legendre, A. M.: *Mém. de l'Acad.* S. 7—37. Paris 1788; sodann von neuerer Literatur: v. Lamezan, G.: *Arch. f. Art- u. Ing.-Off.* 87, S. 485. 1880.

Rutski: S. 30—51. August, F.: Journ. f. Math. 103, S. 1—24. 1888 u. Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 94, S. 1. 1887. v. Wuich: 1, S. 128. Benzivenga, R.: Riv. d'art. e gen., vol. 3, S. 123. 1897. v. Lefèvre, B.: Rev. d'art. 57, S. 221. 1900. Bassani, A.: La corrisp. 1, S. 435. 1900. Decepts: L., Rev. d'art. 57, S. 425. 1901, s. auch La corrisp. 2, S. 63. 1901. Armanini, E.: Ann. di mat. (3) 4, S. 131—149. 1900. Lampe, E.: Verh. d. deutsch. phys. Ges. 3, S. 119 u. 151. Berlin 1901. Kneser: Arch. f. Math. u. Phys. (3) 2, S. 267. 1902. Lefèvre: Rev. d'art. 57, S. 221. 1900. Lacroix: Traité du calcul diff. et intégr., 2. Aufl., Teil II, S. 791. Paris 1814. v. Kobbe, S.: Art. Monatsh. 1911, II, Nr. 58, S. 283. de Masson d'Autume, M.: Mém. de l'art. nav., Ser. 3, t. 7, Nr. 22, S. 481. 1913. Vgl. im übrigen auch Finsterwalder: Enc. d. math. Wiss. IV, 17, Fußnote 90. Valiron, M.: Mém. de l'art. franç. Bd. 1, H. 2, S. 283. 1922.

Über Geschosse mit Verjüngung am hinteren Ende u. Geschosse von Torpedoform (von d'Alambert, Piobert, Dreyse, Withworth, D-Geschoß, Z-Geschoß usw.) vgl. Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 5, Nr. 9, S. 161—163. 1910 u. ferner Selzer: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 10, S. 125, 142. 1915. Über Spitzgeschosse, einschließl. Torpedogeschosse: Ayrolles: Rev. d'art. 38, t. 75, S. 214 u. 274. 1910; 38, t. 76, S. 98, 148, 275. 1910; 39, t. 77, S. 356. 1910/11 (nach spanischen Schießversuchen). Ferner vgl. Justrow, Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 1920, H. 7/8; Justrow, Geschosskonstruktion, I. o.

Zu § 15. Luftgewicht  $\delta$ : Vgl. Robert, St.: Mém. scient., Bd. I, (Ballistik), Paris 1872. Charbonnier, P.: Bal. extér. rat., S. 12. Paris 1907. Everling, E.: Art. Monatsh. Nr. 135, S. 72. 1918 und Mödebecks Taschenbuch f. Flugtechniker u. Luftschiffer, 4. Aufl., Kap. 10, S. 472. 1923 sowie Z. f. Flugtechn. Bd. 14, H. 17/22, S. 163. 1923; ferner Taschenbuch der Hütte, Bd. I, S. 407. Linke, F.: Beiträge z. Physik der freien Atm. Bd. 8, H. 3/4, S. 194 u. Aeronaut. Meteorol., Frankfurt 1911. Beobachtungen der meteorol. Station im Kgr. Bayern, München 1907. Darüber s. Beiblatt. zu d. Ann. Phys. 32, S. 558. 1908: für die untersten 3000 m Abnahme der Temp. um 0,57° C. pro 100 m; dagegen von 6 bis 8 km um 0,71°, sodann zwischen 9 und 13 km Temp. konstant zwischen —48° u. —60°. Vgl. auch Bd. III u. Lit.-Note dazu (Schubert), ferner Charbonnier, P.: Traité de balistique extérieure, S. 329. Paris 1904. Fischli, Fr.: Aeronaut. Meteorol., Berlin 1913. Die Formel (II) nach Siacci, F.: Bal. ext. S. 14. Paris 1892. v. Eberhard, O.: Einiges über d. Ballistik großer Schußweiten, Berlin 1924. Rye, C. H. u. Raabye, C.: Luftdichte u. große Schußweiten. Dansk. Art. Tidsskrift, Maiheft 1918 u. Art. Monatsh. 1918. Nr. 144, S. 161. A. v. Brunn. Schriften der naturforsch. Ges. z. Danzig, neue Folge, Bd. 15, H. 1; 1919. Eine wertvolle Tabelle für  $\delta$ , bei O. Wiener, Leipz. Akad. Ber., Bd. 36, Nr. 1, 1919.

Zu § 17 bis 20. Die Gleichungen des spez. Hauptproblems. Allg. Flugbahneigenschaften. Über Schußweiten, die größer sein sollen, als im leeren Raum: vgl. v. Minarelli: S. 37 (Mitt. von Indra), auch Darapsky: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 69, S. 256. 1871. Hierher gehören auch die von Robert, St.: 2, S. 1 u. 49 vorgeschlagenen diskusartigen Geschosse, vgl. auch Siacci: Anhang von F. Chapel.

Über den Begriff der Querschnittbelastung: Galileo Galilei: Dialoghi delle nuove scienze, Leiden 1638 u. Ostwalds „Klassiker der exakten Wissenschaften“; Galilei: Unterredungen . . ., herausgeg. von A. J. v. Ottingen: Bd. 11, 24, 25.

Über die allgemeinen Differentialgleichungen des Problems vgl. Robert, St.: 1, S. 50 u. 336. Ferner Cavalli, E.: Riv. d'art. e gen. 1921, vol. IV u. 1922, vol. II, S. 70; derselbe Aufsatz im Mém. de l'art. franç., Bd. II, 1923, le problème balistique de l'avenir (Hauptgleichung mit Berücksichtigung der Luftgewichtsänderung mit der Höhe).

Über die Integrierbarkeit der Hauptgleichung: Vgl. d'Alembert, J. L.: Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, S. 359. Paris 1744. Siacci: Compt. Rend. 132, S. 1175. 1901 und 133, S. 381. 1901, sowie auch Riv. d'art. e gen., vol. 3, S. 5 u. vol. 4, S. 5. 1901. Ferner Appell, P.: Arch. d. Math. u. Phys. (3) Bd. 5, S. 177. 1903. Ouivet, E.: Compt. Rend. Bd. 150, S. 1229. 1910. Hayashi, T.: Giorn. d. Matematiche di Battaglini (3), Bd. 49, S. 231. 1911. Josselin de Jong, G. de (an d. holländ. Milit.-Akad. in Buda), Militaire Spectator 1924 (verwendet das lineare Gesetz  $c \cdot v$ ).

Über die Hodographen-Kurve vgl. Charbonnier, P.: Traite de bal. ext. 2. Aufl., S. 221. Paris 1904 u. Filloux, L.: Rev. d'Art. 72, S. 345. 1908.

Zu § 18 u. 19. Zurückführung auf Quadraturen durch Bernoulli, J. Act. erud. S. 216, Lips. 1719 oder Ges. Werke t. II, S. 394 für  $cv^2$ ; durch Legendre, A. M.: dissertation sur la question de balistique, proposée par l'Académie Roy. des sciences et belles lettres de Prusse, Berlin 1782, teilweise abgedruckt im Journ. écol. polyt. 4, cah. 11, S. 204. 1802 (Abhandl. v. Moreau) u. Journ. des armes spéciales 1845, S. 537 u. 600 u. 1846, S. 32, für  $a + cv^2$ ; durch Jacobi, C. G. J.: J. f. Math. 24, S. 25. 1842 oder Ges. Werke 4, S. 286, für  $a + cv^2$ . Weiterverfolgung mit elliptischen Integralen für  $a = 0$  u.  $n = 3$  bzw.  $n = 4$  durch Greenhill, A. G.: Woolwich, Roy. Art. Inst. Proceed. 11, S. 131 u. 589. 1881; 12, S. 17. 1882; 17, S. 181. 1890, bzw. durch Sabudski, N.: Über die Lösung des Problems des indirekten Schießens usw. (russ.). St. Petersburg 1888 u. Sabudski 1, S. 550; vgl. auch Austerlitz, L.: Wien. Ber. 84, S. 794. 1882 (mit  $cv^2$ ). Über Tabellen dazu von Mac Mahon, P. A.: vgl. obige Arbeit von Greenhill. Ferner vgl. Vahlen, Th.: Arch. d. Math. u. Phys. 25, H. 3, S. 209. 1916. Ferner vgl. Zlamal, H.: Ber. d. Wien. Akad., math.-phys. Kl., IIa, Bd. 126, H. 5. 1917.

Über ähnliche Flugbahnen vgl. Robert, St.: Mém. scient. I, S. 313. Paris 1872 u. Siacci, F.: Bal. extér. S. 97. Paris 1892. Röggle, E.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1908, S. 224.

Zu § 20. Die Sätze § 20, 1 bis 8 und 11 hat zuerst St. Robert aufgestellt; die Sätze 9 u. 10 wurden von Sabudski hinzugefügt, die Formel betreffs des Punktes größter Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\phi}{dt}$  (Satz 8) vom Verfasser; darüber auch: Robert, St.: 1, S. 50 u. 336, Tor. Mem. (2) 16, S. 434, 498. 1855. Mayevski: S. 52 u. 71. Siacci: 1, S. 25, über ähnliche Flugbahnen S. 97. Sabudski: 1, S. 118 u. Lacorresp. 1, S. 293. 1900 u. 2, S. 3. 1901; dazu Siacci: Riv. d'art. e gen. 1901, vol. 1, S. 287 u. vol. 2, S. 21. Ferner de Brettes, M.: Paris Compt. Rend. 67, S. 896. 1868; 68, S. 1336. 1869; 69, S. 394 und 1239. 1870. Vgl. auch Vahlen, Th., l. c. S. 45. Über den Beweis des Satzes 3 vgl. Hjalmar Anér (Hptm. im Schwed. Inf.-Rgt. 27, Hörer an d. militär-techn. Ak.) Art. Monatsh. 1916, Nr. 118, S. 147. Das Beispiel zu Satz 6 berechnet von Oblt. George.

Über den Abgangswinkel größter Schußweite liegen fast nur theoretische Untersuchungen vor: Astier, F.: Rev. d'art. 9, S. 313. 1877 (er gelangt zu dem Resultat, daß je nach dem zugrunde gelegten Luftwiderstandsgesetz dieser Winkel  $>$  oder  $< 45^\circ$  sein kann); ferner besonders Siacci: S. 42 u. 393 u. Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1888, S. 49. Vallier, E.:

Rev. d'Art. 31, S. 362. 1883. Guébbard, Nouv. Ann. (2) 13, S. 436—438. 1874. Radau, R.: Compt. Rend. 66, S. 1032—1034. Paris 1863. de Brettes, M.: Compt. Rend. 66, S. 396. Paris 1868; 68, S. 1336—1338. 1869; 69, S. 394—397 u. 1239—1242. 1870. Sabudski, N.: Über die Lösung des Problems des indirekten Schießens u. d. Winkel größter Schußweite (russ.) S. 83 ff. St. Petersburg 1888 s. auch Klussmann: Arch. f. Art. u. Ing.-Off. 96, S. 376. 1889. Vallier, E.: gibt folgende Regel: Für ein Geschöß mit großer Querschnittsbelastung (Kaliber etwa  $> 24$  cm) ist möglicherweise jener Winkel größer als  $45^\circ$ ; aber für jedes Geschöß mit relativ großer Verzögerung durch den Luftwiderstand ist derselbe  $< 45^\circ$ , und zwar um so mehr, je mehr der Luftwiderstand in Betracht kommt. Ausreichende Versuche, durch welche die Berechnungen genügend kontrolliert werden können, liegen nicht vor; vgl. übrigens § 40 (O. v. Eberhard). Die in Leitfäden über das Schießwesen häufig anzutreffenden Zahlen über die größtmögliche Schußweite von Infanteriegeschossen sind mit Vorsicht zu nehmen, da sie in den seltensten Fällen auf genauer Messung beruhen.

Über die allgem. Flugbahneigenschaften bei variabler Luftdichte  $\delta(y)$  vgl. Charbonnier, P.: Mém. de l'art. franç. Bd. II, S. 421. 1923, les théorèmes généraux de la bal. généralisée.

Zu § 21 und 22. Euler, L.: Berl. Ber. 1753, S. 348; ferner Poisson, S. D.: Traité de mécanique, 2. vol., 2. éd. Paris 1833. Tabelle für  $P(p)$  von Euler u. von Didion, vgl. Didion, Anhang, S. 8. Über den Zusatz von Legendre vgl. obige Arbeiten von Legendre u. Didion, S. 159.

Bezüglich der Ottoschen Tabelle, ihrer Vorläufer u. späteren Modifikationen usw., vgl. Otto, J. C. F.: Tafeln für den Bombenwurf, Gebrauchsanweisung, S. 40. Berlin 1842. Vallier: (Tabellen) S. 111; andere Anordnung der Ottoschen Tabellen durch Siacci: Riv. d'art. e gen. 1885, vol. I, u. Rev. d'Art. 1885, tom. 26, S. 431; Braccialini: Rev. d'Art. 27, S. 237. 1885 (hier ist auch der Fall berücksichtigt, daß das Ziel nicht in Mündungshöhe liegt); ferner Tabellen in bequemer Form s. bei Ingalls: Exterior ballistics in the plane of fire, New York 1886, und Journ. of Un. Stat. Art. 5<sup>a</sup> S. 52—74. 1896. Ottos Tafeln verlängert von v. Scheve: Arch. f. Art. u. Ing.-Off. 92, S. 529. 1893; 93, S. 97, 271. 1886; 103, S. 236. 1896; ferner Mola, F.: Riv. d'art. e gen. 1892, vol. 3, S. 253 und Arch. f. Art. u. Gen.-Off. 100, S. 1. 1893; vgl. auch die Diagramme dazu von E. Stübler im Anhang zu diesem Band I, Diagramme IVa bis VIb. Sabudski 1, S. 239 und 252 berücksichtigt noch die Abnahme der Luftdichte mit der Erhebung über dem Boden, Rev. d'art. 34, S. 427. 1889; 38, S. 46. 1891. Siehe auch Mayevski-Klussmann: S. 34. Bassani, A.: La corrisp. 1, S. 116. 1900 (es wird  $P(b)$  durch eine Näherungsfunktion zum Zweck der Integration ersetzt) und 1, S. 275. 1900. Basforth: S. 45f u. Mayevski-Klussmann: S. 28.

Zu § 23 bis 32. Borda, J. C.: Hist. de l'Acad., S. 247—271. Paris 1769, u. Journ. des armes spéciales, S. 49. 1846; vgl. auch Besout: Mouvement des projectiles, S. 188—197. Paris 1788. Legendre: Dissert. sur la question de balistique proposée par l'Acad. Roy. des sciences et belles lettres de Prusse, Berlin 1782; teilweise abgedruckt im Journ. éc. polyt. 4, cah. 11, S. 204 (Abhandl. von Moreau) 1802, u. Journ. des armes spéciales, S. 537 u. 600. 1845; S. 32. 1846. Didion: S. 159 (Kritik der Methode von Legendre) u. S. 168 bezügl. der nicht publizierten Arbeit von Français. Über das Verfahren von Didion vgl. Didion: S. 59 ff. Verallgemeinerung u. Einführung von  $\alpha$  u.  $\beta$  als unabhängiger Variablen durch Robert, St.: Mémoires scientifiques, t. I



S. 119 ff. Paris 1872: Bestimmung von  $\alpha$ : S. 124. Darüber und über das Verfahren von Hélié vgl. auch Siacci: Riv. d'art. e gen. 1897, vol. 4, S. 5. — v. Wuich: S. 215 u. Mitt. üb. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1894, S. 424, u. 1902 S. 651 u. 893 (zusammenfassende Darstellung des in Österreich benützten Verfahrens durch J. Kozák); dazu v. Portenschlag-Ledermayr, R.: ebenda, S. 563. 1903.

Verfahren „Siacci I“: vgl. Siacci, Giorn. d'art. e gen. 1880, S. 376, u. Rev. d'Art. 17, S. 45. 1880; auch Siacci: Ballistik u. Praxis (deutsche Übers. von Günther). Berlin 1882.

Verfahren „Siacci II“: vgl. Siacci: Balistique extérieure, S. 34 ff., Paris 1892 u. Rev. d'art. 27, S. 315. 1886. Diese Methode auch bei Heydenreich: Lehre vom Schuß, 1. Aufl., 2, S. 90. Berlin 1898; über  $\beta$  vgl. Siacci, S. 36 ff. u. Riv. d'art e gen. vol. 1, S. 341. 1896 u. vol. 4, S. 5. 1897.

Verfahren von E. Vallier; vgl. Vallier: S. 45; s. auch Sabudski: Rev. d'Art. 34, S. 427 mit (cv'). 1889; Überblick über die Entwicklung der Methoden: Vallier: Rev. d'Art. 29, S. 11. 1886/87; 36, S. 42 u. 153. 1890 u. 37, S. 273. 1890; auch Bal. extérieure, Teil der „Encycl. scientif. des Aide-Mémoire“; Paris, ohne Datum, u. Balist. expérimentale, Paris 1894 (allgemeinere Auffassung der Methode von Siacci II). Ferner Vallier, E.: Artill. Monatshefte 1912, Nr. 70, S. 253 (sur la position actuelle du problème balistique).

Verfahren von Charbonnier, P.: Traité de balistique extérieure, 2. Aufl., S. 221 ff. Paris 1904.

Weiter vgl. Takeda, S. (Tokyo): Artill. Monatsh. 1914, Nr. 89, S. 321. (Wahl von  $\sigma = \frac{1}{\alpha}$ , wo  $\alpha$  der Didionsche Faktor ist, und von  $\gamma = \frac{\delta}{\delta_y} \beta$ , wo  $\beta$  den Faktor von Siacci (III) bedeutet; also eine Verbindung des Didionschen u. des Siaccischen Verfahrens.) Schatte, J.: Kriegstechn. Z. 12, H. 9, S. 416 ff. 1909. (Wahl von  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\alpha}$ , wie bei Didion, dabei jedoch  $\alpha$  nicht der Mittelwert von  $\sec \theta$ , sondern secans des Mittelwerts von  $\theta$  an den beiden Enden des Bogens, und als Luftwiderstandsgesetz dasjenige von Chapel-Vallier.) Bianchi, G.: Riv. d'art. e gen. 27, vol. I, S. 175. 1910 (stückweise Berechnung der Flugbahnen, im Prinzip ähnlich wie Didion-Siacci).

Zu § 24. Didion, J.: Traité de balistique. Paris 1848 u. 1860. de Saint Robert, Paul: Mémoires scientifique, t. 1, balistique. Paris 1872. Mayevski, N.: Traité de bal. extér. Paris 1872.

Zu § 25 u. 26. Robert, St. u. Mayevski, N.: s. Lit.-Note § 24. Siacci: Balistique extérieure. Paris 1892 u. Ballistik u. Praxis. Berlin 1882. Bernoulli, J.: Acta erudit., S. 1453. Lipsiae 1719 = Bernoulli, J.: Opera 2, S. 393—402 u. S. 513. v. Wuich: S. 199.

Schußfaktoren: Siacci: S. 86 u. 455. Chapel: Rev. d'Art. 17, S. 437. 1881 u. 18, S. 484. 1881.

Verfahren von v. Zedlitz: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 103, S. 388. 1896 u. Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1898, S. 881. Ronca, G. u. Bassani, A.: Riv. mar. 1895, S. 569, dazu Siacci: Riv. d'art. e gen. vol. 2, S. 5. 1896. Ronca, G. u. Bassani, A.: Riv. mar. 1897, S. 217.

Frühere Methode von Krupp: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1891, S. 1. Groß, W.: Die Berechnung der Schußtafeln. Leipzig 1901. Olsson, W.: Ballistiske tabeller for beregning af skydetabeller. Kristiania 1904; darüber auch: Art. Monatsh. 1908, S. 112.



Zu § 27. Methode-Siacci II: vgl. Lit.-Note 23. Ferner Pouchelon, F.: Rev. d'Art. 26, S. 467 (Tabellen). 1885. Hojel, W. C.: Rev. d'Art. 24, S. 262. 1884. Vallier: S. 45A u. Comptes Rendus 115, S. 648. Paris 1892. — Methode Siacci III: Siacci, F.: Riv. d'art. e gen. vol. 1, S. 341. 1896; über  $\beta$  vgl. Riv. d'art. e gen. vol. 4, S. 5. 1897 u. Rev. d'Art. 35, S. 493. 1890; dazu Fasella, E.: Tavole balistiche secondarie. Genova 1901. Parodi: Balistica esterna, S. 105 u. folg., S. 314ff. Turin 1901 ferner E. Cavalli, Riv. di Artigl. e Genio. Jahrg. 63, vol. 4 Dez. 1924, S. 341, (zweiter Term in der Reihe für  $\beta$ ).

Zu § 28.  $\beta$  von Vallier: vgl. Vallier: S. 45 und Rev. d'Art. 29. S. 11. 1888. Analog für  $\nu$ : Sabudski: Rev. d'Art. 34, S. 427. 1889. Ferner: Vallier: Rev. d'Art. 36, S. 42, 153. 1890 u. 37, S. 273. 1890.

Zu § 29. Charbonnier, P.: Traité de bal. extér., 2. Aufl., S. 221ff. Paris 1904, u. Manuel de balistique extér. Paris 1908.

Zu § 30. Über die primären Tabellen zur Methode Siacci III vgl. Siacci, F.: Riv. d'art. e gen. vol. 1, S. 341. 1896, dazu  $\beta$  vgl. Riv. d'art. e gen. vol. 4, S. 5. 1897 u. Rev. d'Art. 25, S. 493. 1890; die sekundären Tabellen berechnet von Fasella, E.: Tavole balistiche secondarie. Genova 1901. Über die Tabellen der Schußfaktoren von Siacci u. Chapel vgl. Siacci, F.: bal. extér., S. 454 u. 455. Paris 1892.

Zu § 31. Betr. der ballist. Abaken vgl. Cranz: Lehrb. d. Ballistik, Bd. I, Ausg. von 1910, S. 245 u. Bd. IV (Atlas). Ferner Desprez, M.: Abaques de bal. extér., Mém. de l'Art. franç., Bd. I, H. 1, S. 225, 1922.

Zu § 32. Über Reihenentwicklungen: vgl. Didion: S. 162. Ligowski: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 81, S. 79, 163, 178. 1877, u. 83, S. 203. 1878. Ferner Neumann: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 6, S. 213. 1838; 14, S. 49. 1842; 29, S. 93. 1851. Lambert, J. H.: Berl. Abh. 1767, S. 102—188. Borda, J. C.: Paris, Hist. de l'Acad. 1769, S. 247—271. v. Tempelhof, G. F.: Berl. Abh. 1788/89, S. 216—299. Auch besonders als: Der preussische Bombardier. Berlin 1791. Français' Arbeit von J. Didion veröffentlicht, vgl. Didion: S. 168. Heim: S. 205. v. Pfister: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 88, S. 489. 1881. Robert, St.: 1, S. 125 (hier allgemeinste Behandlung). Denecke: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 90, S. 231 u. 405. 1883 (auch einige Konvergenzuntersuchungen). v. Zedlitz: ebenda 103, S. 388 (Benützung zu Fehlerabschätzungen). 1896.

Über die Annahme einer bestimmten Kurvenform, wobei die Koeffizienten empirisch bestimmt werden vgl. besonders: Prehn, M.: Ballistik der gezogenen Geschütze. Berlin 1864, u. Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 74, S. 189. 1873. Mieg, A.: Theoretische äußere Ballistik. Berlin 1884. Dolliak, O.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1879, S. 3 der Notizen. Hélie: 2, S. 267; ebenda, S. 262 u. S. 219. 1876. Ökinghaus, E.: Die Hyperbel als ballistische Kurve, Arch. f. Art. u. Ing.-Off. 100, S. 241. 1893 mit Fortsetzung in den Jahrgängen 1894 u. 1895 bis 1896, S. 185. Chapel, F.: Comptes Rendus 120, p. 677. Paris 1895. Stauber, J.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1897, S. 118 u. 1909, S. 575 (modifizierte Hyperbelgleichung). Fernandez, R. G.: Jahrbücher f. d. deutsche Armee u. Marine I, S. 206. 1907. In allgemeinsten Weise dieses Prinzip durchgeführt von Affolter, F.: Allgem. Schweiz. Militärzeit. Art. Monatsh. 1915, II, Nr. 103/104, S. 1. Veithen, C.: Art. Monatsh. 1917; ferner vgl. Th. Vahlen I. c. S. 57.

Ferner vgl. Risser, R.: Mém. de l'art. franç., Bd. I, H. 3, S. 565. 1922 (schlägt eine ganze rat. algebr. Funktion vom 5. Grad vor; dort auch die

Formeln von Piton-Bressant, Duchêne u. Sugot). Bataillier, H.: Les coniques comme courbes balistiques, Rev. d'Art 35, vol. 70, H. 4. 1907. — Über äußerballist. Reihenentwicklungen vgl. auch Petitcol: Rev. d'Art. 35, Bd. 70, S. 137. 1907. (Die Konvergenz wird nicht ausreichend untersucht.)

Zu § 33 bis 40; stückweise Berechnung oder Konstruktion einer Flugbahn. Graphische Methoden: Poncelet, J. V.: Leçons de mécanique industrielle 2, S. 55. Metz 1828/29; s. auch Didion: S. 196. Indra, A.: Graphische Ballistik. Wien 1876. Cranz, C.: Z. Math. Phys. 42, Zusammenfassung S. 197 (hier nicht wiedergegeben). 1897. Über Verwendung M. d'Ocagnescher Methoden zur Funktionsdarstellung s. Pesci, G.: Riv. mar. 1899, S. 113 u. 1900, S. 1—52 des Beihefts. Ronca, G.: Riv. mar. 1899, u. La corrisp. 2, S. 278. 1901. v. Portenschlag-Ledermayer, R.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1900, S. 796 und 1904, S. 769 (mit <sup>2a</sup>). Ronca, G.: Manuale del tiro, S. 296 ff. Livorno 1901. Ronca, G. u. Pesci, G.: Abbacchi per il tiro u. Abbacchi generali della balistica. Livorno 1901. Ingen. Rothe: Art. Monatsh. 1911, II, Nr. 59. S. 371; Kritik dieser Arbeit durch Narath: ebenda 1915, I, S. 69; dagegen Rothe: ebenda 1915, Nr. 102, S. 314. Nowakowski, A.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1913, H. 7, S. 547 (logarithm. Maßstäbe) u. ebenda 1913, H. 5, S. 383 (Flugbahn-Schichtenpläne). Vgl. auch Garbasso: Riv. d'art. e gen. 20, vol. 2, S. 387 (mit d. Lösung von Siacoi). 1903. Über die graphischen Darstellungsverfahren im allgemeinen vgl. besonders: Barker, A. H.: Graphical calculus. London 1908. Mayer, J. E.: Das Rechnen in der Technik. Leipzig 1908. Mehmke, R.: Numerisches Rechnen, Encyclop. d. math. Wissensch., Bd. IF. Leipzig: B. G. Teubner. Morley, A. u. Inchley, W.: Elementary applied mechanics. London 1911. d'Ocagne, M.: Coordonnées parallèles et axiales. Paris 1885; Traité de nomographie. Paris 1889; Calcul graphique et nomographie. Paris 1908. Peddle, J. B.: The construction of graphical charts. New York 1910. Perry, J.: Prakt. Mathematik. Wien 1908. Pirani, M.: Graphische Darstellung, Sammlung Götschen. Berlin u. Leipzig 1914. Schilling, F.: Über die Nomographie von M. d'Ocagne, Leipzig 1900. v. Schrutka, L.: Theorie u. Praxis des logarithm. Rechenschiebers. Leipzig 1911. Schultz, E.: Mathem. u. technische Tabellen, Ausgabe 2B. Essen 1911. Soreau: Contribution à la théorie et aux applications de la nomographie. Paris 1901. Nouveaux types d'abaques. Paris 1906.

Gümbel, L.: Art. Monatsh. 191, Nr. 135, S. 78. Vahlen, Th.: Ballistik, S. 29. Berlin u. Leipzig 1922 u. Art. Monatsh. 1918, S. 145. Brauer, E. A.: Anleitg. z. graph. Ermittl. d. Flugbahn eines Gesch. Karlsruhe 1918. Kutta, W.: Z. Math. Phys. Bd. 46, S. 435. Veithen, C.: Art. Monatsh. 1919, Nr. 147, S. 98 (aus dem Nachlaß veröffentlicht von R. Neuendorff). Wiener, O.: Ber. d. Leipz. Akad. Bd. 36, I. 1919, u. Sängewald, R.: ebenda Bd. 73, S. 184. 1921. Eine graph. Konstruktion der Flugbahn auch bei: d'Antonio: Riv. d'artegen. 37, vol. 3, S. 16. 1920. Cranz, C. u. Rothe, R.: Art. Monatsh. 1917, Nr. 125/126, S. 197. Das dort beschriebene Verfahren ist durch zwei Beispiele erläutert.

Über mechanische Integration der Hauptgleichung mittels des Beilschneiden-Planimeters, vgl. Filloux, L.: Rev. d'Art. 72, Nr. 6, S. 345. 1908. Dazu Pascal, E.: I miei integrali per equazioni differenziali. Neapel: L. G. Pellerano 1914. Jacob, L.: Calcul mécanique, S. 387 (ballist. Integr. graph.). Paris 1911. — Mittels des Kugelrollplanimeters: Cranz, C.: Art. Monatsh. 1909, Nr. 30, S. 412. Perrin, A.: Mém. de l'art. franc. vol. 1, cah. 2, S. 337 (Beschreibung eines ball. Integr. graph.).

Über das Didionsche Verfahren zur Berechnung von Steilbahnen in mehreren Teilen vgl. Didion, J.: Traité de balistique, S. 127 ff. Paris 1860.

Joh. Schmidt benützt ein Näherungsverfahren nach v. Wuich zum Schießen gegen Ziele unter großen Terrainwinkeln, Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1908, S. 431. Freih. v. Zedlitz: Art. Monatsh. 1913, Nr. 79, S. 1 (Rechnungsverfahren) u. 1914, Nr. 88, S. 274 (Luftschußtafel für ein Gewehr). Harris, F. E.: Journ. of the Un. Stat. Art. 23, S. 43 (Steilfeuertabellen nach Otto). 1905. Charbonnier, P.: Rev. d'Art. 40, Bd. 79 (Dez. 1911), S. 133; Bd. 79 (März 1912), S. 357; Bd. 80 (April 1912), S. 45 (ballistique d'aéroplane). Edler v. Portenschlag-Ledermayer, R.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1911, H. 7, S. 616 (Steilschuß). de Josselin de Jong, G.: Holland. Zeitschr. Militaire Spectator 1924 (stückweise Berechnung auf Grund des linearen Gesetzes  $cf(v) = c \cdot v$ ). Ders.: Grafische berekening van schoots tafels ... s'Gravenhage: H. P. de Swart u. Zoon 1924. v. Brunn, A.: Schriften d. Naturforsch. Ges. in Danzig, N. F., Bd. 15, H. 1. 1919. Takeda, S.: Art. Monatsh. 1914, Nr. 89, S. 321. Schatte, J.: Kriegstechn. Z. 12, H. 9, S. 416. 1909. Bianchi, G.: Riv. d'art. e gen 27, vol. I, S. 175. 1910. v. Eberhard, O.: Einiges üb. d. Ball. großer Schußweiten, S. 43. Berlin 1924. Garnier, M.: Mém. de l'art. franç. Bd. I, S. 176, 299, 300. 1922. u. Garnier, M.: Calcul des trajectoires par arcs successifs, S. 378, 379, 380. Verlag v. Gauthier-Villars. Curti: Der Schuß gegen Luftziele, Schweizer. Z. f. Art. u. Gen. 1918 (Beschreibung eines Zielapparats; punktweise graph. Konstr. steiler Flugbahnen; auf die klare Entwicklung sei besonders hingewiesen). Breuer, S.: Flak-Mathematik, Art. Monatsh. 1920, Nr. 160/161, S. 143. Das Flak-Schießen in Frankreich: Alayrac: Rev. d'Art. 45, Bd. 90, H. 4, S. 832. 1922. Röggl, E.: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1919, H. 1, S. 1 (Verfahren z. stückweisen Flugbahnberechnung). Ferner vgl. Mussel, M.: La méthode des approximations successives de M. Picard et ses applications possibles en balistique; Mém. de l'Art. franç. Bd. I, H. 1, S. 217. 1922.

Zu § 39. Über ein Berechnungsbeispiel zu § 39 (Vertikalschuß mit dem S-Geschoß) u. über neuere eingehende Versuche von Preuß, bezüglich des vertikalen oder nahezu vertikalen Gewehrschusses vgl. Cranz: Z. „Schuß u. Waffe“ 2, Nr. 18, S. 413. 1909, sowie Art. Monatsh. 1909, Nr. 30, S. 412—415 (dort die in § 39 benützte Methode). Zahlreiche Berechnungen über den lotrechten Schuß: Eckhardt: Art. Monatsh. 1912, II, Nr. 61, S. 64. Ferner vgl. v. Burgsdorff, A.: Z. „Schuß u. Waffe“ 2, Nr. 8, S. 179. 1908/09. Rohne, H.: ebenda 2, Nr. 7, S. 152. 1908/09.

Über die Maximalhöhe, die ein Geschoß erreichen kann, vgl. Robert, St.: Mém. scientif. p. 43 ff. Paris 1872.

Zu § 41 u. 42; Fehlerbestimmungen. Zu § 41. Bezügl. d. Verfahrens von Cauchy vgl. de St. Robert, P.: Mém. scientif. I, S. 160. Paris 1872. Ferner vgl. Moigno: Leçons sur le calcul diff. et intégr. II, leç. 26—28 u. 83. 1844. Coriolis: Journ. de Math. de Liouville 2, p. 229. 1837. Lipschitz: Lehrb. d. Analysis, II, S. 504. 1880. Picciati: „Il Polytecnico“ Bd. 41, S. 493 u. 537. Mailand 1893. Runge: Math. Ann. 44, S. 437. 1894 u. 46, S. 437—1895. Heun, K.: Jahresber. d. Dt. Math. Vereinigung 9, S. 111. 1900 u. Z. Math. Phys. 45, S. 23. 1900. Photogrammetrische Prüfung ballistischer Rechnungsverfahren: Nowakowski, O.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1912, H. 3, S. 262.

Zu § 42. Über das gewöhnliche Schwenken der Bahn im luftgefüllten Raum vgl. von neuerer Literatur: Heydenreich, W.: Lehre vom Schuß I, S. 106. Berlin 1908 (Einfluß des Geländewinkels auf Erhöhungs- und Breunlängenbedarf; Schießen gegen Luftballon und Planschießen).

Gouin: Rev. d'Art. 35, S. 121. 1907. Percin: ebenda 19, S. 281. 1882 u. 27, p. 118. 1885.

v. Burgsdorff, A.: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoff-Wes. 1, Nr. 18, S. 332. 1906, u. Z. „Schuß u. Waffe“ 2, Nr. 8, S. 179. 1907. Kerkhof: Art. Monatsh. 1908, Nr. 13, S. 44. Über die Methoden von G. Fernandez u. von Gonzalez (Jahrb. f. dt. Armee und Marine 1905, Dez.) vgl. Kolarski: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1906, S. 301. Eine Fehleruntersuchung zu dem Verfahren von A. v. Burgsdorff s. bei K. Popoff, Festschrift für H. v. Seeliger, S. 169—176, Verlag J. Springer, Berlin 1924.

Über Verwendung der Methode des Schwenkens zur Konstruktion einer Flugbahn mit Hilfe einer gewöhnl. Schußtafel vgl. Pucherna: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1908, S. 809. Vgl. auch § 11 und § 19 (Close, Wolff, Greenhill).

Zu § 43 bis 52; Tageseinfüsse. Heydenreich 1 (1. Aufl.), S. 53 u. 54 u. 2, S. 39, u. Rohne, H.: Kriegstechn. Z. 3, S. 129, 201. 1900 u. 4, S. 326, 1901. Eine Regel der Praxis betr. der Höhenlage des Schießplatzes s. bei v. Minarelli (österreich.): S. 61; derselbe: Über das Nehmen von „Feinkorn“ statt „gestrichen Korn“, S. 53. Zahlreiche Daten zu diesen Nummern bei Exler, K.: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoff-Wes. 1, S. 107, 127, 376, 399. 1906. de Sparre, M.: Comptes Rendus Bd. 161, S. 767 u. Bd. 162, S. 33, 496 (zonenweise Berechnung einer Flugbahn mit Berücksichtigung der Abnahme der Luftdichte nach oben; der Verlauf der Luftdichtenänderung bringt es mit sich, daß die Geschossgeschwindigkeit durch ein Minimum und dann durch ein Maximum hindurchgeht, also schließlich wieder abnimmt. Die Annahmen über das Geschütz, mit welchem Dünkirchen beschossen wurde, beruhen auf bloßen Vermutungen).

Schwarzschild: Einfluß von Wind u. Luftdichte auf die Flugbahn d. Gesch., Preuß. Akad. d. Wiss. 1920, I, S. 37 (Methode der Stoßfaktoren). Garnier, M.: Rev. d'Art. 44, Bd. 88, S. 327 u. 341. 1921.

Zu § 44. Über den Einfluß einer kleinen Änderung von  $v_0$ ,  $\varphi$  oder  $c$  auf  $X$ : vgl. Siacci: S. 105. Vallier: S. 67. Denecke: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 93, S. 1. 1886 und 94, S. 226. 1887. Ferner Anonymus: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 97, S. 274. 1890. v. Pfister: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 93, S. 73. 1886. Rohne: Kriegstechn. Z. 3, S. 129 u. 201. 1900, und 4, S. 326. 1901. Sabudski: Peterb. Art. Journ. 1889, Nr. 11, S. 941. Charbonnier, P.: Traité de bal. extér. S. 175. Paris 1894.

Differenzenformeln bei Cavalli, E.: Riv. d'art. e gen. 37, vol. 1, S. 169 u. 265. 1920. Ferner Veithen, C.: Über die Reduktion der Geschosflugbahnen, Art. Monatsh. 12, Nr. 136/137, S. 101. 1918.

Zu § 45. Schiefer Räderstand, bzw. Verdrehen des Gewehrs. Vgl. Didion: S. 364. Anonymus: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 93, S. 45, 1886. v. Minarelli: S. 54. Ritt v. Eberhard: Das Wesen der modernen Visiervorrichtungen der Landartillerie, im Auftrag der Firma F. Krupp bearbeitet. Berlin 1903.

Zu § 46 bis 52; Windeneinfluß usw. Vgl. Didion: 1, S. 311; v. Waich: S. 474; Siacci: S. 113; Béal: 2, append. S. 409; Heydenreich: (1. Aufl.) 1, S. 57; Sabudski: S. 302; Denecke: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 93, S. 1. 1886, und 94, S. 226. 1887. Anonymus: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 97, S. 274. 1890 (Erfahrungen im Transvaalkrieg). v. Minarelli: S. 57 ff. Eingehende Berechnung besonders von Rohne, H.: Kriegstechn. Z. 3, S. 129 u. 201. 1900, sowie 4, S. 326. 1901. Rohne berechnet z. B., daß bei mittlerer Windgeschwindigkeit von 5,5 m/sec (Potsdamer Beobacht. 1893—97) der unter 45° schief von vorn kommende horizontale Wind die Schußweite von 2000 m um 31 m verkürzen müßte, und bei einer Windgeschwindigkeit von 30 m um 240 m; die

Seitenabweichung betrüge auf 2000 m bei mittlerer Windgeschwindigkeit nur etwa 18 m. Überhaupt ist nach Rohne die Änderung der Schußweite durch Tageseinflüsse in der Mehrzahl der Fälle kleiner als der wahrscheinliche Schätzungsfehler, selbst dann, wenn Wind und Temperatur in gleichem Sinn wirken (Wind von hinten und Temperatur hoch; Wind von vorn und Temperatur niedrig); dies gilt wenigstens für Gewehre und für Distanzen unter 1000 m. Bei Geschützen sind die Tageseinflüsse bedeutender; für die Feldkanone z. B. mit  $v_0 = 465$  m/sec, Schußweite 6000 m,  $\varphi = 18^\circ 11'$ ;  $\omega = 28^\circ 30'$  findet Rohne, daß bei  $-22,5^\circ$  C die Schußweite um  $394 + 634 = 1038$  m zu kurz ausfallen müßte. — Erwähnt sei noch, daß Heydenreich für seine allgemeinen Angaben die umfangreichen Versuche der deutschen Artillerie-Prüfungs-Kommission zur Verfügung hatte und daß die Versuchsreihen, welche von Krause (Mitglied der deutschen Gewehrprüfungskommission) bezüglich der Tageseinflüsse veröffentlicht wurden, Kriegstechn. Z. 5, S. 433. 1902, eine ziemlich befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ergaben, wenigstens was Temperatur und Barometerstand anlangt. Charbonnier, P.: Rev. d'Art. Jahrg. 41, Bd. 82, S. 305. 1913 (Windkorrekturen). — Ferner bes. Stübler, E.: Sitzungsber. d. Berliner mathem. Gesellsch., Jahrg. 17, S. 51 bis 62. 1919.

Zu § 51. Schuß von Bord des fahrenden Schiffes aus: Métin: Mém. de l'art. franç. Bd. 1. Heft 3, S. 599. 1922. — Schuß von einem Flugzeug aus nach einem anderen Flugzeug: Charbonnier, P.: Rev. d'art. Jahrg. 40, Bd. 79. 1912, Märzheft.

Zu § 53, Erdrotation. Vgl. Galilei, G.: Dialog über das Weltsystem, deutsch von Strauß. Leipzig 1891, S. 189—192. Poisson, S. D.: J. éc. polyt. 15, S. 187. 1832, und Poisson: Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air, S. 41 u. 62, Paris 1839. Page, C. E.: Nouv. ann. (2) 6. S. 96, 387, 481. 1867. Robert, St.: 1, S. 357. Astier, F.: Rev. d'art. 5. S. 272. 1875. Berger, R.: Über den Einfluß der Erdrotation auf den freien Fall der Körper und die Flugbahnen der Projektile, Coburg 1876. Finger, J.: Wien. Ber. 76<sup>a</sup>, S. 67. 1878, und Hoppe, R.: Arch. d. Math. 64, S. 96. 1879. Schell, W.: Theorie d. Bewegung und der Kräfte 1, S. 528. Sprung, A. W. F.: Arch. d. deutsch. Seewarte 1879, S. 27; Dt. meteor. Z. 1, S. 250. 1884; Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 103, S. 13. 1896. Résal: 1, S. 107. Ökinghaus, Wochenschrift f. Astron. 1891, S. 89 und Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 103, S. 89. 1896. Sabudski, Petersb. Art.-Journ. 1894, Nr. 2, S. 120 und Rev. d'art. 44, S. 467. 1894. Obermayer, A. v.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1901, S. 707.

Zu der Textbemerkung über die Abweichung eines Geschosses beim Wurf vertikal aufwärts sei hier noch die Notiz von Budde hinzugefügt: beim Schuß lotrecht aufwärts erhalte man eine Abweichung nach Norden (nicht nach Süden) und zwar bis  $t = 4 \frac{v_0}{g}$  (Budde: Allg. Mechanik Bd. 1, S. 317).

Zu § 54. Über den Einfluß des Seitengewehrs: Vgl. Hentsch, Fr.: Ballistik der Handfeuerwaffen. Leipzig 1873 (S. 312: „Es stellte sich bei allen Gewehren ... heraus, daß das ohne Seitengewehr auf den Strich angeschossene Gewehr nach Aufpflanzung des Seitengewehrs, dessen Klinge ... rechts am Lauf sich befindet, eine schon auf nahe Distanzen erhebliche Abweichung nach links zeigen“). Ähnlich Weygand, H.: Das Schießen mit Handfeuerwaffen, eine vereinfachte Schießlehre, mit bes. Berücksichtigung des deutschen Inf. Gew. M. 71, Berlin 1876 (besonders S. 184: „Die Erfahrung hat gelehrt, daß das Seitengewehr eine stetige Abweichung des Schusses verursacht und zwar nach

der der Klinge entgegengesetzten Seite“). Ferner vgl. die verschiedenen Ausgaben des Leitfadens für den „Unterricht in der Waffenlehre an den Kgl. Kriegsschulen“, 1876 (von Stachorowski), S. 150; 1886 (von Neumann) S. 121; 1890, S. 58. Weiter Cranz, C.: Civil-Ingenieur 21, H. 2. 1885. Kötter, F.: Verhandl. d. Phys. Ges. zu Berlin 7, S. 17. 1888. Cranz, C. und Koch, K. R.: Münch. Akad. Ber. 21, S. 572. 1901. Jahresber. d. Deutsch. Mathem. Vereinig. 6, S. 118. 1899. Minarelli-Fitzgerald, A. Chev.: Das moderne Schießwesen S. 55. Wien 1901. Kötter, F.: Sitz-Ber. d. Berlin. Mathem. Ges. 2, S. 65. 1903. Entgegnung darauf: Cranz, C.: ebenda 3, S. 11. 1904. Otto, J. C. F.: Hilfsmittel für ballist. Rechnungen, 4. Lieferung. Berlin 1859 (S. 266 wohl zuerst die Vibration des Gewehrlaufs als Ursache des Abgangsfehlerwinkels erwähnt).

Zu § 55 bis 60. Geschosßrotation. Vgl. Didion: S. 304 u. 319 und J. éc. polyt. 16, S. 51. 1839. Piobert, G.: Traité d'artillerie. S. 169. Paris 1839. Régal: 1, S. 375. Magnus, G.: Berl. Ber. 1852, 1—24, und Ann. Phys. Chem. 88, S. 1. 1853. de St. Robert, P.: Mém. scientif. I, p. 277 u. folg. Paris 1872. Sparre, M. de: Mouvement des project. oblongs dans le cas du tir de plein fouet. Paris 1875, und Sur le mouvement des projectiles dans l'air, Paris 1891; Arch. f. Math., Astron. u. Phys., Stockholm 1904, und Annales de la société de Bruxelles 35, S. 79. 1911. Timmerhans, R.: Essai d'un traité d'artillerie 2, S. 113. Paris 1846. Otto, J. C. F.: Umdrehung der Artilleriegeschosse, Berlin 1843, Forts. 1847 u. Allg. Militärz. 1846, Nr. 64/65, und Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 6, S. 118. 1840. v. Heim, J. P. G.: S. 169. (Neumann: Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 6, S. 213 1838; 14, S. 49. 1842 u. 17, S. 193. 1845.) Mondo, C. Derivation der Langgeschosse, München 1860. Vieth, V. v.: Flugbahn der Geschosse. Dresden 1861. Owen, C. H.: Woolwich, Roy. Art. Inst. Proc. 4, p. 180. 1863, u. 23, p. 217. 1869. Brockhusen, Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 15, S. 93. 1843. Rutzki: S. 169. v. Rouvroy, W.: Theorie der Bewegung der Spitzgeschosse. Berlin 1862, und Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 18, S. 19. 1845. D(arapsk)y: Derivation der Spitzgeschosse, Cassel 1865. Mayevski, N.: S. 178 u. Petersb. Art.-Journ. Nr. 3, S. 11. 1865, und Rev. techn. mil. 5, p. 1. 1865. Gauthier, P.: Mouvement d'un projectile dans l'air. Paris 1867. Paalzow, A.: Über die Drehung fester Körper, insbesondere der Geschosse und der Erde. Berlin 1867. Kummer: Berlin. Akad. Abhandl. 1875, S. 1 u. 1876, S. 1. Astier, F.: Essai sur le mouvement des projectiles oblongs. Paris 1873. Jouffret, F. P.: Rev. d'art. 4, p. 245, 547. 1874. Haupt, P.: Mathematische Theorie der Flugbahnen gegozener Geschosse, Berlin 1876. Märker, J.: Über das ballistische Problem, Gymn.-Progr. Hersford 1876. Muzeau: Rev. d'art. 12, S. 422 u. 495. 1878 mit Forts. bis 14, S. 38. Ingalls: Handbook of Problems in exterior ballistics, New-York 1900. Anonymus: Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 85, S. 134. 1879, u. 87, S. 180. 1880. Bender, K. B.: Bewegungserscheinungen der Langgeschosse, Darmstadt 1888. Jansen: Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 97, S. 424. 1890. Sabudski: Petersb. Art.-Journ. 1890, Nr. 7, S. 649 u. 1891, Nr. 1, S. 1; auch Äußere Ballistik 1895, S. 323—393. Brix, A.: Marine Abhandlungen (russ.) 1891; Nr. 1, S. 25, Nr. 2, S. 61, Nr. 3, S. 41. Engelhardt: Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 100, S. 403 u. 449. 1893. Tait, P. G.: Nature (engl.) 48, S. 202. 1893. Müller, H.: Entwicklung der Feldartillerie. Berlin 1894. Ökinghaus, E.: Arch. f. Art.-u. Ing.-Off. 103, S. 185. 1896. Altmann, J.: Erklärung u. Berechnung d. Seitenabweichungen. Wien 1897. v. Obermayer, A.: Wien, Organ der militärwissenschaftlichen Vereine 1898 und Mitt. ü. Geg. d. Art.-u. Gen.-Wes. 1899, S. 869. Greenhill, A. G.: Woolwich, Roy. Art. Inst. Proc. 11, S. 119 u. 124. 1882. v. Minarelli: S. 43; Ludwig: Studien über Ballistik, Karlsruhe 1853 (Apparat). Tait, P. G.: Transact. Roy. soc. Edinburgh 37 (2), S. 427. 1893 u. Bei-

blätt. zu d. Ann. d. Phys. u. Chem. 4, S. 288. 1895; Proceed. Roy. Soc. 21, S. 116. 1896, u. Beiblätt. z. d. Annal. d. Phys. u. Chem. 21, S. 389. 1897. Rögglä, E.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1912, H. 4, S. 317. Cranz: Z. f. Mathem. Phys. 43, S. 133 u. 169. 1898 (dort ist S. 151 Zeile 10 v. o.  $+\theta$  statt  $-\theta$  zu lesen, mit Wirkung für S. 152; ferner in Formel (22) statt  $+tg\omega$  zu lesen  $+tg\theta_0$ , mit Wirkung für Formel (23) und (24) und die Zusammenfassung des Resultats); Jahresber. Dt. Math.-Vereinig. 6, S. 110. 1899.

Grammel, R.: Der Kreisel, § 21. Braunschweig 1920. Grammel, Z. Math. Phys. Bd. 64, H. 2. 1916, — Nöther, F. (unter Benützung eines ungedruckten Manuskripts von A. Sommerfeld): Nachricht d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1919, 30. Mai, und Art. Monatsh. 1919, Nr. 149/150, S. 170. Vahlen, Th.: Art. Monatsh. 1919, Nr. 153, S. 98. Derselbe, Ballistik, S. 126 u. folg. Berlin u. Leipzig 1922. König, H.: Die Bewegung des rotierenden Langgeschosses, Dissertation, Göttingen 1919. Güldner, H.: Z. V. d. I. 1917. Fowler, R. H., Gallop, E. G., Lock, C. N. H. u. Richmond, W.: Aerodynamique d'un projectile tournant, im Mém. de l'art. franç. Bd. 1, Heft 2, S. 379 u. Heft 3, S. 727. 1922. C. Cranz und W. Schmudt, Z. ang. Math. Mech., Bd. 4, S. 449, 1924.

Zu § 55. Abweichungen von Kugeln: Didion, J. u. Sauley: Cours d'artillerie, partie théorique, rédigé d'après les cahiers et les leçons de G. Piobert. Paris 1841. Otto, F.: Über die Umdrehung der Artilleriegeschosse, S. 109. Berlin 1843. Fortsetzung dazu, Neisse 1847. Poisson, S. D.: Recherches sur le mouvement des projectiles, S. 69 ff. Paris 1839; Über die Luftreibung S. 74, dazu vgl. auch Winkelmann, A.: Handb. d. Physik, 1, S. 600. Breslau 1891, Bezüglich der Versuche mit exzentrischen Geschossen vgl. besonders Heim, S. 169. Rouvroy: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 18, S. 19. 1845. Müller, H.: Die Rotation der runden Artilleriegeschosse. Berlin 1862. Die Experimente von Magnus: vgl. Berlin. Akad. Abhandl. 1852, auch besonders unter dem Titel: Über die Abweichung der Geschosse, Berlin 1860. Über die Bewegung des Golfballs und des Bumerangs vgl. Walker, G. T.: Encyclopädie d. mathem. Wissensch. IV, 9, Referat über „Spiel und Sport“, S. 135—145. Die Erklärungsweise von Lanhester zur Abweichung kugelförmiger Geschosse durch Rotation: Lanhester, F. W.: Aerodynamik, deutsch von C. u. A. Runge: Bd. 1, S. 36 u. folg. Leipzig: Verlag von Teubner 1909.

Betr. diskusartiger Geschosse vgl. Robert St.: Mémoires scientif. Bd. 2, S. 7. Turin 1873; sowie Siacci, F.: Bal. extér., S. 132. Paris 1892.

Zu § 56. Erfahrungstatsachen: Vgl. Didion, Otto Rutzki, Müller (s. o.); ferner Hélie, M.: Traité de balistique, Bd. 2, S. 310. Paris 1884. Über Beobachtungen des fliegenden Geschosses mit bloßem Auge berichtet Heydenreich: 1, S. 7 u. 2, S. 95—98 (2. Aufl. 147); ferner Rutzki: Theorie und Praxis der Geschöß- und Zünderkonstruktionen. Wien 1871. Müller, H.: Die Entwicklung der preussischen Festungs- und Belagerungsartillerie, S. 162. Berlin 1876. Über indirekte Beobachtungen an Geschößdurchschlägen in Papierscheiben siehe z. B. Jansen: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 97, S. 425 u. 497. 1890. Eine photographisch registrierende Vorrichtung im Geschöß gibt Neesen, F.: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 96, S. 68. 1889; 99, S. 476. 1892 und 101, S. 253. 1894. Beobachtungen mit kleinen Geschwindigkeiten: Cranz, C.: Z. Math. Phys. 43, S. 133 u. 169. 1898 (s. o.).

Über die Bewegung der Geschosse mit flüssigem Inhalt: Nebout: Rev. d'Art. Jg. 43, Bd. 85, S. 133. 1920.

Über die Seitenabweichungen von Gewehrgeschossen: Thiel, E.: Das Inf.-Gewehr. S. 20. Bonn 1883. Rohne, H.: Schießlehre für Infanterie. S. 182,



Berlin 1906 (Angabe nach Krause, 1 m auf 1000 m bei Gewehr M. 88) und Milit. Wochenblatt 1904, Nr. 118, S. 2737. Wille: Waffenlehre IV, S. 231. Berlin 1908 (Versuche von Quinaux, Belgien, mit Gewehren von Linksdrill und Rechtsdrill).

Dähne, A.: Neue Theorie der Flugbahnen von Langgeschossen. Berlin 1888. Derselbe, Bausteine zur Flugbahn- u. Kreiseltheorie. Berlin 1914. Derselbe, Kriegstechn. Z. 10, S. 65 u. 265. 1907, u. 12, S. 58. 1909.

Zu § 57. Vgl. Rutzki, A. v.: Bewegung und Abweichung der Spitzgeschosse. Wien 1861, und Theorie und Praxis der Zünderkonstruktion. Wien 1871. Jansen: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 97, S. 425 u. 497. 1890. Sabudski, N.: Untersuchungen über die Bewegungen des Langgeschosses (russ.). St. Petersburg 1908. Terada, T. und Okochi, M. (Japan): Z. Tokyo Sugaku-Buturi-gakkwai Kizi, Ser. 2, vol. 4, Nr. 20, S. 398 (Photogr. flieg. Geschosse, insbes. auch Schüsse durch Röhren, sowie Versuche über Geschoßpendelungen, Beobachtungen an Scheibendurchschlägen, ähnlich wie Jansen mit nicht rotierenden Geschossen); verdeutsch: Art. Monatsh. 1909, S. 301. Yokota, Seinen: Gleiche Zeitschr. Ser. 2, vol. 5, Nr. 18, S. 347 (Kreiselbewegungen der rotierenden Langgeschosse). Dittli, A.: Art. Monatsh. 1916, Nr. 116, S. 49.

Über den Pfeilflug: Layritz: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengst.-Wes. 10, S. 303. 1915 (Geschichtliches über Pfeilgeschosse; besonders vollständig). Über die Idee von rotationslosen pfeilartigen Langgeschossen vgl. besonders Jansen: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 97, S. 424 u. 497. 1890, und Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1871, S. 85 und Rutzki, A.: S. 62 sowie Rutzki, A.: Grundlagen für neue Geschoß- und Waffensysteme. Teschen 1876. Ferner Duchêne: Mémorial de l'art. franç. vol. 1, cah. 4, S. 909. 1922; équilibre et stabilité des projectiles empennés; und bes. Andreau: Les projectiles empennés et la précision; ebenda S. 929 (mathem. Ansatz zum Pfeilflug).

Zu § 58 u. 59. Über die Theorie des Kreisels vgl. in erster Linie das Werk von Klein, F. und Sommerfeld, A.: Über die Theorie des Kreisels. Leipzig 1897—1910, bes. H. 4, Leipzig 1910, Abschnitt C, Ballistik, Nr. 8, S. 317, und das Referat von P. Stäckel in der Encyklop. der mathem. Wissensch. Bd. 4, Nr. 6, dort auch die Literatur. Betr. d. Berücksichtigung eines Anfangsstoßes vgl. Cranz, C.: Z. Math. Phys. 43, S. 133 u. 169. 1898. Putz, H.: Rev. d'art. 24, p. 293. 1884. Bender, K. B.: Bewegungserscheinungen der Langgeschosse. Darmstadt 1888. Jansen: Arch. f. Art. u. Ing.-Off. 97, S. 424. 1890. Müller, H.: Die Entwickl. d. Preuß. Festungs- u. Belag-Artill. von 1815—1875, Berlin 1876, besonders S. 162 u. 175. Experimente über die Kreiselbewegung von Geschoßmodellen: v. Obermayer, A.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1899, S. 869 (darüber Harris, K. F.: Journ. of Un. Stat. Art. 10, p. 63, 189, 303. 1901); dort auch über die Arbeiten von Magnus: Poggend. Ann. 88, S. 1. 1853 und von A. v. Rutzki: Bezüglich der Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit vgl. Altmann, J.: Erklärung u. Berechnung d. Seitenabweichung rotierender Geschosse. Wien 1897. Versuche hat Krall (Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1888, S. 118) vorgeschlagen und C. V. Boys (ebenda 1897, S. 836) begonnen; vgl. auch Med. Abt. d. Preuß. Kriegsminist., „Über die Wirkg. u. kriegschirurg. Bedeutung der neuen Handfeuerwaffen“. Berlin 1894 (Schüsse gegen Drahtnetze unter Wasser).

Über neuere photographische Messungen von Geschoßpendelungen: Neesen, F.: Verhandl. d. dt. physikal. Ges. 11, Nr. 24, S. 441 u. 724. 1909; vgl. auch Band III mit zugehörig. Lit.-Note.

Zu § 59. Vgl. Hélie: 2, S. 94 u. 309; über die Formel von Mayevski, ebenso von v. Wuich u. Ollero, sowie die Tabelle von Langenskjöld vgl.



Vallier, E.: *Bal. expér.*, S. 40 u. 178. Paris 1894. v. Gleich, G.: *Z. Math. Phys.* 55, S. 363. 1907. (v. Gleich gelangt zu dem Resultat, daß die Präzessionskurve zwar symmetrisch sei in Beziehung auf die Tangentenvertikalebene, aber sehr langsam beschrieben werde; würde die Flugbahn weiter reichen, so müßte später Linksabweichung erfolgen. Die Präzessionspendungen sollen dabei (für Rechtsdrall) linksläufig vor sich gehen. S. 371 wird eine Integration so ausgeführt, daß derjenige Teil der seitlichen Luftwiderstandskomponenten, der von dem vorderen Teil der Spitze herrührt, sich samt dem betr. Momente gleich Null ergibt; dadurch werden auch die Reihenentwicklungen und Berechnungen S. 372—374 berührt. Ferner werden S. 379 die Differentialgleichungen (44), die sich auf ein im Raum festes Koordinatensystem beziehen, dadurch „wesentlich vereinfacht“, daß diese Gleichungen ohne irgendwelche Änderung auf ein mit der Bahntangente sich drehendes Koordinatensystem bezogen werden.)

Lanchester, F. W.: *Aerodynamik*, deutsch von C. und A. Runge, Leipzig: Teubner 1911, Bd. 2, Anhang VIIIa, S. 298 u. folg. Bravetta, E.: *Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengst.-Wes.* 6, S. 81 u. 107. 1911 (bes. Arbeit von Bertagna); ferner Anonymus, ebenda 1914, S. 291.

Hamilton, A.: *Ballistics*, Fort Monroe 1908, I, S. 155. Haupt, P.: *Math. Theorie der Flugbahnen*, S. 101. Berlin 1876. Charbonnier, P.: *Traité de bal. extér.*, S. 233 u. folg. Paris 1894.

Zu § 60. Demonstrationsapparate: Ludwigs Apparat s. o.; Perrodon, M. J.: *Sur un appareil destiné ...* Paris 1875; betr. Pfaundler vgl. Klimpert: *Dynamik*. Stuttgart 1889. Majneri-Kempen: *Art. Monatsh.* 1913, Nr. 76, S. 299 (Anwendung von Elektromagneten).

#### Zu § 61 bis 73; ballistische Wahrscheinlichkeitslehre.

Zu § 61—62. Über die Theorie der Wahrscheinlichkeit vgl. besond. Czuber, E.: *Wahrsch.-Rechn. u. ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensversicherung*. Leipzig 1903. *Theor. d. Beobachtungsfehler*. Leipzig 1891. Czuber, E.: *Jahresber. d. dt. Math.-Verein.* 7, H. 2, S. 1—279. 1899, dort auch die vollständige Literatur. Ferner Sabudski, N.: *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihre Anwendung auf das Schießen und auf die Theorie des Einschießens*, deutsch von Ritt v. Eberhard. Stuttgart 1906. Kozák, J.: *Grundprobleme der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, bis jetzt 2 Bände erschienen*. Wien u. Leipzig 1907/08. Über die charakteristischen Fehlermaße vgl. auch Wellisch, S.: *Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes.* S. 889 u. 975. 1908; ferner Kozák, J.: ebenda S. 47. 1910 (Bestimmung des mittl. quadrat. Fehlers aus den direkten Beobachtungen, Beobachtungsdifferenzen u. Beobachtungsresten; Formel von Jordan u. Wellisch). Über die verschiedenen Fehlergesetze (von Gauß, E. L. de Forest, K. Pearson, R. Helmert, W. Jordan, C. D. Poisson usw.) s. v. Bortkiewicz, L.: *Sitzungsber. d. Berlin. math. Ges.*, Jg. 22, 1923. Lhoste: *Rev. d'art.* 91, S. 405 u. 516. 1923; 92, S. 58 u. 152. 1923. Estienne, J. E.: *Essai sur l'art de conjecturer. Rev. d'art. et gen.* Bd. 61, S. 405; Bd. 62, S. 73; Bd. 64, S. 5 u. 65.

Zu § 63. Über die Theorie der Geschößstreuung vgl. auch Poisson, S. D.: *Mém. de l'art. de la marine* 8, S. 141. 1830. Didion, J.: *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*. Paris 1858, u. *J. écol. polyt.* 16, o. 27, S. 51. 1839. Hélié: 2, S. 95 u. v. Wuich: S. 481. Eschler: *Vorträge a. d. Artill.-Lehre*. Wien 1898. Fischer: *Kriegstechn. Z. S.* 164, 209. 1909. Schöffler, B.: *Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes.* S. 823. 1901 und S. 97, 366. 1902.

Hyperbolische Fehlertheorie in der Ballistik: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1914, S. 249, 735, 875 (J. U. van Loon).

Über den Fehlerverteilungsapparat vgl. Cranz: Komp. d. Ball. S. 297. Leipzig 1896, u. Lit.-Note 114 daselbst. Dyck, W.: Katalog math. u. math.-phys. Modelle, Apparate u. Instrumente, S. 154. München 1892. v. Obermayer, A.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes., S. 130. 1899, u. Heft 2, 1900, Notizen.

Zu § 65. Über die durch Jordan u. Helmerl begründete Methode der sukzess. Differenzen: vgl. Czuber, E.: Jahresber. d. dt. Math.-Verein. 7, H. 2, S. 205. 1899. E. Vallier hat zuerst die Methode in der Ballistik angewendet, vgl. Vallier: S. 166; dazu Ritt. v. Eberhard in dem Werk von Sabudski, N.: Die Wahrscheinlichk.-Rechn. usw., Stuttgart 1906. Beispiele dazu: Heydenreich, W.: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengst.-Wes. 1, S. 272. 1906.

Zu § 68. Ausreißerregeln: Vgl. Vallier: S. 160 u. Rev. d'art. 9, S. 222. 1877. Über die frühere Liter. betr. d. größten Fehlers (Helmerl, Jordan, Fourier, Bertrand, Peirce, Gould, Chauvenet, Airy, Bessel, Faye) vgl. Czuber, E.: Jahresber. d. dt. Math.-Verein. 7, H. 2, S. 212 ff. 1899. Ferner Heydenreich, W.: Kriegstechn. Z. 6, S. 253. 1903. Mazzuoli, A.: Riv. mar. 1908, fascio. di gennaio. Über die Ermittlung der 50prozentigen Streuung aus der ganzen Streuung vgl. Rohne, H.: Art. Monatsh. 1907, Nr. 9, S. 235, u. 1909, Nr. 32, S. 129. Kozák, J.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1910, S. 47.

Zu § 69. Gruppierungsachsen: Siacci, F.: Rev. d'art. 22, S. 521. 1883 u. Siacci: ebenda 24, S. 445. 1884 samt weiterer Literatur u. einer Bemerkung von Ch. Schols. Putz, H.: ebenda 24, S. 5 u. 105. 1884, u. 32, S. 213 u. 313. 1888.

Zu § 70—72. Vgl. Krause: Die Gestaltung der Geschoßgarbe der Infanterie beim gefechtsmäß. Schießen usw.; nach amtl. Quellen zusammengestellt. Berlin 1904. Frh. v. Zedlitz u. Neukirch: Kriegstechn. Z. 6, S. 129. 1903. Rohne, H.: Schießlehre f. Infanterie. Berlin 1906. v. Minarelli: S. 65 u. 82. Endres, K.: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 90, S. 113. 1883. Percin, A.: Rev. d'art. 20, S. 5. 1882. Giletta: Riv. d'art. e gen. S. 218. 1884. Parst: Kriegstechn. Z. 4, S. 330. 1901, u. 7, S. 235. 1902. Rohne, H.: ebenda 4, S. 119. 1901. Rohne, H.: Art. Monatsh. 1907, S. 232, 257, 397. Rohne, H.: Schießlehre für Infanterie. Berlin 1906 (besond. vgl. S. 139 u. folg. über die Zahl der getroffenen Figuren beim gefechtsmäßigen Abteilungsschießen; die Bestimmung dieser Zahl aus der Zahl der Schützen und der Zahl der Treffer im Ziel hat H. Rohne zuerst gegeben).

Speziell über die Theorie des Einschießens der Artillerie: Rohne: Arch. f. Art.- u. Ing.-Off. 100, S. 385 u. 481. 1894, u. 102, S. 64 u. 257. 1895 u. insbesondere 104, S. 172. 1897, sowie Kriegstechn. Z. 1, S. 209 u. 399. 1898, u. 2, S. 115. 1899. Callenberg: Über die Grundlagen des Schrapnellschießens bei der Feldartillerie. Berlin 1898, und Kriegstechn. Z. 2, S. 27 u. 93. 1899. Preiss: Kriegstechn. Z. 3, S. 81. 1900. Strnad, E.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1892, S. 879; sowie 1887, S. 375. Weigner, A.: Mitt. ü. Geg. d. Art.- u. Gen.-Wes. 1898, S. 821. Schöffler: ebenda 1902, S. 97 (Forts. zu der Arbeit 1900, S. 429 u. 1901, S. 823). Theoretisch besonders eingehend bei Sabudski, N.: Wahrsch.-Rechn. Stuttgart 1906. Ferner Kozák, J.: Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrsch.-Rechn. u. Fehlertheorie Bd. 2, Teil II. Wien 1900 (dort auch die Arbeiten von E. Röggl u. v. Wuich dargestellt). Eschler, E.: Vorträge aus der Artillerielehre. Wien 1898.

Über das Schießen gegen nicht beobachtungsfähige und gegen bewegliche Ziele; Schießen aus Küsten- u. Schiffsgeschützen, in theoretischer Hinsicht.

Vallier: Rev. d'art. 30, S. 106. 1887. Gandolfi, V.: Riv. d'art. e gen. vol. 4, S. 231. 1896, u. Mitt. ü. Geg. d. Art- u. Gen.-Wes. 1897, S. 645. Strnad, E.: Mitt. ü. Geg. d. Art- u. Gen.-Wes. 1897, S. 763. Indra: Mitt. ü. Geg. d. Art- u. Gen.-Wes. 1897, S. 163 u. 291; dazu Ludwig, A.: ebenda 1901, S. 91 u. 189. Calichiopulo, A.: Riv. d'art. e gen. vol. 1, S. 245 u. 411. 1893. Dragas: Streffeurs österr. mil. Z. S. 184. Wien 1890.

Über die Streuung nach 3 Dimensionen (Sprengpunkt-Streuung): Drei Aufsätze im *Mémor. de l'art. française*, Bd. 2, H. 2. 1923. Haag, J., S. 217. Garnier, M.: S. 253 und Boutroue, E.: S. 315. — Vgl. ferner Schmidt, Joh.: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1915, H. 6 bis 9 und K. Becker, Betrachtungen über die Streuungen, Artill. Monatshefte, Mai/Juni 1919.

Über die Treffwahrscheinlichkeit gegen eine beliebig begrenzte Scheibe und die zweckmäßigste Lage des mittleren Treffpunkts; vgl. Rothe, R.: Art. Monatsh. 1916, Nr. 110, S. 65 und Nr. 111, S. 125; Seheffers, G.: Berlin. Akad. Ber., Phys.-math. Kl. 42, S. 733. 1915 (günstigster Zielpunkt).

Zu § 73. Über die Verwendung der Method. d. kleinst. Quadrate vgl. z. B. Kohlrausch: Prakt. Physik S. 17. Leipzig 1901; speziell zur Aufstell. von Luftwiderstandsgesetzen vgl. auch Literaturnote zu Nr. 10 u. 11. Über zweckmäßigste Verwendung der Munition, günstigste Aufstellung von Zwischenscheiben usw. vgl. Vallier, E.: Bal. expér. S. 138 u. 151. Paris 1894.

Zu § 74 bis 78; Wirkung im Ziel. Vgl. Didion: S. 228. Siacci: S. 142. Persy, N.: Cours de balistique. Metz 1827. Résal: Comptes Rendus 120, S. 397. Paris 1895. Schumm, H. C.: Journ. of Un. Stat. art. 4, S. 620. 1895. de Brettes, M.: Comptes Rendus 75, S. 1702. 1872, und 76, S. 278. 1873. Kaiser, G.: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1885, S. 171 (Notizen); Parodi, C.: Riv. d'art. e gen. vol. 1, S. 42. 1887. Jouffret, E. P.: Les projectiles S. 142. Fontainebleau 1881. Ronca, G.: La corrisp. 1, S. 16ff. 1900. E. V.: ebenda 1, S. 200. 1900. Bezüglich schiefen Eindringens und Einflusses der Rotation: Mayevski: Rev. d. technol. milit. 5. 1866, und 6. 1867. Vallier: S. 220 und Comptes rendus 120, S. 136. Paris 1895. Heydenreich: 1, S. 8. Bezüglich der Theorie vgl. besonders v. Wuich: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1893, S. 1 u. 161 und Putz, H.: Rev. d'Art. 34, S. 138 u. 193. 1889; ferner Sabudski: 1, S. 394—420.

Die Theorien von Euler, Poncelet, Résal: Vgl. Robins, R.: Nouveaux principes d'artillerie, commentés par L. Euler, français. Übersetzung von Lombard: S. 365ff. Paris 1873. Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle, S. 619ff. Bruxelles 1839. Résal: Comptes Rendus 120, S. 397. Paris 1895. Levi-Civita, T.: Atti del reale istituto Veneto di Scienze 65, Teil II, S. 1149. 1905.

Zu § 75. Tiefstes Eindringen in Sand und Erde bei sehr groß. Geschwindigkeiten: franz. Schießinstruktion, Tabelle IV, vgl. darüber auch v. Minarelli, S. 143 und Wille, Waffenlehre, S. 173. Berlin 1900 (nach de la Llave). Wernicke: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoff-Wes. S. 201. 1910.

Über verschiedene Einzelwirkungen des Schusses vgl. A. Preuß in der Z. „Schuß u. Waffe“ 2, Nr. 24, S. 577. 1908/09; 3, Nr. 2, S. 41. 1909/10; 5, Nr. 19, S. 376. 1911/12 (Schießen mit Stearin u. Wasser); 3, Nr. 1, S. 5. 1909/10 (Gewebeabdrücke auf Bleigeschosse); 3, Nr. 9, S. 185. 1909/10 (Auffangen des Geschosses auf Eis).

Über die Geschossernergie, die notwendig sein soll, um einen Mann, bzw. ein Pferd außer Gefecht zu setzen, vgl. Rohne, H.: Schießlehre f. Infant., S. 68. Berlin 1906, und Art. Monatsh. 1908, S. 197. Pangher, J.: Mitt. ü.

Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1909, S. 615. Nobile de Giorgi, A.: ebenda 1911, H. 10, S. 891; H. 11, S. 1003; H. 12, S. 1111; 1912, S. 1 u. 12.

Über Panzerschießen und Kappengeschosse, Bahn: Art. Monatsh. 1910, II, S. 401 (Theorie der Kappengeschosse); Veit, R.: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1912, S. 112 u. 235 (Prüfung von Panzerformeln). Clerke: The Naval Annual 1913, S. 363 (Kappengeschosse); Tressider: Transact. of the Institution of Naval Architects, Jahrgang 1908, vol. 1 (Kappengeschosse). Säger: Kruppsche Zementpanzer u. Kappengeschosse, Kattowitz 1907. Eine Theorie der Deformationen durch Stoßbeanspruchung, einschließl. einer Theorie der Wirkung von Kappengeschossen: Mimey, A.: Rev. d'Art. 89, t. 78, S. 209. 1911.

Über die Eindringungstiefen in Holz vgl. Journées: Rev. d'Art. 72, S. 105. 1908.

Über Stoßfestigkeit (Festigkeit beim Durchschießen), Mimey, A.: Rev. d'Art., 39. Jahrg., Bd. 78, Juliheft, S. 209. 1911.

Über Splitterwirkung der Granaten, Trefferdichte usw. vgl. Justrow, Geschoß-Konstruktion (s. o.); derselbe: Technik u. Wehrmacht, Heft 9/12. 1921; derselbe: Art. Monatshefte Nr. 186, S. 221. 1922; ferner H. Rohne, Art. Monatshefte Nr. 211/212, S. 121. 1924.

Zu § 77. Über die sog. Explosivwirkung der neueren Infanteriegeschosse. Vgl. v. Obermayer, A.: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1898, S. 361, und Medizinalabteilung des Preuß. Kriegsministeriums: Über die Wirkung und kriegschirurgische Bedeutung der neuen Handfeuerwaffen. Berlin 1894; dort auch Literatur. Dazu Rink, E.: Rev. d'Art. 25, S. 550. 1885; v. Minarelli: S. 41. Cranz, C. und Koch, K. R.: Ann. d. Phys. Chem. (4) 3, S. 247. 1900 (momentphotogr. Aufnahmen); Versuchsanstalt für Handfeuerwaffen in Halensee-Berlin, Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1903, S. 477 (sog. Afterwirkung zum erstenmal konstatiert). Cranz u. Günther: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoff-Wesen 1912, S. 317. Lehmann, H.: die Kinematographie, ihre Grundlagen und ihre Anwendungen, S. 112. Leipzig: B. G. Teubner 1911. Curschmann: Z. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoff-Wesen 10, S. 123. 1915 (angebliche Dum-Dum-Geschosse). Preuß, A.: Z. „Schuß u. Waffe“ 3, Nr. 17, S. 349. 1909/10 (Luftdruck in der Nähe des fliegenden Geschosses). Über Schußverletzungen: Z. „Schuß u. Waffe“ 6, S. 421 u. 441. 1913 (Hübener), und 7, S. 281, 297, 317, 337, 357. 1914 (E. Bröer); ferner Bircher, E.: Kriegschirurg. Hefte der Beitr. z. klin. Chir. Bd. 96, H. 1, S. 38. 1915.

Bezüglich der Durchschlagswirkungen von Geschossen, die senkrecht in die Höhe geschossen worden waren, beim Zurückkommen: Cranz: Z. „Schuß u. Waffe“ 2, Nr. 18, S. 413. 1909 (Versuche von A. Preuß); ferner Wieting Pascha, Prof.: Militärärztl. Z. 38, H. 15, S. 617. 1909.

Experimentelles über Geschoßdeformation, vgl. Breuer, A.: Mitt. ü. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes. 1907, S. 671.

Zu § 78. Über Ricochettschüsse u. Prellschüsse: Vgl. die Literaturnote zu § 5. E. de Jonquières erwähnt, daß Kugeln von 0,16 m Kaliber mit  $v_0 = 455$  m/sec im Mittel 22 Sprünge auf Wasser ausführten; Schußweite 2470 m. Weitere Zahlenangaben bes. bei Persy, Cours de balistique, S. 61. Metz 1827. Preuß, A.: Z. „Schuß u. Waffe“ 3, Nr. 10, S. 217. 1909/10, und 4, Nr. 11, S. 213. 1910/11 (Schießen unter Wasser). Ramsauer, C.: Über den Ricochettschuß, Dissertat. Kiel 1903. Betreffs Pétry, Heydenreich und v. Chrismar vgl. das Verzeichnis der Lehrbücher und Monographien.

Zu § 79, Schußtafeln. Vgl. Vallier, E.: Bal. exp., Paris 1894 und A. Hamilton, Journ. of the Unit. St. Art. Nr. 100, S. 257 (Dez. 1909) und J. Ottenheimer, bal. extér, Paris 1924. — Die natürlichen Werte der sekundären bal-

listischen Funktionen von Siacci findet man bei Fasella, *Tavole balistiche secondarie*, Genua 1901. Zur Verwendung dieser natürlichen Funktionswerte beim Gebrauch der Rechenmaschine empfiehlt sich die Benutzung der „Tafeln für numerisches Rechnen mit Maschinen“, von O. Lohse, Leipzig 1909. Dreistellige Logarithmen dieser sekundären Funktionswerte enthält der Tabellenanhang zu Bianchi, *Corso teorico-pratico di Balistica Esterna*, Turin 1922. Bianchi gibt auch eine Bahnberechnung in Teilbögen (l. c. S. 160), unter Benutzung der primären Funktionen von Siacci.

Zu § 80. Über die Vornahme von Schußtafelversuchen vgl. auch Heydenreich, W.: *Die Lehre vom Schuß für Gewehr und Geschütz*, Berlin 1908, Teil I, S. 70 ff., ferner Bianchi l. c. S. 318—393. — Über die empirische Ermittlung der Schußweiten für Windstille, sowie die experimentelle Ermittlung der Windinflüsse auf Seitenabweichung und Schußweite vgl. Becker, K.: *Die Berücksichtigung der besonderen und der Witterungseinflüsse*, *Zeitsch. Technik und Wehrmacht* 1921, Heft 5 bis 10. — Betr. der Witterungseinflüsse vgl. insbes. auch Garnier, M.: *Mémorial de l'Artill. franç.* Bd. I, Heft 2, S. 299, 1922 und Bd. II, Heft 2, S. 353. 1923. — Für ballistische Berechnung empfiehlt es sich, aus den meteorologischen Protokollen zunächst die Windkomponenten parallel und senkrecht zur Schußrichtung zu entnehmen und hieraus den ballistischen Wind getrennt für beide Richtungen zu ermitteln; (die Ermittlung eines einheitlichen ballistischen Windes stellt eine bloße Annäherung dar, die allerdings beim praktischen Gebrauch der entsprechenden Korrekturtafeln durch die Truppe zum Teil notwendig wird.) — Über die Höhen- und Längstreuungen der Sprengpunkte bei einem idealen, in sich selbst streuungslosen Zeitzündler vgl. Großmann: *Mitt. üb. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes.* 1913. — Über den Einfluß der Schwankungen des natürlichen Feuchtigkeitsgehalts des Pulvers auf die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  vgl. Hamilton: *Inn. Ball.* — Für die Ermittlung der Streuungen, namentlich bei kurzen Schußentfernungen gibt Pfeifer, *Art. Monatshefte* 1922, gewisse Regeln, durch welche das Zeichnen der Ausgleichskurven erleichtert werden kann. — Über das Zünderbrennen unter Berücksichtigung der Geschößbewegung und der Flughöhe vgl. Stübler, E.: *Art. Monatshefte* 1918, Mai/Juni-Heft; ferner Bianchi, der l. c. S. 220 ff. diese Frage vom Standpunkt der praktischen Erfahrungen aus ausführlich behandelt. Nach den empirischen Daten von Bianchi ist selbst bei dem gleichen Satzringpulver der das Zünderbrennen kennzeichnende Faktor je nach der Zünderkonstruktion sehr verschieden, so daß die Notwendigkeit außer Zweifel steht, beim Satzring-Brennzünder die Zünderstellungen der Schußtafel praktisch zu erschließen.

Zu § 81. Für die ganz steilen Flugbahnen stellt man die Aufsatzwinkel, Flugzeiten, Zünderstellungen und Seitenverschiebungen, statt in Funktion von  $x$ , besser in Funktion von  $y$  dar. Im übrigen verfährt man wie im Text angegeben.

Zu § 82. Zur Berechnung der Flugbahnbilder für den Gebirgskrieg, sowie für Flugabwehr entwickelt Bianchi l. c. S. 277 ff. eine Näherungslösung des ballistischen Problems, die für Abgangswinkel  $\varphi$  von  $+\ 90^\circ$  bis  $- 90^\circ$  gelten soll; eine Nachprüfung auf Grund von erschossenen Steilbahnen scheint geboten. — Ferner vgl. über die Herstellung von Luftschußtafeln K. Wolf, *Mitt. üb. Geg. d. Art. u. Gen.-Wes.* 1918, Heft 8, S. 1225 und Heft 9, S. 1393 (Bestimmung der Bahnelemente mit Hilfe von Kurven 2. Grades im Falle photogrammetrischer Festlegung mehrerer Bahnpunkte), und besonders auch Curti, *Schweizerische Ztschr. f. Art. u. Gen.* 1918, sowie Neuendorff, R.: *Beitrag zur Konstruktion von Luftschußtafeln*, *Art. Monatsch.* 1918, Nr. 139/140, S. 27 (Konstruktion von Kurven gleicher Aufsatzwinkel auf Grund von photogrammetrischen Aufnahmen oder von stückweisen Berechnungen der Flugbahnen).

Anhang.

**Ballistische Tabellen  
und Diagramme**

# 1. Tabellen für ballistische Berechnungen.

Tabelle 1. Werte der Fallbeschleunigung  $g$  für verschiedene geographische Breiten  $\alpha^\circ$  und verschiedene Meereshöhen  $h$  m,  
 $g = 9,80549 \cdot (1 - 0,00259 \cdot \cos 2\alpha) \cdot (1 - 0,0^{(6)} 313959 \cdot h)$ .

		→ Höhe über dem Meere in Metern								
		0	100	200	300	400	500	1000	2000	3000
← Geographische Breite in Grad	0	9,7801	9,7797	9,7794	9,7791	9,7788	9,7785	9,7769	9,7739	9,7710
	10	9,7817	9,7813	9,7810	9,7807	9,7804	9,7801	9,7788	9,7755	9,7724
	20	9,7860	9,7857	9,7854	9,7851	9,7848	9,7845	9,7830	9,7799	9,7768
	30	9,7928	9,7925	9,7922	9,7919	9,7916	9,7912	9,7897	9,7866	9,7836
	40	9,8011	9,8008	9,8005	9,8002	9,7999	9,7996	9,7981	9,7950	9,7919
	41	9,8020	9,8017	9,8013	9,8010	9,8007	9,8004	9,7989	9,7958	9,7927
	42	9,8028	9,8025	9,8022	9,8019	9,8016	9,8013	9,7998	9,7967	9,7936
	43	9,8037	9,8034	9,8031	9,8028	9,8025	9,8022	9,8004	9,7975	9,7945
	44	9,8046	9,8043	9,8040	9,8037	9,8034	9,8030	9,8016	9,7985	9,7955
	45	9,8055	9,8052	9,8048	9,8045	9,8042	9,8039	9,8024	9,7993	9,7962
	46	9,8064	9,8060	9,8057	9,8054	9,8051	9,8048	9,8033	9,8002	9,7971
	47	9,8072	9,8069	9,8066	9,8063	9,8060	9,8057	9,8041	9,8010	9,7980
	48	9,8081	9,8078	9,8075	9,8072	9,8069	9,8066	9,8051	9,8019	9,7989
	49	9,8090	9,8087	9,8084	9,8081	9,8078	9,8075	9,8059	9,8029	9,7998
	50	9,8099	9,8096	9,8093	9,8090	9,8087	9,8083	9,8068	9,8037	9,8007
	55	9,8142	9,8139	9,8136	9,8133	9,8129	9,8126	9,8111	9,8080	9,8049
	60	9,8182	9,8178	9,8175	9,8173	9,8170	9,8167	9,8151	9,8121	9,8090
	65	9,8218	9,8215	9,8212	9,8209	9,8206	9,8203	9,8187	9,8156	9,8126
	70	9,8250	9,8246	9,8243	9,8240	9,8237	9,8234	9,8219	9,8188	9,8157
	75	9,8275	9,8272	9,8269	9,8265	9,8262	9,8259	9,8244	9,8213	9,8182
	80	9,8293	9,8290	9,8287	9,8284	9,8281	9,8278	9,8263	9,8232	9,8201
	85	9,8305	9,8302	9,8299	9,8296	9,8293	9,8290	9,8274	9,8243	9,8212
	90	9,8310	9,8306	9,8303	9,8299	9,8296	9,8293	9,8277	9,8248	9,8215

Tabelle 2. Die natürlichen Werte des sinus, tangens und cosinus (von 10 zu 10 Minuten bis 20° und von 1 zu 1 Grad bis 90°).

(Ausführlichere Tabelle, von Minute zu Minute, vgl. Hertzner, Math. Tabellen usw., Berlin 1864 S. 82 und Schubert, Fünfstellige Tafeln und Gegendafeln, Teubner 1897.)

$\alpha$ Grad Min.	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cos \alpha$	$\alpha$ Grad Min.	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cos \alpha$	$\alpha$ Grad Min.	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cos \alpha$
0 00	0,00000	0,00000	1,0000	1 50	0,03199	0,03201	0,9995	3 30	0,06105	0,06116	0,9981
0 10	0,00291	0,00291	1,0000	2 00	0,03490	0,03492	0,9994	3 40	0,06395	0,06408	0,9980
0 20	0,00582	0,00582	1,0000	2 10	0,03781	0,03783	0,9993	3 50	0,06685	0,06700	0,9978
0 30	0,00873	0,00873	1,0000	2 20	0,04071	0,04075	0,9992	4 00	0,06976	0,06993	0,9976
0 40	0,01164	0,01164	0,9999	2 30	0,04362	0,04366	0,9990	4 10	0,07266	0,07285	0,9974
0 50	0,01454	0,01455	0,9999	2 40	0,04653	0,04658	0,9989	4 20	0,07556	0,07578	0,9971
1 00	0,01745	0,01746	0,9998	2 50	0,04943	0,04949	0,9988	4 30	0,07846	0,07870	0,9969
1 10	0,02036	0,02037	0,9998	3 00	0,05234	0,05241	0,9988	4 40	0,08136	0,08163	0,9967
1 20	0,02327	0,02328	0,9997	3 10	0,05524	0,05533	0,9985	4 50	0,08426	0,08456	0,9964
1 30	0,02618	0,02619	0,9997	3 20	0,05814	0,05824	0,9983	5 00	0,08716	0,08749	0,9962
1 40	0,02908	0,02910	0,9996								

Tabelle 2. Natürliche Werte des sinus, tangens, cosinus.

567

$\alpha$ Grad Min.	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cos \alpha$	$\alpha$ Grad Min.	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cos \alpha$	$\alpha$ Grad Min.	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cos \alpha$
5 10	0,09005	0,09042	0,9959	10 10	0,17651	0,17933	0,9843	15 10	0,26163	0,27107	0,9652
5 20	0,09295	0,09335	0,9957	10 20	0,17937	0,18233	0,9838	15 20	0,26443	0,27419	0,9644
5 30	0,09585	0,09629	0,9954	10 30	0,18224	0,18534	0,9833	15 30	0,26724	0,27732	0,9636
5 40	0,09874	0,09923	0,9951	10 40	0,18509	0,18835	0,9827	15 40	0,27004	0,28046	0,9628
5 50	0,10164	0,10216	0,9948	10 50	0,18795	0,19136	0,9822	15 50	0,27284	0,28360	0,9621
6 00	0,10453	0,10510	0,9945	11 00	0,19081	0,19438	0,9816	16 00	0,27564	0,28675	0,9613
6 10	0,10742	0,10805	0,9942	11 10	0,19366	0,19740	0,9811	16 10	0,27843	0,28990	0,9605
6 20	0,11031	0,11099	0,9939	11 20	0,19652	0,20042	0,9805	16 20	0,28123	0,29305	0,9596
6 30	0,11320	0,11394	0,9936	11 30	0,19937	0,20345	0,9799	16 30	0,28402	0,29621	0,9588
6 40	0,11609	0,11688	0,9932	11 40	0,20222	0,20648	0,9793	16 40	0,28680	0,29938	0,9580
6 50	0,11898	0,11983	0,9929	11 50	0,20507	0,20952	0,9787	16 50	0,28958	0,30255	0,9572
7 00	0,12187	0,12278	0,9925	12 00	0,20791	0,21256	0,9781	17 00	0,29237	0,30573	0,9563
7 10	0,12476	0,12574	0,9922	12 10	0,21076	0,21560	0,9775	17 10	0,29515	0,30891	0,9555
7 20	0,12764	0,12869	0,9918	12 20	0,21360	0,21864	0,9769	17 20	0,29793	0,31210	0,9546
7 30	0,13053	0,13165	0,9914	12 30	0,21644	0,22169	0,9763	17 30	0,30071	0,31530	0,9537
7 40	0,13341	0,13461	0,9911	12 40	0,21928	0,22475	0,9757	17 40	0,30348	0,31850	0,9528
7 50	0,13629	0,13758	0,9907	12 50	0,22212	0,22781	0,9750	17 50	0,30625	0,32171	0,9520
8 00	0,13917	0,14054	0,9903	13 00	0,22495	0,23087	0,9744	18 00	0,30902	0,32492	0,9511
8 10	0,14205	0,14351	0,9899	13 10	0,22778	0,23393	0,9737	18 10	0,31178	0,32814	0,9502
8 20	0,14493	0,14648	0,9894	13 20	0,23062	0,23700	0,9730	18 20	0,31454	0,33136	0,9492
8 30	0,14781	0,14945	0,9890	13 30	0,23345	0,24008	0,9724	18 30	0,31730	0,33460	0,9483
8 40	0,15069	0,15243	0,9886	13 40	0,23627	0,24316	0,9717	18 40	0,32006	0,33783	0,9474
8 50	0,15356	0,15540	0,9881	13 50	0,23910	0,24624	0,9710	18 50	0,32282	0,34108	0,9465
9 00	0,15643	0,15838	0,9877	14 00	0,24192	0,24933	0,9703	19 00	0,32557	0,34433	0,9455
9 10	0,15931	0,16137	0,9872	14 10	0,24474	0,25242	0,9696	19 10	0,32832	0,34758	0,9446
9 20	0,16218	0,16435	0,9868	14 20	0,24756	0,25552	0,9689	19 20	0,33106	0,35085	0,9436
9 30	0,16505	0,16734	0,9863	14 30	0,25038	0,25862	0,9681	19 30	0,33381	0,35412	0,9426
9 40	0,16792	0,17033	0,9858	14 40	0,25320	0,26172	0,9674	19 40	0,33655	0,35740	0,9417
9 50	0,17078	0,17333	0,9853	14 50	0,25601	0,26483	0,9667	19 50	0,33929	0,36068	0,9407
10 00	0,17365	0,17633	0,9848	15 00	0,25882	0,26795	0,9659	20 00	0,34202	0,36397	0,9397

$\alpha$ Grade	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\alpha$ Grade	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\alpha$ Grade	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\alpha$ Grade	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\alpha$ Grade
20	0,3420	0,3640	70	0,9397	4,8481	20	0,3420	0,3640	70	0,9397	4,8481	9
21	0,3584	0,3889	69	0,9272	4,5776	21	0,3584	0,3889	69	0,9272	4,5776	8
22	0,3746	0,4040	68	0,9144	4,3256	22	0,3746	0,4040	68	0,9144	4,3256	7
23	0,3907	0,4243	67	0,9013	4,0908	23	0,3907	0,4243	67	0,9013	4,0908	6
24	0,4067	0,4452	66	0,8880	3,8718	24	0,4067	0,4452	66	0,8880	3,8718	5
25	0,4226	0,4663	65	0,8745	3,6672	25	0,4226	0,4663	65	0,8745	3,6672	4
26	0,4384	0,4877	64	0,8608	3,4764	26	0,4384	0,4877	64	0,8608	3,4764	3
27	0,4540	0,5095	63	0,8471	3,2988	27	0,4540	0,5095	63	0,8471	3,2988	2
28	0,4695	0,5317	62	0,8333	3,1338	28	0,4695	0,5317	62	0,8333	3,1338	1
29	0,4848	0,5543	61	0,8194	2,9808	29	0,4848	0,5543	61	0,8194	2,9808	0
30	0,5000	0,5774	60	0,8054	2,8387	30	0,5000	0,5774	60	0,8054	2,8387	
31	0,5150	0,6009	59	0,7913	2,7070	31	0,5150	0,6009	59	0,7913	2,7070	
32	0,5299	0,6249	58	0,7771	2,5859	32	0,5299	0,6249	58	0,7771	2,5859	
33	0,5446	0,6494	57	0,7628	2,4747	33	0,5446	0,6494	57	0,7628	2,4747	
34	0,5592	0,6745	56	0,7484	2,3728	34	0,5592	0,6745	56	0,7484	2,3728	
35	0,5736	0,7002	55	0,7339	2,2804	35	0,5736	0,7002	55	0,7339	2,2804	
36	0,5878	0,7265	54	0,7193	2,1970	36	0,5878	0,7265	54	0,7193	2,1970	
37	0,6018	0,7536	53	0,7046	2,1221	37	0,6018	0,7536	53	0,7046	2,1221	
38	0,6157	0,7813	52	0,6898	2,0553	38	0,6157	0,7813	52	0,6898	2,0553	
39	0,6293	0,8098	51	0,6749	1,9962	39	0,6293	0,8098	51	0,6749	1,9962	
40	0,6428	0,8391	50	0,6600	1,9444	40	0,6428	0,8391	50	0,6600	1,9444	



Die Spannkraft E des Wasserdampfes (in mm Quecksilbersäule), gesättigt bei der Temperatur  $t^{\circ}$  Celsius. Vgl. Band I, § 15.

$t^{\circ}C$	E	$t^{\circ}C$	E	$t^{\circ}C$	E	$t^{\circ}C$	E	$t^{\circ}C$	E	$t^{\circ}C$	E
— 10	2,2	+ 1	4,9	11	9,8	21	18,5	31	33,4	41	57,9
— 9	2,3	+ 2	5,3	12	10,4	22	19,6	32	35,4	42	61,1
— 8	2,5	+ 3	5,7	13	11,1	23	20,9	33	37,4	43	64,4
— 7	2,7	+ 4	6,1	14	11,9	24	22,2	34	39,6	44	67,8
— 6	2,9	+ 5	6,5	15	12,8	25	23,5	35	41,9	45	71,4
— 5	3,2	+ 6	7,0	16	13,5	26	25,0	36	44,2	46	75,2
— 4	3,4	+ 7	7,5	17	14,4	27	26,5	37	46,7	47	79,1
— 3	3,7	+ 8	8,0	18	15,3	28	28,1	38	49,3	48	83,2
— 2	3,9	+ 9	8,5	19	16,3	29	29,7	39	52,1	49	87,5
— 1	4,2	+ 10	9,1	20	17,4	30	31,5	40	54,9	50	92,0
0	4,6										

Tabelle 4. Reduktion des Barometerstandes auf  $0^{\circ}$  wegen der Temperatur des Quecksilbers und des Maßstabes.

Man zieht von dem bei der Temperatur  $t^{\circ}$  Celsius abgelesenen Barometerstand die betr. Zahl der Tabelle ab, um auf  $0^{\circ}$  zu reduzieren. Ist der Maßstab von Glas statt von Messing, so hat man die Zahl der Tabelle um  $0,008 \cdot t$  (s. letzte Spalte) zu vergrößern. Vgl. Band I, Nr. 15.

Temperatur $t^{\circ}C$	→ Abgelesener Barometerstand in mm										0,008 · t
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	
1	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,02
4	0,44	0,45	0,45	0,46	0,47	0,47	0,48	0,49	0,49	0,50	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62	0,04
6	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,05
7	0,77	0,78	0,79	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,06
8	0,88	0,89	0,91	0,92	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,06
9	0,99	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	0,07
10	1,10	1,12	1,13	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	0,08
11	1,21	1,23	1,25	1,27	1,28	1,30	1,32	1,34	1,35	1,37	0,09
12	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	0,10
13	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	0,10
14	1,54	1,56	1,59	1,61	1,63	1,66	1,68	1,70	1,72	1,75	0,11
15	1,65	1,68	1,70	1,73	1,75	1,77	1,80	1,82	1,85	1,87	0,12
16	1,76	1,79	1,81	1,84	1,87	1,89	1,92	1,94	1,97	2,00	0,13
17	1,87	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,04	2,07	2,09	2,12	0,14
18	1,98	2,01	2,04	2,07	2,10	2,13	2,16	2,19	2,22	2,25	0,14
19	2,09	2,12	2,15	2,19	2,22	2,25	2,28	2,31	2,34	2,37	0,15
20	2,20	2,24	2,27	2,30	2,33	2,37	2,40	2,43	2,46	2,49	0,16
21	2,31	2,35	2,38	2,42	2,45	2,48	2,52	2,55	2,59	2,62	0,17
22	2,42	2,46	2,49	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	2,71	2,74	0,18
23	2,53	2,57	2,61	2,65	2,68	2,72	2,76	2,79	2,83	2,87	0,18
24	2,64	2,68	2,72	2,76	2,80	2,84	2,88	2,92	2,95	2,99	0,19
25	2,75	2,79	2,84	2,88	2,92	2,96	3,00	3,04	3,08	3,12	0,20
26	2,86	2,91	2,95	2,99	3,03	3,07	3,12	3,16	3,20	3,24	0,21
27	2,97	3,02	3,06	3,11	3,15	3,19	3,24	3,28	3,32	3,37	0,22
28	3,08	3,13	3,18	3,22	3,27	3,31	3,36	3,40	3,45	3,49	0,22
29	3,19	3,24	3,29	3,34	3,38	3,43	3,48	3,52	3,57	3,62	0,23
30	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,69	3,74	0,24

Tabelle 5a.

Werte der Exponentialfunktion  $e^z$ ; vgl. Bd. I, § 24 und 25.  $e = 2,718281828 \dots$ 

$z$	$e^z$	Diff.	$z$	$e^z$	Diff.	$z$	$e^z$	Diff.	$z$	$e^z$	Diff.	$z$	$e^z$	Diff.	$z$	$e^z$	Diff.
0,00	1,0000		0,51	1,6653	167	1,01	2,7456	276	1,51	4,5267	455	2,01	7,4633	750	2,51	12,3049	1231
0,01	1,0100	100	0,52	1,6820	169	1,02	2,7732	278	1,52	4,5722	459	2,02	7,5383	757	2,52	12,4280	1255
0,02	1,0202	102	0,53	1,6989	171	1,03	2,8010	282	1,53	4,6181	465	2,03	7,6140	766	2,53	12,5585	1268
0,03	1,0304	104	0,54	1,7160	173	1,04	2,8292	285	1,54	4,6646	469	2,04	7,6906	773	2,54	12,6797	1274
0,04	1,0408	105	0,55	1,7333	174	1,05	2,8577	287	1,55	4,7115	473	2,05	7,7679	780	2,55	12,8071	1287
0,05	1,0513	107	0,56	1,7507	176	1,06	2,8864	290	1,56	4,7588	478	2,06	7,8459	789	2,56	12,9358	1300
0,06	1,0618	107	0,57	1,7683	177	1,07	2,9154	293	1,57	4,8066	483	2,07	7,9248	798	2,57	13,0658	1313
0,07	1,0725	108	0,58	1,7860	180	1,08	2,9447	296	1,58	4,8549	488	2,08	8,0044	805	2,58	13,1971	1326
0,08	1,0833	109	0,59	1,8040	181	1,09	2,9743	299	1,59	4,9037	493	2,09	8,0849	813	2,59	13,3297	1340
0,09	1,0942	110	0,60	1,8221	183	1,10	3,0042	301	1,60	4,9520	498	2,10	8,1662	820	2,60	13,4637	1353
0,10	1,1052	111	0,61	1,8404	185	1,11	3,0343	305	1,61	5,0028	503	2,11	8,2482	829	2,61	13,5990	1367
0,11	1,1163	113	0,62	1,8589	187	1,12	3,0648	308	1,62	5,0531	507	2,12	8,3311	837	2,62	13,7357	1381
0,12	1,1275	113	0,63	1,8776	189	1,13	3,0956	312	1,63	5,1038	514	2,13	8,4148	846	2,63	13,8738	1394
0,13	1,1388	115	0,64	1,8965	190	1,14	3,1268	314	1,64	5,1552	518	2,14	8,4994	855	2,64	14,0132	1408
0,14	1,1503	115	0,65	1,9155	192	1,15	3,1582	317	1,65	5,2070	523	2,15	8,5849	863	2,65	14,1540	1423
0,15	1,1618	117	0,66	1,9347	195	1,16	3,1899	321	1,66	5,2593	528	2,16	8,6711	871	2,66	14,2963	1438
0,16	1,1735	118	0,67	1,9542	196	1,17	3,2220	324	1,67	5,3121	533	2,17	8,7582	880	2,67	14,4399	1453
0,17	1,1853	119	0,68	1,9738	198	1,18	3,2544	327	1,68	5,3654	539	2,18	8,8462	889	2,68	14,5851	1465
0,18	1,1972	121	0,69	1,9937	201	1,19	3,2871	330	1,69	5,4193	544	2,19	8,9352	898	2,69	14,7316	1491
0,19	1,2093	121	0,70	2,0138	202	1,20	3,3201	334	1,70	5,4737	550	2,20	9,0250	907	2,70	14,8797	1496
0,20	1,2214	123	0,71	2,0340	204	1,21	3,3535	337	1,71	5,5287	556	2,21	9,1157	916	2,71	15,0293	1510
0,21	1,2337	124	0,72	2,0544	207	1,22	3,3872	340	1,72	5,5843	561	2,22	9,2073	925	2,72	15,1805	1526
0,22	1,2461	125	0,73	2,0751	208	1,23	3,4212	344	1,73	5,6404	567	2,23	9,2998	935	2,73	15,3329	1541
0,23	1,2586	126	0,74	2,0959	211	1,24	3,4556	347	1,74	5,6971	573	2,24	9,3933	944	2,74	15,4870	1556
0,24	1,2712	128	0,75	2,1170	213	1,25	3,4903	351	1,75	5,7544	579	2,25	9,4877	953	2,75	15,6426	1572
0,25	1,2840	129	0,76	2,1383	215	1,26	3,5254	354	1,76	5,8123	585	2,26	9,5830	963	2,76	15,7998	1588
0,26	1,2969	130	0,77	2,1598	217	1,27	3,5608	358	1,77	5,8708	590	2,27	9,6793	973	2,77	15,9586	1604
0,27	1,3099	133	0,78	2,1815	219	1,28	3,5966	363	1,78	5,9298	596	2,28	9,7766	983	2,78	16,1190	1620
0,28	1,3231	135	0,79	2,2034	221	1,29	3,6328	365	1,79	5,9894	602	2,29	9,8749	993	2,79	16,2810	1636
0,29	1,3364	135	0,80	2,2255	224	1,30	3,6693	369	1,80	6,0496	608	2,30	9,9742	1008	2,80	16,4446	1653
0,30	1,3499	135	0,81	2,2479	226	1,31	3,7062	372	1,81	6,1104	614	2,31	10,0744	1018	2,81	16,6099	1670
0,31	1,3634	137	0,82	2,2705	228	1,32	3,7434	376	1,82	6,1718	620	2,32	10,1756	1028	2,82	16,7769	1686
0,32	1,3771	139	0,83	2,2933	231	1,33	3,7810	380	1,83	6,2338	627	2,33	10,2779	1038	2,83	16,9455	1703
0,33	1,3910	139	0,84	2,3164	233	1,34	3,8190	384	1,84	6,2965	633	2,34	10,3812	1044	2,84	17,1158	1720
0,34	1,4049	142	0,85	2,3396	235	1,35	3,8574	388	1,85	6,3598	639	2,35	10,4856	1053	2,85	17,2878	1737
0,35	1,4191	142	0,86	2,3631	238	1,36	3,8962	391	1,86	6,4237	645	2,36	10,5909	1064	2,86	17,4615	1755
0,36	1,4333	144	0,87	2,3869	240	1,37	3,9353	396	1,87	6,4882	653	2,37	10,6973	1075	2,87	17,6370	1773
0,37	1,4477	146	0,88	2,4109	243	1,38	3,9749	399	1,88	6,5535	658	2,38	10,8048	1086	2,88	17,8143	1790
0,38	1,4623	147	0,89	2,4351	245	1,39	4,0148	404	1,89	6,6193	666	2,39	10,9134	1098	2,89	17,9938	1808
0,39	1,4770	148	0,90	2,4596	247	1,40	4,0552	407	1,90	6,6859	671	2,40	11,0232	1109	2,90	18,1741	1827
0,40	1,4918	150	0,91	2,4843	250	1,41	4,0959	413	1,91	6,7530	679	2,41	11,1341	1118	2,91	18,3568	1845
0,41	1,5068	151	0,92	2,5093	252	1,42	4,1371	416	1,92	6,8209	686	2,42	11,2459	1130	2,92	18,5413	1863
0,42	1,5219	153	0,93	2,5345	255	1,43	4,1787	420	1,93	6,8895	692	2,43	11,3589	1141	2,93	18,7276	1882
0,43	1,5372	155	0,94	2,5600	257	1,44	4,2207	424	1,94	6,9587	700	2,44	11,4730	1153	2,94	18,9158	1902
0,44	1,5527	156	0,95	2,5857	260	1,45	4,2631	428	1,95	7,0287	706	2,45	11,5883	1165	2,95	19,1060	1920
0,45	1,5683	158	0,96	2,6117	263	1,46	4,3059	433	1,96	7,0993	713	2,46	11,7048	1176	2,96	19,2980	1939
0,46	1,5841	159	0,97	2,6379	265	1,47	4,3492	437	1,97	7,1706	721	2,47	11,8224	1189	2,97	19,4919	1959
0,47	1,6000	161	0,98	2,6644	268	1,48	4,3929	443	1,98	7,2427	728	2,48	11,9413	1200	2,98	19,6878	1979
0,48	1,6161	163	0,99	2,6912	271	1,49	4,4371	446	1,99	7,3155	736	2,49	12,0613	1212	2,99	19,8857	1998
0,49	1,6323	164	1,00	2,7183	273	1,50	4,4817	450	2,00	7,3891	742	2,50	12,1825	1224	3,00	20,0855	

Werte der Funktion  $f(z) = 2 \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^3}$ ; vgl. Band I, § 24 und 25.

z	f(z)	Diff.	z	f(z)	Diff.	z	f(z)	Diff.	z	f(z)	Diff.	z	f(z)	Diff.	z	f(z)	Diff.
0,00	1,0000																
0,01	1,0033	33	0,41	1,1519		0,81	1,3348	51	1,21	1,5620	63	1,61	1,8462	80	2,01	2,2045	101
0,02	1,0067	34	0,42	1,1560	41	0,82	1,3399	52	1,22	1,5683	64	1,62	1,8542	80	2,02	2,2146	101
0,03	1,0101	34	0,43	1,1602	42	0,83	1,3451	51	1,23	1,5747	64	1,63	1,8622	81	2,03	2,2247	102
0,04	1,0135	34	0,44	1,1643	41	0,84	1,3502	52	1,24	1,5811	65	1,64	1,8703	81	2,04	2,2349	102
0,05	1,0169	34	0,45	1,1685	42	0,85	1,3554	52	1,25	1,5876	65	1,65	1,8784	82	2,05	2,2452	103
																	108
0,06	1,0203	35	0,46	1,1727	43	0,86	1,3606	52	1,26	1,5941	66	1,66	1,8866	82	2,06	2,2555	104
0,07	1,0238	34	0,47	1,1770	43	0,87	1,3658	53	1,27	1,6007	66	1,67	1,8948	83	2,07	2,2659	105
0,08	1,0272	35	0,48	1,1812	43	0,88	1,3711	53	1,28	1,6073	66	1,68	1,9031	83	2,08	2,2764	106
0,09	1,0307	35	0,49	1,1855	43	0,89	1,3764	53	1,29	1,6139	66	1,69	1,9114	83	2,09	2,2869	106
0,10	1,0342	35	0,50	1,1898	43	0,90	1,3817	54	1,30	1,6205	67	1,70	1,9197	84	2,10	2,2975	106
0,11	1,0377	36	0,51	1,1941	44	0,91	1,3871	54	1,31	1,6272	67	1,71	1,9281	84	2,11	2,3081	107
0,12	1,0413	36	0,52	1,1985	43	0,92	1,3925	54	1,32	1,6339	67	1,72	1,9365	85	2,12	2,3188	108
0,13	1,0448	36	0,53	1,2028	43	0,93	1,3979	54	1,33	1,6406	67	1,73	1,9450	85	2,13	2,3296	108
0,14	1,0484	36	0,54	1,2072	44	0,94	1,4033	55	1,34	1,6474	68	1,74	1,9535	86	2,14	2,3405	109
0,15	1,0520	36	0,55	1,2116	44	0,95	1,4088	55	1,35	1,6542	69	1,75	1,9621	87	2,15	2,3514	110
0,16	1,0556	37	0,56	1,2160	45	0,96	1,4143	55	1,36	1,6611	69	1,76	1,9708	87	2,16	2,3624	110
0,17	1,0592	37	0,57	1,2205	45	0,97	1,4198	55	1,37	1,6680	69	1,77	1,9795	87	2,17	2,3734	111
0,18	1,0629	36	0,58	1,2250	45	0,98	1,4253	56	1,38	1,6749	70	1,78	1,9882	88	2,18	2,3845	112
0,19	1,0665	37	0,59	1,2295	45	0,99	1,4309	56	1,39	1,6819	70	1,79	1,9970	89	2,19	2,3957	113
0,20	1,0702	37	0,60	1,2340	46	1,00	1,4365	56	1,40	1,6889	70	1,80	2,0059	89	2,20	2,4070	113
0,21	1,0739	37	0,61	1,2386	45	1,01	1,4421	57	1,41	1,6959	72	1,81	2,0148	90	2,21	2,4183	114
0,22	1,0776	37	0,62	1,2431	46	1,02	1,4478	57	1,42	1,7031	72	1,82	2,0238	90	2,22	2,4297	115
0,23	1,0813	37	0,63	1,2477	47	1,03	1,4535	57	1,43	1,7103	72	1,83	2,0328	91	2,23	2,4412	115
0,24	1,0850	37	0,64	1,2524	47	1,04	1,4592	58	1,44	1,7175	72	1,84	2,0419	91	2,24	2,4527	116
0,25	1,0888	38	0,65	1,2570	47	1,05	1,4650	58	1,45	1,7247	73	1,85	2,0510	92	2,25	2,4643	117
0,26	1,0926	38	0,66	1,2617	47	1,06	1,4708	59	1,46	1,7320	73	1,86	2,0602	92	2,26	2,4760	118
0,27	1,0964	38	0,67	1,2664	47	1,07	1,4767	59	1,47	1,7393	74	1,87	2,0695	93	2,27	2,4878	118
0,28	1,1002	38	0,68	1,2711	47	1,08	1,4826	59	1,48	1,7467	74	1,88	2,0788	93	2,28	2,4996	119
0,29	1,1040	39	0,69	1,2758	48	1,09	1,4885	59	1,49	1,7541	74	1,89	2,0881	94	2,29	2,5115	119
0,30	1,1079	39	0,70	1,2806	48	1,10	1,4944	60	1,50	1,7615	75	1,90	2,0975	95	2,30	2,5233	120
0,31	1,1118	39	0,71	1,2854	48	1,11	1,5004	60	1,51	1,7690	75	1,91	2,1070	95	2,31	2,5353	121
0,32	1,1157	40	0,72	1,2902	48	1,12	1,5064	60	1,52	1,7765	76	1,92	2,1165	96	2,32	2,5474	121
0,33	1,1197	39	0,73	1,2950	49	1,13	1,5124	61	1,53	1,7841	76	1,93	2,1260	96	2,33	2,5595	122
0,34	1,1236	40	0,74	1,2999	49	1,14	1,5185	61	1,54	1,7917	77	1,94	2,1356	97	2,34	2,5718	123
0,35	1,1276	40	0,75	1,3048	49	1,15	1,5246	62	1,55	1,7993	77	1,95	2,1453	97	2,35	2,5841	124
0,36	1,1316	40	0,76	1,3097	50	1,16	1,5308	62	1,56	1,8070	77	1,96	2,1550	98	2,36	2,5965	125
0,37	1,1356	41	0,77	1,3147	50	1,17	1,5370	62	1,57	1,8147	78	1,97	2,1648	98	2,37	2,6090	126
0,38	1,1397	41	0,78	1,3197	50	1,18	1,5432	63	1,58	1,8225	78	1,98	2,1746	99	2,38	2,6216	126
0,39	1,1437	41	0,79	1,3247	50	1,19	1,5494	63	1,59	1,8303	79	1,99	2,1845	100	2,39	2,6342	127
0,40	1,1478	41	0,80	1,3297	51	1,20	1,5557	63	1,60	1,8382	80	2,00	2,1945	100	2,40	2,6469	127

Werte der Funktion  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ ; vgl. Band I, § 24 und 25.

$z$	$f(z)$	Diff.	$z$	$f(z)$	Diff.	$z$	$f(z)$	Diff.	$z$	$f(z)$	Diff.	$z$	$f(z)$	Diff.	$z$	$f(z)$	Diff.
0,00	1,0000																
0,01	1,0050	50	0,41	1,2361	67	0,81	1,5406	88	1,21	1,9450	117	1,61	2,4862	157	2,01	3,2156	212
0,02	1,0101	51	0,42	1,2428	68	0,82	1,5494	88	1,22	1,9567	118	1,62	2,5019	158	2,02	3,2368	214
0,03	1,0152	51	0,43	1,2494	68	0,83	1,5582	89	1,23	1,9685	118	1,63	2,5177	159	2,03	3,2582	215
0,04	1,0203	51	0,44	1,2562	67	0,84	1,5671	90	1,24	1,9803	120	1,64	2,5336	161	2,04	3,2797	217
0,05	1,0254	52	0,45	1,2629	68	0,85	1,5761	90	1,25	1,9923	120	1,65	2,5497	161	2,05	3,3014	219
0,06	1,0306	52	0,46	1,2697	69	0,86	1,5851	90	1,26	2,0043	121	1,66	2,5658	163	2,06	3,3233	220
0,07	1,0358	53	0,47	1,2766	69	0,87	1,5941	92	1,27	2,0164	122	1,67	2,5821	164	2,07	3,3453	222
0,08	1,0411	53	0,48	1,2835	69	0,88	1,6033	92	1,28	2,0286	123	1,68	2,5985	166	2,08	3,3675	224
0,09	1,0464	53	0,49	1,2904	70	0,89	1,6125	93	1,29	2,0409	124	1,69	2,6151	166	2,09	3,3899	226
0,10	1,0517	54	0,50	1,2974	71	0,90	1,6218	93	1,30	2,0533	125	1,70	2,6317	168	2,10	3,4125	227
0,11	1,0571	54	0,51	1,3045	71	0,91	1,6311	94	1,31	2,0658	125	1,71	2,6485	169	2,11	3,4352	229
0,12	1,0625	54	0,52	1,3116	71	0,92	1,6405	95	1,32	2,0783	127	1,72	2,6654	170	2,12	3,4581	230
0,13	1,0679	55	0,53	1,3187	72	0,93	1,6500	96	1,33	2,0910	128	1,73	2,6824	172	2,13	3,4811	233
0,14	1,0734	55	0,54	1,3259	73	0,94	1,6596	96	1,34	2,1038	128	1,74	2,6996	173	2,14	3,5044	234
0,15	1,0789	55	0,55	1,3332	73	0,95	1,6692	97	1,35	2,1166	130	1,75	2,7169	174	2,15	3,5278	236
0,16	1,0844	56	0,56	1,3405	73	0,96	1,6789	97	1,36	2,1296	130	1,76	2,7343	176	2,16	3,5514	238
0,17	1,0900	56	0,57	1,3478	74	0,97	1,6886	98	1,37	2,1426	131	1,77	2,7519	177	2,17	3,5752	240
0,18	1,0956	57	0,58	1,3552	75	0,98	1,6984	99	1,38	2,1557	132	1,78	2,7696	178	2,18	3,5992	242
0,19	1,1013	57	0,59	1,3627	75	0,99	1,7083	100	1,39	2,1689	134	1,79	2,7874	180	2,19	3,6234	243
0,20	1,1070	57	0,60	1,3702	76	1,00	1,7183	100	1,40	2,1823	134	1,80	2,8054	180	2,20	3,6477	246
0,21	1,1127	58	0,61	1,3778	76	1,01	1,7283	101	1,41	2,1957	135	1,81	2,8234	183	2,21	3,6723	247
0,22	1,1185	58	0,62	1,3854	76	1,02	1,7384	102	1,42	2,2092	137	1,82	2,8417	184	2,22	3,6970	249
0,23	1,1243	58	0,63	1,3930	77	1,03	1,7486	103	1,43	2,2229	137	1,83	2,8601	185	2,23	3,7219	251
0,24	1,1302	59	0,64	1,4007	78	1,04	1,7589	103	1,44	2,2366	138	1,84	2,8786	186	2,24	3,7470	253
0,25	1,1361	59	0,65	1,4085	78	1,05	1,7692	104	1,45	2,2504	139	1,85	2,8972	188	2,25	3,7723	255
0,26	1,1420	60	0,66	1,4163	79	1,06	1,7796	105	1,46	2,2643	141	1,86	2,9160	189	2,26	3,7978	257
0,27	1,1480	60	0,67	1,4242	80	1,07	1,7901	105	1,47	2,2784	141	1,87	2,9349	191	2,27	3,8235	259
0,28	1,1540	61	0,68	1,4322	80	1,08	1,8006	107	1,48	2,2925	143	1,88	2,9540	192	2,28	3,8494	261
0,29	1,1601	61	0,69	1,4402	80	1,09	1,8113	107	1,49	2,3068	143	1,89	2,9732	194	2,29	3,8755	263
0,30	1,1662	61	0,70	1,4482	81	1,10	1,8220	108	1,50	2,3211	145	1,90	2,9926	195	2,30	3,9018	265
0,31	1,1723	62	0,71	1,4563	82	1,11	1,8328	108	1,51	2,3356	145	1,91	3,0121	196	2,31	3,9283	267
0,32	1,1785	62	0,72	1,4645	82	1,12	1,8436	110	1,52	2,3501	147	1,92	3,0317	198	2,32	3,9550	269
0,33	1,1847	63	0,73	1,4727	83	1,13	1,8546	110	1,53	2,3648	148	1,93	3,0515	200	2,33	3,9819	273
0,34	1,1910	63	0,74	1,4810	83	1,14	1,8656	111	1,54	2,3796	149	1,94	3,0715	201	2,34	4,0091	275
0,35	1,1973	64	0,75	1,4893	84	1,15	1,8767	112	1,55	2,3945	150	1,95	3,0916	203	2,35	4,0364	276
0,36	1,2037	64	0,76	1,4977	85	1,16	1,8879	113	1,56	2,4095	151	1,96	3,1119	204	2,36	4,0639	278
0,37	1,2101	64	0,77	1,5062	85	1,17	1,8991	114	1,57	2,4246	152	1,97	3,1323	206	2,37	4,0917	280
0,38	1,2165	65	0,78	1,5147	86	1,18	1,9105	114	1,58	2,4398	153	1,98	3,1529	207	2,38	4,1197	282
0,39	1,2230	66	0,79	1,5233	86	1,19	1,9219	115	1,59	2,4552	155	1,99	3,1736	209	2,39	4,1479	284
0,40	1,2296	65	0,80	1,5319	87	1,20	1,9334	116	1,60	2,4707	155	2,00	3,1945	211	2,40	4,1763	

<i>v</i>	<i>f</i>	Diff.	10° K	<i>v</i>	<i>f</i>	Diff.	10° K	<i>v</i>	<i>f</i>	Diff.	10° K	<i>v</i>	<i>f</i>	Diff.	10° K	<i>v</i>	<i>f</i>	Diff.	10° K
0	0.00000		120																
1	0.00012	12	120	41	0.2027		121	81	0.793		121	121	1.774		121	161	3.155		122
2	0.00048	36	120	42	0.2127	100	121	82	0.813	20	121	122	1.804	30	121	162	3.195	40	122
3	0.00108	60	120	43	0.2229	108	121	83	0.833	20	121	123	1.833	30	121	163	3.235	40	122
4	0.00192	84	120	44	0.2333	104	121	84	0.854	21	121	124	1.863	31	121	164	3.275	40	122
5	0.00300	108	120	45	0.2441	108	121	85	0.874	20	121	125	1.894	31	121	165	3.316	41	122
		132				110				21				31				41	
6	0.00432		120	46	0.2551		121	86	0.895		121	126	1.925		121	166	3.357		122
7	0.00588	156	120	47	0.2663	112	121	87	0.916	21	121	127	1.956	31	121	167	3.399	42	122
8	0.00768	180	120	48	0.2777	114	121	88	0.937	21	121	128	1.987	32	121	168	3.440	41	122
9	0.00972	304	120	49	0.2894	117	121	89	0.958	21	121	129	2.019	31	121	169	3.482	42	122
10	0.0120	28	120	50	0.3014	120	121	90	0.979	21	121	130	2.050	31	121	170	3.524	42	122
		25				12				22				32				42	
11	0.0145		120	51	0.313		121	91	1.001		121	131	2.082		121	171	3.567		122
12	0.0173	28	120	52	0.325	12	121	92	1.024	23	121	132	2.114	32	121	172	3.610	43	122
13	0.0203	30	120	53	0.338	12	121	93	1.047	23	121	133	2.146	32	121	173	3.653	43	122
14	0.0235	32	120	54	0.351	13	121	94	1.070	23	121	134	2.179	33	121	174	3.696	43	122
15	0.0270	36	120	55	0.365	14	121	95	1.092	22	121	135	2.211	33	121	175	3.739	43	122
		38				15				23				33				43	
16	0.0308		120	56	0.378		121	96	1.115		121	136	2.244		121	176	3.782		122
17	0.0348	40	120	57	0.391	13	121	97	1.138	23	121	137	2.278	34	121	177	3.826	44	122
18	0.0390	42	120	58	0.405	14	121	98	1.162	24	121	138	2.312	33	121	178	3.870	44	122
19	0.0435	45	120	59	0.419	14	121	99	1.186	24	121	139	2.345	33	121	179	3.914	44	122
20	0.0482	47	120	60	0.434	15	121	100	1.210	24	121	140	2.379	34	121	180	3.959	45	122
		49				16				24				34				45	
21	0.0531		120	61	0.449		121	101	1.234		121	141	2.413		121	181	4.004		122
22	0.0582	51	120	62	0.464	15	121	102	1.258	24	121	142	2.448	35	121	182	4.050	46	122
23	0.0637	56	120	63	0.479	15	121	103	1.283	25	121	143	2.483	35	121	183	4.097	47	122
24	0.0694	57	120	64	0.494	15	121	104	1.308	25	121	144	2.518	35	121	184	4.143	47	122
25	0.0753	59	120	65	0.510	16	121	105	1.334	26	121	145	2.553	36	121	185	4.189	46	122
		61				16				25				35				46	
26	0.0814		120	66	0.526		121	106	1.359		121	146	2.589		121	186	4.236		122
27	0.0878	64	120	67	0.542	16	121	107	1.385	26	121	147	2.626	37	121	187	4.283	47	122
28	0.0944	66	120	68	0.558	16	121	108	1.411	26	121	148	2.662	36	121	188	4.331	48	122
29	0.1013	69	121	69	0.574	16	121	109	1.438	27	121	149	2.698	36	121	189	4.378	47	122
30	0.1085	72	121	70	0.591	17	121	110	1.465	27	121	150	2.735	37	121	190	4.426	48	122
		75				17				27				37				48	
31	0.1158		121	71	0.608		121	111	1.492		121	151	2.772		121	191	4.474		123
32	0.1234	76	121	72	0.625	17	121	112	1.519	27	121	152	2.809	37	121	192	4.523	49	123
33	0.1312	78	121	73	0.643	18	121	113	1.547	28	121	153	2.846	37	121	193	4.571	48	123
34	0.1393	81	121	74	0.661	18	121	114	1.575	28	121	154	2.883	37	121	194	4.620	49	123
35	0.1476	83	121	75	0.680	19	121	115	1.603	28	121	155	2.921	38	122	195	4.669	49	123
		86				18				28				38				50	
36	0.1561		121	76	0.698		121	116	1.631		121	156	2.959		122	196	4.719		123
37	0.1649	91	121	77	0.716	18	121	117	1.659	29	121	157	2.998	39	122	197	4.769	50	123
38	0.1740	92	121	78	0.735	19	121	118	1.687	29	121	158	3.037	39	122	198	4.819	50	123
39	0.1833	95	121	79	0.754	19	121	119	1.716	29	121	159	3.076	39	122	199	4.870	51	123
40	0.1929	96	121	80	0.773	19	121	120	1.745	29	121	160	3.116	40	122	200	4.920	51	123
		98				20				30				40				51	

Tabelle 6. Einheitliches Luftwiderstandsgesetz von Siacci.

$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$
201	4,971		123	251	8,04		128	301	15,76		174	351	33,81		274	401	51,88		323
202	5,022	51	123	252	8,12	8	128	302	16,07	31	176	352	34,18	37	276	402	52,24	36	323
203	5,073	51	123	253	8,20	8	128	303	16,39	32	178	353	34,55	37	277	403	52,59	36	324
204	5,125	52	123	254	8,28	8	128	304	16,71	33	181	354	34,92	37	288	404	52,95	36	324
205	5,177	53	123	255	8,36	8	128	305	17,03	33	183	355	35,29	36	280	405	53,30	36	325
206	5,330		123	256	8,44		129	306	17,36		185	356	35,65		281	406	53,66		325
207	5,284	54	123	257	8,53	9	129	307	17,70	34	188	357	36,02	37	282	407	54,01	35	326
208	5,338	54	123	258	8,61	8	129	308	18,04	34	190	358	36,38	36	284	408	54,37	35	326
209	5,392	55	123	259	8,69	9	129	309	18,38	34	192	359	36,75	37	285	409	54,72	35	327
210	5,447	55	123	260	8,78	8	130	310	18,73	35	195	360	37,12	37	286	410	55,08	35	328
211	5,501	55	123	261	8,86	9	130	311	19,08	35	197	361	37,49	36	288	411	55,43	35	328
212	5,556	55	124	262	8,95	9	130	312	19,43	35	199	362	37,85	37	289	412	55,79	35	328
213	5,611	56	124	263	9,04	9	131	313	19,78	35	202	363	38,22	37	290	413	56,14	35	329
214	5,666	56	124	264	9,13	10	131	314	20,13	36	204	364	38,59	38	291	414	56,50	35	329
215	5,722	56	124	265	9,23	10	131	315	20,49	36	206	365	38,95	37	292	415	56,85	35	330
216	5,778	57	124	266	9,33	10	132	316	20,85	36	209	366	39,32	36	293	416	57,20	35	331
217	5,835	57	124	267	9,43	10	132	317	21,21	37	211	367	39,68	36	295	417	57,56	35	331
218	5,892	58	124	268	9,53	10	133	318	21,58	37	213	368	40,04	36	296	418	57,91	35	331
219	5,950	58	124	269	9,63	10	133	319	21,95	37	215	369	40,40	36	297	419	58,26	35	332
220	6,009	58	124	270	9,73	11	133	320	22,32	38	218	370	40,77	36	298	420	58,62	35	332
221	6,067	59	124	271	9,84	11	134	321	22,68	38	220	371	41,13	37	299	421	58,97	35	333
222	6,126	59	124	272	9,95	11	135	322	23,05	38	222	372	41,50	36	300	422	59,32	35	333
223	6,185	59	124	273	10,06	12	135	323	23,41	38	224	373	41,86	36	301	423	59,68	35	333
224	6,244	59	124	274	10,18	12	136	324	23,77	37	226	374	42,22	37	302	424	60,03	35	334
225	6,303	60	124	275	10,30	13	136	325	24,14	37	228	375	42,59	37	303	425	60,38	35	334
226	6,363	61	125	276	10,42	13	137	326	24,51	37	230	376	42,95	36	304	426	60,74	35	335
227	6,424	62	125	277	10,55	13	137	327	24,88	37	233	377	43,31	36	305	427	61,09	35	335
228	6,486	62	125	278	10,68	14	138	328	25,25	37	235	378	43,67	36	306	428	61,44	35	335
229	6,549	63	125	279	10,82	15	139	329	25,62	38	237	379	44,03	36	306	429	61,80	35	336
230	6,612	63	125	280	10,97	15	140	330	26,00	37	239	380	44,39	36	307	430	62,15	35	336
231	6,675	64	125	281	11,12	16	141	331	26,37	37	241	381	44,75	36	308	431	62,51	35	336
232	6,739	65	125	282	11,28	16	142	332	26,74	38	243	382	45,11	36	309	432	62,86	35	337
233	6,804	65	125	283	11,44	17	143	333	27,12	37	244	383	45,47	36	310	433	63,21	35	337
234	6,869	66	125	284	11,61	17	144	334	27,49	37	246	384	45,83	36	311	434	63,57	35	337
235	6,935	66	126	285	11,78	18	145	335	27,86	37	248	385	46,18	36	312	435	63,92	35	338
236	7,000	67	126	286	11,96	19	146	336	28,23	37	250	386	46,54	36	312	436	64,27	35	338
237	7,066	68	126	287	12,15	19	148	337	28,60	38	252	387	46,90	36	313	437	64,63	35	338
238	7,131	68	126	288	12,35	20	149	338	28,98	38	253	388	47,26	36	314	438	64,98	35	339
239	7,197	68	126	289	12,57	21	151	339	29,35	37	255	389	47,62	36	315	439	65,34	35	339
240	7,263	69	126	290	12,80	22	152	340	29,72	38	257	390	47,97	35	315	440	65,69	35	339
241	7,330	69	126	291	13,02	23	154	341	30,10	37	259	391	48,33	36	316	441	66,05	35	340
242	7,397	70	126	292	13,25	24	155	342	30,47	37	260	392	48,68	36	317	442	66,40	35	340
243	7,465	70	127	293	13,49	25	157	343	30,84	37	262	393	49,04	36	318	443	66,76	35	340
244	7,533	71	127	294	13,74	26	159	344	31,21	37	264	394	49,40	36	318	444	67,11	35	340
245	7,601	71	127	295	14,00	27	161	345	31,58	37	265	395	49,75	36	319	445	67,47	35	341
246	7,670	72	127	296	14,27	28	163	346	31,95	37	267	396	50,11	35	320	446	67,82	35	341
247	7,741	72	127	297	14,55	29	165	347	32,32	38	268	397	50,46	35	320	447	68,18	35	341
248	7,814	73	127	298	14,84	30	167	348	32,70	37	270	398	50,82	35	321	448	68,54	35	341
249	7,888	74	127	299	15,14	31	169	349	33,07	37	271	399	51,18	35	322	449	68,89	35	342
250	7,964	75	128	300	15,45	31	172	350	33,44	37	273	400	51,53	35	323	450	69,24	35	342

$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$
451	69,59		342	501	87,45	36	348	551	105,46	36	347	601	123,60	36	342	651	141,78	36	335
452	69,95	36	342	502	87,81	36	348	552	105,82	36	347	602	123,96	36	342	652	142,14	36	334
453	70,30	36	343	503	88,17	36	348	553	106,18	36	347	603	124,33	36	342	653	142,50	36	334
454	70,66	36	343	504	88,53	36	348	554	106,55	36	347	604	124,69	36	342	654	142,87	36	334
455	71,01	36	343	505	88,89	36	348	555	106,91	36	347	605	125,05	36	342	655	143,23	36	334
456	71,37	36	343	506	89,25	36	348	556	107,27	36	347	606	125,42	36	341	656	143,60	36	334
457	71,72	36	343	507	89,61	36	348	557	107,63	36	347	607	125,78	36	341	657	143,96	36	333
458	72,08	36	344	508	89,97	36	348	558	107,99	36	347	608	126,14	36	341	658	144,32	36	333
459	72,43	36	344	509	90,33	36	348	559	108,36	36	347	609	126,50	36	341	659	144,69	36	333
460	72,79	36	344	510	90,68	36	348	560	108,72	36	347	610	126,87	36	341	660	145,05	36	333
461	73,14	36	344	511	91,04	36	349	561	109,08	36	347	611	127,23	36	341	661	145,41	36	333
462	73,50	36	344	512	91,40	36	349	562	109,45	36	346	612	127,59	36	341	662	145,78	36	333
463	73,85	36	345	513	91,76	36	349	563	109,81	36	346	613	127,96	36	340	663	146,14	36	332
464	74,21	36	345	514	92,12	36	349	564	110,17	36	346	614	128,32	36	340	664	146,50	36	332
465	74,57	36	345	515	92,48	36	349	565	110,53	36	346	615	128,69	36	340	665	146,87	36	332
466	74,92	36	345	516	92,84	36	349	566	110,90	36	346	616	129,05	36	340	666	147,23	36	332
467	75,28	36	345	517	93,20	36	349	567	111,26	36	346	617	129,42	36	340	667	147,60	36	332
468	75,64	36	346	518	93,56	36	349	568	111,62	36	346	618	129,78	36	340	668	147,97	36	332
469	76,00	36	346	519	93,92	36	349	569	111,99	36	346	619	130,14	36	340	669	148,33	36	331
470	76,35	36	346	520	94,28	36	349	570	112,35	36	346	620	130,50	36	339	670	148,69	36	331
471	76,71	36	346	521	94,64	36	349	571	112,71	36	346	621	130,86	36	339	671	149,06	36	331
472	77,06	36	346	522	95,00	36	349	572	113,07	36	346	622	131,23	36	339	672	149,42	36	331
473	77,41	36	346	523	95,36	36	349	573	113,44	36	345	623	131,59	36	339	673	149,78	36	331
474	77,77	36	347	524	95,72	36	349	574	113,80	36	345	624	131,95	36	339	674	150,15	36	330
475	78,12	36	347	525	96,08	36	349	575	114,16	36	345	625	132,32	36	339	675	150,51	36	330
476	78,48	36	347	526	96,44	36	348	576	114,53	36	345	626	132,68	36	338	676	150,88	36	330
477	78,84	36	347	527	96,80	36	348	577	114,89	36	345	627	133,04	36	338	677	151,24	36	330
478	79,20	36	347	528	97,16	36	348	578	115,25	36	345	628	133,40	36	338	678	151,60	36	330
479	79,56	36	347	529	97,52	36	348	579	115,62	36	345	629	133,77	36	338	679	151,97	36	330
480	79,92	36	347	530	97,88	36	348	580	115,98	36	345	630	134,13	36	338	680	152,33	36	329
481	80,28	36	347	531	98,24	36	348	581	116,34	36	345	631	134,49	36	338	681	152,70	36	329
482	80,64	36	347	532	98,60	36	348	582	116,70	36	345	632	134,86	36	338	682	153,06	36	329
483	81,00	36	347	533	98,96	36	348	583	117,07	36	344	633	135,22	36	337	683	153,42	36	329
484	81,35	36	347	534	99,32	36	348	584	117,43	36	344	634	135,59	36	337	684	153,79	36	329
485	81,71	36	348	535	99,68	36	348	585	117,79	36	344	635	135,95	36	337	685	154,15	36	329
486	82,07	36	348	536	100,04	36	348	586	118,16	36	344	636	136,31	36	337	686	154,51	36	328
487	82,43	36	348	537	100,40	36	348	587	118,52	36	344	637	136,68	36	337	687	154,88	36	328
488	82,79	36	348	538	100,76	36	348	588	118,88	36	344	638	137,04	36	337	688	155,24	36	328
489	83,15	36	348	539	101,12	36	348	589	119,25	36	344	639	137,40	36	336	689	155,60	36	328
490	83,50	36	348	540	101,49	36	348	590	119,61	36	344	640	137,77	36	336	690	155,97	36	328
491	83,86	36	348	541	101,85	36	348	591	119,97	36	343	641	138,13	36	336	691	156,33	36	327
492	84,22	36	348	542	102,21	36	348	592	120,33	36	343	642	138,50	36	336	692	156,70	36	327
493	84,58	36	348	543	102,57	36	348	593	120,70	36	343	643	138,86	36	336	693	157,06	36	327
494	84,94	36	348	544	102,93	36	348	594	121,06	36	343	644	139,23	36	336	694	157,42	36	327
495	85,30	36	348	545	103,29	36	348	595	121,42	36	343	645	139,59	36	335	695	157,79	36	327
496	85,66	36	348	546	103,65	36	348	596	121,79	36	343	646	139,96	36	335	696	158,15	36	326
497	86,01	36	348	547	104,01	36	348	597	122,15	36	343	647	140,32	36	335	697	158,52	36	326
498	86,37	36	348	548	104,37	36	347	598	122,51	36	343	648	140,69	36	335	698	158,89	36	326
499	86,72	36	348	549	104,73	36	347	599	122,87	36	342	649	141,05	36	335	699	159,25	36	326
500	87,08	36	348	550	105,10	36	347	600	123,24	36	342	650	141,41	36	335	700	159,62	36	326



Tabelle 6. Einheitliches Luftwiderstandsgesetz von Siacchi.

575

$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$
701	159,98	36	326	751	178,20	36	316	801	196,44	6	306	851	214,67	36	297	901	232,92	36	287
702	160,34	37	325	752	178,56	37	316	802	196,80	36	306	852	215,03	37	296	902	233,28	37	287
703	160,71	36	325	753	178,93	37	315	803	197,16	36	306	853	215,40	36	296	903	233,65	36	286
704	161,07	36	325	754	179,29	37	315	804	197,53	37	305	854	215,76	37	296	904	234,01	37	286
705	161,43	37	325	755	179,66	36	315	805	197,89	37	305	855	216,13	36	296	905	234,38	36	286
706	161,80	36	324	756	180,02	36	315	806	198,26	36	305	856	216,49	37	296	906	234,74	37	286
707	162,16	37	324	757	180,38	36	315	807	198,62	37	305	857	216,86	36	296	907	235,11	36	286
708	162,53	37	324	758	180,75	36	314	808	198,99	36	305	858	217,22	37	296	908	235,47	37	286
709	162,90	37	324	759	181,11	37	314	809	199,35	36	304	859	217,59	37	295	909	235,84	37	285
710	163,26	37	324	760	181,48	36	314	810	199,71	36	304	860	217,96	36	295	910	236,20	37	285
711	163,63	36	323	761	181,84	37	314	811	200,07	37	304	861	218,32	37	295	911	236,57	37	285
712	163,99	36	323	762	182,21	36	314	812	200,44	36	304	862	218,69	36	295	912	236,93	36	285
713	164,35	37	323	763	182,57	37	313	813	200,80	36	304	863	219,05	37	294	913	237,30	36	285
714	164,72	36	323	764	182,94	37	313	814	201,17	36	303	864	219,42	36	294	914	237,66	36	284
715	165,08	36	323	765	183,31	36	313	815	201,53	37	303	865	219,78	37	294	915	238,03	36	284
716	165,44	36	323	766	183,67	37	313	816	201,90	36	303	866	220,15	36	294	916	238,39	37	284
717	165,81	36	322	767	184,04	37	313	817	202,26	36	303	867	220,51	37	294	917	238,76	36	284
718	166,17	37	322	768	184,40	36	312	818	202,63	36	303	868	220,88	36	293	918	239,12	37	284
719	166,54	36	322	769	184,77	37	312	819	202,99	36	302	869	221,24	36	293	919	239,49	36	283
720	166,90	36	322	770	185,13	37	312	820	203,36	36	302	870	221,60	37	293	920	239,85	37	283
721	167,26	37	322	771	185,50	36	312	821	203,72	37	302	871	221,97	36	292	921	240,22	36	283
722	167,63	36	322	772	185,86	36	312	822	204,09	36	302	872	222,33	37	292	922	240,58	36	283
723	167,99	36	321	773	186,23	36	312	823	204,45	37	302	873	222,70	36	292	923	240,95	36	283
724	168,35	37	321	774	186,59	36	311	824	204,82	36	302	874	223,06	36	292	924	241,31	36	283
725	168,72	36	321	775	186,96	36	311	825	205,18	37	301	875	223,43	36	292	925	241,68	36	282
726	169,08	37	321	776	187,32	36	311	826	205,55	36	301	876	223,79	37	291	926	242,04	37	282
727	169,45	36	321	777	187,68	36	310	827	205,91	37	301	877	224,16	36	291	927	242,41	36	282
728	169,81	37	320	778	188,05	36	310	828	206,28	36	301	878	224,52	37	291	928	242,77	37	282
729	170,18	37	320	779	188,41	37	310	829	206,64	36	301	879	224,89	36	291	929	243,14	36	282
730	170,55	36	320	780	188,78	36	310	830	207,01	36	300	880	225,25	37	291	930	243,50	37	282
731	170,91	36	320	781	189,14	36	310	831	207,37	37	300	881	225,62	36	291	931	243,87	36	281
732	171,27	37	319	782	189,51	36	310	832	207,74	36	300	882	225,98	37	291	932	244,23	36	281
733	171,64	36	319	783	189,87	36	310	833	208,10	37	300	883	226,35	36	290	933	244,60	37	281
734	172,00	36	319	784	190,24	37	309	834	208,47	36	300	884	226,71	36	290	934	244,96	36	281
735	172,36	37	319	785	190,61	36	309	835	208,83	36	299	885	227,08	36	290	935	245,33	36	281
736	172,73	36	319	786	190,97	36	309	836	209,20	36	299	886	227,44	37	290	936	245,69	36	280
737	173,09	37	318	787	191,33	36	309	837	209,56	36	299	887	227,81	36	289	937	246,05	37	280
738	173,46	36	318	788	191,69	36	309	838	209,93	37	299	888	228,17	36	289	938	246,42	37	280
739	173,82	36	318	789	192,06	36	308	839	210,29	36	299	889	228,54	36	289	939	246,78	36	280
740	174,19	37	318	790	192,42	37	308	840	210,66	36	299	890	228,90	37	289	940	247,15	36	280
741	174,55	36	318	791	192,79	36	308	841	211,02	37	298	891	229,27	36	289	941	247,51	37	279
742	174,92	36	317	792	193,15	37	308	842	211,39	36	298	892	229,63	37	289	942	247,88	36	279
743	175,28	37	317	793	193,52	36	308	843	211,75	37	298	893	230,00	36	289	943	248,24	37	279
744	175,65	36	317	794	193,88	36	308	844	212,12	36	298	894	230,36	36	288	944	248,61	36	279
745	176,01	37	317	795	194,25	36	307	845	212,48	36	298	895	230,73	36	288	945	248,97	37	279
746	176,38	36	317	796	194,61	37	307	846	212,85	36	298	896	231,09	37	288	946	249,34	36	279
747	176,74	37	316	797	194,98	36	307	847	213,21	37	297	897	231,46	36	288	947	249,70	36	278
748	177,11	36	316	798	195,34	36	307	848	213,58	36	297	898	231,82	36	287	948	250,07	36	278
749	177,47	37	316	799	195,71	36	307	849	213,94	36	297	899	232,19	36	287	949	250,43	36	278
750	177,84	36	316	800	196,07	37	306	850	214,31	36	297	900	232,55	37	287	950	250,80	36	278



$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$	$v$	$f$	Diff.	$10^6 K$
951	251,16		278	1001	269,40		269	1051	287,66		260	1101	305,90		252	1151	324,15		2
952	251,53	37	278	1002	269,77	37	268	1052	288,02	36	260	1102	306,27	37	252	1152	324,51	36	2
953	251,89	36	277	1003	270,13	36	268	1053	288,39	37	260	1103	306,63	36	252	1153	324,88	37	2
954	252,26	37	277	1004	270,50	37	268	1054	288,75	36	260	1104	307,00	37	252	1154	325,24	36	2
955	252,62	36	277	1005	270,86	36	268	1055	289,12	37	260	1105	307,36	36	252	1155	325,61	37	2
956	252,99		277	1006	271,23		268	1056	289,48		260	1106	307,73		251	1156	325,97		2
957	253,35	36	276	1007	271,59	36	268	1057	289,85	37	259	1107	308,09	36	251	1157	326,34	37	2
958	253,72	36	276	1008	271,96	37	267	1058	290,21	36	259	1108	308,46	36	251	1158	326,70	36	2
959	254,08	37	276	1009	272,32	36	267	1059	290,58	37	259	1109	308,82	37	251	1159	327,06	36	2
960	254,45	36	276	1010	272,69	36	267	1060	290,94	37	259	1110	309,19	36	251	1160	327,43	37	2
961	254,81		276	1011	273,05		267	1061	291,31		259	1111	309,55		251	1161	327,79		24
962	255,18	37	275	1012	273,42	36	267	1062	291,67	36	258	1112	309,92	37	250	1162	328,16	37	24
963	255,54	36	275	1013	273,78	36	267	1063	292,04	36	258	1113	310,28	36	250	1163	328,52	36	24
964	255,90	37	275	1014	274,15	37	266	1064	292,40	36	258	1114	310,65	37	250	1164	328,89	36	24
965	256,26	36	275	1015	274,51	37	266	1065	292,77	36	258	1115	311,01	37	250	1165	329,25	36	24
966	256,63		275	1016	274,88		266	1066	293,13		258	1116	311,38		250	1166	329,62		24
967	256,99	36	274	1017	275,24	36	266	1067	293,50	36	258	1117	311,74	36	250	1167	329,98	36	24
968	257,36	37	274	1018	275,61	36	266	1068	293,86	36	258	1118	312,11	36	250	1168	330,35	36	24
969	257,72	36	274	1019	275,97	36	266	1069	294,23	37	257	1119	312,47	36	249	1169	330,71	36	24
970	258,09	37	274	1020	276,34	36	266	1070	294,59	36	257	1120	312,84	36	249	1170	331,08	36	24
971	258,45		274	1021	276,70		265	1071	294,95		257	1121	313,20		249	1171	331,44		24
972	258,82	37	273	1022	277,07	36	265	1072	295,31	37	257	1122	313,57	37	249	1172	331,81	36	24
973	259,18	36	273	1023	277,43	36	265	1073	295,68	36	257	1123	313,93	36	249	1173	332,17	36	24
974	259,55	37	273	1024	277,80	36	265	1074	296,04	36	257	1124	314,30	36	249	1174	332,54	36	24
975	259,91	36	273	1025	278,16	37	265	1075	296,41	37	256	1125	314,66	36	248	1175	332,90	36	24
976	260,28		273	1026	278,53		265	1076	296,77		256	1126	315,03		248	1176	333,27		24
977	260,64	37	272	1027	278,89	36	264	1077	297,14	37	256	1127	315,39	36	248	1177	333,63	36	24
978	261,01	36	272	1028	279,26	37	264	1078	297,50	36	256	1128	315,76	36	248	1178	334,00	36	24
979	261,37	37	272	1029	279,62	36	264	1079	297,87	37	256	1129	316,13	36	248	1179	334,36	36	24
980	261,74	36	272	1030	279,99	37	264	1080	298,24	37	256	1130	316,49	36	248	1180	334,73	36	24
981	262,10		272	1031	280,35		264	1081	298,61		255	1131	316,86		248	1181	335,09		240
982	262,47	37	271	1032	280,72	36	263	1082	298,97	36	255	1132	317,22	36	247	1182	335,46	36	240
983	262,83	36	271	1033	281,09	36	263	1083	299,34	37	255	1133	317,59	36	247	1183	335,82	36	240
984	263,20	37	271	1034	281,45	36	263	1084	299,70	36	255	1134	317,95	36	247	1184	336,19	36	240
985	263,56	36	271	1035	281,82	36	263	1085	300,07	36	255	1135	318,32	36	247	1185	336,55	36	240
986	263,93		271	1036	282,18		263	1086	300,43		255	1136	318,68		247	1186	336,92		239
987	264,29	36	271	1037	282,55	37	263	1087	300,80	36	255	1137	319,05	37	247	1187	337,28	36	239
988	264,66	36	270	1038	282,91	37	262	1088	301,16	37	254	1138	319,41	36	247	1188	337,65	36	239
989	265,02	36	270	1039	283,28	36	262	1089	301,53	36	254	1139	319,78	36	246	1189	338,01	36	239
990	265,39	36	270	1040	283,64	37	262	1090	301,89	37	254	1140	320,14	36	246	1190	338,38	36	239
991	265,75		270	1041	284,01		262	1091	302,26		254	1141	320,50		246	1191	338,74		239
992	266,12	37	270	1042	284,37	36	262	1092	302,62	36	254	1142	320,87	36	246	1192	339,11	36	239
993	266,48	36	270	1043	284,74	36	262	1093	302,99	36	254	1143	321,23	36	246	1193	339,47	36	238
994	266,85	37	270	1044	285,10	36	261	1094	303,35	36	253	1144	321,60	36	246	1194	339,84	36	238
995	267,21	36	269	1045	285,47	37	261	1095	303,71	37	253	1145	321,96	36	246	1195	340,20	36	238
996	267,58		269	1046	285,83		261	1096	304,08		253	1146	322,32		245	1196	340,57		238
997	267,94	36	269	1047	286,20	36	261	1097	304,44	36	253	1147	322,69	36	245	1197	340,93	36	238
998	268,31	37	269	1048	286,56	36	261	1098	304,81	37	253	1148	323,05	36	245	1198	341,30	36	238
999	268,67	36	269	1049	286,93	36	261	1099	305,17	36	253	1149	323,42	36	245	1199	341,66	36	238
1000	269,04	36	269	1050	287,29	37	261	1100	305,54	36	252	1150	323,78	37	245	1200	342,03	37	238

von Otto-Lardillon für  $v_0 < 240$  m/sec; ballist. Koeffizient  $c = \frac{R^2 \pi \cdot i \cdot \delta \cdot g \cdot 0,0140}{P \cdot 1,206}$ ;  
 $2R$  = Kaliber in m;  $P$  = Geschößgewicht in kg;  $\delta$  = Tagesluftgewicht in kg/cbm;  
 Formkoeffizient  $i = 1$  für Ogivalgeschosse von 2 Kaliber Abrundungsradius;  $g = 9,81$ .  
 Im übrigen vgl. § 21 Band I.

$2cX$	$\frac{cv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_e}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_e}{X}$	$2cX$	$\frac{cv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_e}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_e}{X}$
$\varphi = 1^\circ$							$\varphi = 5^\circ$						
0,00	0,000	14,326	1° 00'	1,000	0,187	0,0043	1,30	6,314	4,856	7° 35'	0,522	0,453	0,027
0,05	0,725	14,510	1° 00'	0,975	0,188	0,0043	1,35	6,755	5,003	7° 42'	0,508	0,454	0,027
0,10	1,472	14,720	1° 01'	0,951	0,189	0,0043	1,40	7,238	5,168	7° 49'	0,494	0,455	0,027
0,15	2,243	14,950	1° 02'	0,928	0,190	0,0044							
0,20	3,044	15,220	1° 02'	0,905	0,191	0,0045							
0,25	3,883	15,530	1° 02'	0,882	0,192	0,0045							
0,30	4,776	15,920	1° 03'	0,860	0,192	0,0045							
0,35	5,750	16,420	1° 04'	0,840	0,193	0,0045							
0,40	6,890	17,225	1° 05'	0,820	0,193	0,0046							
$\varphi = 5^\circ$							$\varphi = 10^\circ$						
0,00	0,000	2,880	5° 00'	1,000	0,418	0,022	0,00	0,000	1,463	10° 00'	1,000	0,594	0,044
0,05	0,146	2,925	5° 03'	0,975	0,420	0,022	0,05	0,074	1,489	10° 10'	0,975	0,597	0,044
0,10	0,297	2,973	5° 07'	0,951	0,421	0,022	0,10	0,151	1,514	10° 19'	0,951	0,600	0,044
0,15	0,454	3,023	5° 11'	0,928	0,423	0,022	0,15	0,231	1,540	10° 28'	0,928	0,602	0,045
0,20	0,615	3,074	5° 15'	0,905	0,424	0,022	0,20	0,313	1,567	10° 37'	0,905	0,604	0,045
0,25	0,781	3,126	5° 19'	0,882	0,426	0,022	0,25	0,399	1,595	10° 47'	0,882	0,606	0,045
0,30	0,954	3,180	5° 24'	0,860	0,428	0,023	0,30	0,487	1,624	10° 57'	0,861	0,608	0,046
0,35	1,132	3,235	5° 30'	0,840	0,429	0,023	0,35	0,579	1,653	11° 07'	0,840	0,610	0,046
0,40	1,317	3,292	5° 35'	0,820	0,430	0,023	0,40	0,673	1,683	11° 18'	0,820	0,612	0,046
0,45	1,507	3,350	5° 41'	0,800	0,431	0,023	0,45	0,771	1,714	11° 30'	0,800	0,614	0,047
0,50	1,705	3,410	5° 47'	0,781	0,433	0,023	0,50	0,873	1,747	11° 42'	0,781	0,616	0,047
0,55	1,909	3,472	5° 53'	0,763	0,434	0,023	0,55	0,980	1,781	11° 54'	0,763	0,618	0,048
0,60	2,122	3,537	5° 59'	0,745	0,436	0,023	0,60	1,089	1,815	12° 06'	0,745	0,620	0,048
0,65	2,342	3,605	6° 05'	0,727	0,437	0,024	0,65	1,201	1,850	12° 18'	0,727	0,622	0,049
0,70	2,578	3,676	6° 11'	0,709	0,438	0,024	0,70	1,320	1,886	12° 30'	0,710	0,624	0,049
0,75	2,811	3,750	6° 18'	0,692	0,440	0,024	0,75	1,441	1,922	12° 42'	0,693	0,626	0,049
0,80	3,059	3,826	6° 25'	0,675	0,441	0,024	0,80	1,568	1,960	12° 54'	0,676	0,628	0,050
0,85	3,318	3,906	6° 32'	0,659	0,442	0,024	0,85	1,700	2,000	13° 07'	0,660	0,630	0,050
0,90	3,589	3,989	6° 38'	0,642	0,443	0,025	0,90	1,837	2,040	13° 20'	0,645	0,632	0,051
0,95	3,870	4,075	6° 45'	0,626	0,444	0,025	0,95	1,978	2,082	13° 33'	0,629	0,633	0,051
1,00	4,166	4,167	6° 52'	0,611	0,446	0,025	1,00	2,126	2,126	13° 46'	0,614	0,635	0,052
1,05	4,478	4,264	6° 59'	0,595	0,447	0,025	1,05	2,280	2,172	14° 00'	0,599	0,636	0,052
1,10	4,804	4,368	7° 06'	0,579	0,448	0,026	1,10	2,441	2,220	14° 14'	0,584	0,638	0,053
1,15	5,150	4,478	7° 13'	0,564	0,449	0,026	1,15	2,607	2,269	14° 28'	0,569	0,639	0,053
1,20	5,516	4,595	7° 20'	0,550	0,451	0,026	1,20	2,779	2,319	14° 42'	0,555	0,641	0,053
1,25	5,900	4,720	7° 28'	0,536	0,452	0,026	1,25	2,957	2,369	14° 55'	0,541	0,642	0,054
							1,30	3,141	2,420	15° 09'	0,528	0,644	0,054
							1,35	3,331	2,472	15° 23'	0,515	0,645	0,055
							1,40	3,530	2,525	15° 37'	0,502	0,647	0,055
							1,45	3,740	2,579	15° 50'	0,489	0,648	0,056
							1,50	3,950	2,634	16° 04'	0,477	0,650	0,056

$2cX$	$\frac{cv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_z}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_z}{X}$	$2cX$	$\frac{cv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_z}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_z}{X}$
$\varphi = 10^\circ$							$\varphi = 15^\circ$						
1,55	4,17	2,691	16° 18'	0,465	0,651	0,057	1,55	2,850	1,888	24° 00'	0,478	0,800	0,085
1,60	4,40	2,750	16° 32'	0,453	0,653	0,057	1,60	3,01	1,881	24° 19'	0,467	0,801	0,086
1,65	4,64	2,812	16° 45'	0,441	0,654	0,057	1,65	3,18	1,925	24° 39'	0,456	0,802	0,087
1,70	4,89	2,874	16° 59'	0,430	0,656	0,058	1,70	3,35	1,970	24° 59'	0,445	0,803	0,088
1,75	5,14	2,937	17° 13'	0,419	0,657	0,058	1,75	3,53	2,015	25° 18'	0,435	0,805	0,088
1,80	5,40	3,001	17° 27'	0,409	0,659	0,059	1,80	3,71	2,061	25° 38'	0,425	0,806	0,089
1,85	5,67	3,066	17° 41'	0,399	0,661	0,059	1,85	3,90	2,107	25° 58'	0,416	0,808	0,089
1,90	5,95	3,132	17° 55'	0,389	0,663	0,059	1,90	4,09	2,153	26° 19'	0,406	0,809	0,090
1,95	6,24	3,200	18° 10'	0,380	0,665	0,060	1,95	4,29	2,201	26° 39'	0,397	0,810	0,090
2,00	6,54	3,270	18° 24'	0,372	0,667	0,060	2,00	4,50	2,251	26° 59'	0,388	0,812	0,091
2,05	6,86	3,345	18° 38'	0,363	0,669	0,060	2,05	4,72	2,302	27° 19'	0,380	0,813	0,092
2,10	7,20	3,429	18° 52'	0,355	0,670	0,061	2,10	4,94	2,353	27° 39'	0,371	0,815	0,092
$\varphi = 15^\circ$							2,15	5,17	2,405	28° 00'	0,363	0,816	0,093
0,00	0,000	1,000	15° 00'	1,000	0,732	0,067	2,20	5,41	2,459	28° 20'	0,355	0,817	0,093
0,05	0,051	1,020	15° 12'	0,975	0,735	0,067	2,25	5,66	2,515	28° 40'	0,347	0,818	0,094
0,10	0,104	1,040	15° 24'	0,951	0,739	0,068	2,30	5,93	2,576	29° 01'	0,339	0,819	0,095
0,15	0,159	1,059	15° 37'	0,928	0,742	0,068	2,35	6,21	2,642	29° 22'	0,332	0,820	0,095
0,20	0,216	1,078	15° 51'	0,906	0,745	0,069	2,40	6,51	2,712	29° 42'	0,324	0,821	0,096
0,25	0,274	1,097	16° 06'	0,884	0,749	0,069	2,45	6,83	2,788	30° 03'	0,317	0,821	0,097
0,30	0,335	1,117	16° 21'	0,863	0,752	0,070	2,50	7,18	2,872	30° 24'	0,311	0,822	0,097
0,35	0,398	1,138	16° 37'	0,843	0,755	0,071	$\varphi = 20^\circ$						
0,40	0,464	1,160	16° 53'	0,823	0,758	0,071	0,00	0,000	0,779	20° 00'	1,000	0,858	0,091
0,45	0,532	1,182	17° 09'	0,804	0,761	0,072	0,05	0,040	0,793	20° 15'	0,976	0,862	0,092
0,50	0,602	1,204	17° 26'	0,785	0,763	0,072	0,10	0,081	0,808	20° 31'	0,952	0,866	0,092
0,55	0,674	1,225	17° 44'	0,767	0,766	0,073	0,15	0,123	0,824	20° 48'	0,929	0,870	0,093
0,60	0,748	1,246	18° 02'	0,749	0,768	0,074	0,20	0,167	0,839	21° 05'	0,907	0,874	0,094
0,65	0,824	1,267	18° 20'	0,732	0,770	0,074	0,25	0,213	0,854	21° 23'	0,886	0,878	0,095
0,70	0,902	1,289	18° 37'	0,715	0,772	0,075	0,30	0,261	0,869	21° 42'	0,866	0,881	0,095
0,75	0,983	1,311	18° 55'	0,698	0,774	0,075	0,35	0,309	0,884	22° 01'	0,846	0,884	0,096
0,80	1,067	1,334	19° 13'	0,682	0,776	0,076	0,40	0,359	0,899	22° 21'	0,827	0,887	0,097
0,85	1,155	1,359	19° 32'	0,666	0,778	0,077	0,45	0,412	0,915	22° 42'	0,809	0,889	0,098
0,90	1,247	1,386	19° 51'	0,650	0,780	0,077	0,50	0,466	0,932	23° 03'	0,791	0,891	0,099
0,95	1,344	1,414	20° 09'	0,635	0,782	0,078	0,55	0,522	0,950	23° 24'	0,773	0,893	0,099
1,00	1,443	1,443	20° 28'	0,620	0,784	0,079	0,60	0,580	0,968	23° 45'	0,756	0,896	0,100
1,05	1,547	1,473	20° 47'	0,606	0,786	0,079	0,65	0,640	0,985	24° 07'	0,739	0,898	0,101
1,10	1,655	1,504	21° 06'	0,592	0,788	0,080	0,70	0,702	1,003	24° 29'	0,722	0,900	0,102
1,15	1,767	1,536	21° 25'	0,578	0,790	0,080	0,75	0,765	1,021	24° 52'	0,705	0,902	0,103
1,20	1,884	1,570	21° 44'	0,564	0,791	0,081	0,80	0,830	1,039	25° 14'	0,689	0,905	0,103
1,25	2,005	1,605	22° 03'	0,551	0,792	0,082	0,85	0,898	1,058	25° 37'	0,674	0,907	0,104
1,30	2,131	1,640	22° 22'	0,538	0,793	0,082	0,90	0,969	1,078	26° 00'	0,658	0,909	0,105
1,35	2,262	1,678	22° 41'	0,526	0,795	0,083	0,95	1,044	1,099	26° 24'	0,643	0,911	0,106
1,40	2,400	1,715	23° 01'	0,513	0,796	0,084	1,00	1,122	1,122	26° 48'	0,629	0,914	0,107
1,45	2,544	1,755	23° 21'	0,501	0,798	0,084							
1,50	2,694	1,796	23° 40'	0,489	0,799	0,085							

Tabelle 7 (Tabelle von Otto-Lardillon).

$2cX$	$\frac{cv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_e}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_e}{X}$	$2cX$	$\frac{cv_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_e}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_e}{X}$
$\varphi = 20^\circ$							$\varphi = 30^\circ$						
1,05	1,203	1,146	27° 13'	0,615	0,916	0,107	0,00	0,000	0,577	30° 00'	1,000	1,075	0,144
1,10	1,288	1,171	27° 38'	0,602	0,919	0,108	0,05	0,030	0,587	30° 27'	0,979	1,080	0,145
1,15	1,377	1,197	28° 03'	0,588	0,921	0,109	0,10	0,061	0,598	30° 54'	0,958	1,085	0,147
1,20	1,469	1,224	28° 28'	0,575	0,924	0,110	0,15	0,092	0,609	31° 21'	0,937	1,089	0,148
1,25	1,564	1,251	28° 53'	0,562	0,926	0,111	0,20	0,124	0,620	31° 47'	0,916	1,094	0,149
							0,25	0,158	0,632	32° 14'	0,896	1,098	0,151
1,30	1,663	1,279	29° 18'	0,550	0,928	0,111	0,30	0,193	0,644	32° 40'	0,877	1,103	0,152
1,35	1,766	1,309	29° 43'	0,538	0,930	0,112	0,35	0,230	0,657	33° 08'	0,858	1,108	0,153
1,40	1,874	1,339	30° 09'	0,526	0,932	0,113	0,40	0,268	0,670	33° 35'	0,840	1,112	0,154
1,45	1,986	1,370	30° 34'	0,514	0,934	0,114	0,45	0,307	0,683	34° 02'	0,822	1,116	0,155
1,50	2,102	1,401	30° 59'	0,503	0,936	0,115	0,50	0,348	0,696	34° 29'	0,805	1,121	0,157
							0,55	0,390	0,709	34° 57'	0,788	1,126	0,158
							0,60	0,434	0,723	35° 24'	0,772	1,131	0,159
							0,65	0,479	0,738	35° 51'	0,756	1,136	0,161
							0,70	0,527	0,753	36° 19'	0,740	1,141	0,162
							0,75	0,577	0,769	36° 48'	0,724	1,145	0,164
0,00	0,000	0,653	25° 00'	1,000	0,966	0,116	0,80	0,628	0,785	37° 16'	0,709	1,149	0,165
0,05	0,033	0,664	25° 21'	0,976	0,970	0,117	0,85	0,681	0,801	37° 44'	0,695	1,153	0,166
0,10	0,068	0,676	25° 42'	0,953	0,975	0,118	0,90	0,736	0,818	38° 13'	0,681	1,158	0,168
0,15	0,105	0,698	26° 03'	0,932	0,979	0,119	0,95	0,793	0,835	38° 42'	0,667	1,162	0,169
0,20	0,142	0,709	26° 25'	0,911	0,983	0,120	1,00	0,853	0,853	39° 11'	0,653	1,167	0,171
0,25	0,180	0,720	26° 48'	0,891	0,987	0,121							
0,30	0,219	0,731	27° 12'	0,871	0,991	0,122	1,05	0,915	0,871	39° 41'	0,640	1,172	0,172
0,35	0,260	0,743	27° 36'	0,852	0,995	0,123	1,10	0,979	0,890	40° 10'	0,627	1,176	0,174
0,40	0,303	0,756	27° 59'	0,833	0,998	0,124	1,15	1,046	0,910	40° 10'	0,614	1,181	0,175
0,45	0,347	0,770	28° 23'	0,815	1,000	0,125	1,20	1,116	0,930	41° 10'	0,602	1,186	0,177
0,50	0,392	0,783	28° 48'	0,798	1,003	0,126	1,25	1,188	0,951	41° 39'	0,590	1,191	0,179
0,55	0,438	0,796	29° 13'	0,780	1,006	0,127	1,30	1,264	0,973	42° 09'	0,578	1,195	0,181
0,60	0,486	0,810	29° 38'	0,763	1,009	0,128	1,35	1,343	0,995	42° 39'	0,566	1,199	0,182
0,65	0,535	0,824	30° 03'	0,746	1,011	0,129	1,40	1,425	1,018	43° 10'	0,554	1,203	0,183
0,70	0,587	0,839	30° 28'	0,729	1,014	0,130	1,45	1,510	1,041	43° 38'	0,543	1,208	0,185
0,75	0,641	0,855	30° 55'	0,713	1,017	0,131	1,50	1,599	1,066	44° 07'	0,533	1,212	0,186
0,80	0,697	0,871	31° 21'	0,698	1,020	0,132							
0,85	0,755	0,888	31° 48'	0,682	1,022	0,133							
0,90	0,816	0,907	32° 14'	0,667	1,025	0,134							
0,95	0,880	0,926	32° 40'	0,653	1,028	0,135							
1,00	0,945	0,945	33° 07'	0,639	1,030	0,136							
1,05	1,013	0,965	33° 33'	0,625	1,033	0,137	0,00	0,000	0,532	35° 00'	1,000	1,183	0,175
1,10	1,084	0,986	34° 00'	0,612	1,036	0,138	0,05	0,027	0,542	35° 28'	0,980	1,188	0,177
1,15	1,158	1,007	34° 28'	0,599	1,039	0,139	0,10	0,055	0,552	35° 56'	0,960	1,193	0,178
1,20	1,235	1,029	34° 55'	0,587	1,042	0,141	0,15	0,085	0,563	36° 24'	0,940	1,199	0,179
1,25	1,315	1,052	35° 23'	0,575	1,045	0,142	0,20	0,115	0,574	36° 52'	0,921	1,204	0,181
							0,25	0,146	0,585	37° 21'	0,901	1,209	0,183
1,30	1,398	1,075	35° 50'	0,563	1,047	0,143	0,30	0,179	0,596	37° 51'	0,882	1,214	0,184
1,35	1,484	1,099	36° 18'	0,551	1,050	0,144	0,35	0,213	0,608	38° 21'	0,864	1,220	0,186
1,40	1,574	1,124	36° 46'	0,540	1,052	0,145	0,40	0,248	0,620	38° 51'	0,846	1,225	0,187
1,45	1,668	1,150	37° 13'	0,529	1,054	0,146	0,45	0,284	0,632	39° 20'	0,830	1,230	0,189
1,50	1,766	1,177	37° 40'	0,518	1,056	0,147	0,50	0,322	0,645	39° 50'	0,814	1,235	0,191

$2cX$	$\frac{vc_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_c}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_c}{X}$	$2cX$	$\frac{vc_0^2}{g}$	$\frac{v_0^2}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_c}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_c}{X}$
$\varphi = 35^\circ$							$\varphi = 40^\circ$						
0,55	0,362	0,658	40° 21'	0,797	1,240	0,193	1,05	0,829	0,789	50° 50'	0,663	1,417	0,253
0,60	0,403	0,672	40° 51'	0,781	1,245	0,195	1,10	0,889	0,808	51° 20'	0,651	1,428	0,255
0,65	0,445	0,686	41° 21'	0,766	1,250	0,196	1,15	0,952	0,828	51° 51'	0,638	1,429	0,257
0,70	0,489	0,700	41° 51'	0,751	1,255	0,198	1,20	1,012	0,848	52° 21'	0,626	1,435	0,260
0,75	0,536	0,715	42° 21'	0,736	1,261	0,200	1,25	1,087	0,869	52° 52'	0,614	1,441	0,262
0,80	0,585	0,731	42° 52'	0,720	1,266	0,201	1,30	1,158	0,891	53° 22'	0,603	1,447	0,264
0,85	0,635	0,747	43° 23'	0,706	1,271	0,203	1,35	1,233	0,913	53° 53'	0,591	1,453	0,267
0,90	0,686	0,762	43° 53'	0,692	1,276	0,205	1,40	1,311	0,936	54° 22'	0,580	1,459	0,269
0,95	0,739	0,778	44° 22'	0,679	1,281	0,207	1,45	1,393	0,961	54° 53'	0,569	1,465	0,271
1,00	0,795	0,795	44° 53'	0,665	1,286	0,208	1,50	1,478	0,985	55° 22'	0,558	1,470	0,273
1,05	0,854	0,813	45° 23'	0,652	1,291	0,210	$\varphi = 45^\circ$						
1,10	0,915	0,831	45° 54'	0,639	1,296	0,212	0,00	0,000	0,500	45° 00'	1,000	1,414	0,250
1,15	0,978	0,850	46° 25'	0,627	1,302	0,214	0,05	0,026	0,510	45° 32'	0,981	1,420	0,252
1,20	1,045	0,871	46° 56'	0,615	1,308	0,216	0,10	0,052	0,520	46° 03'	0,963	1,426	0,254
1,25	1,114	0,891	47° 27'	0,603	1,313	0,218	0,15	0,080	0,530	46° 34'	0,944	1,433	0,257
1,30	1,185	0,912	47° 57'	0,591	1,318	0,219	0,20	0,108	0,541	47° 05'	0,926	1,439	0,259
1,35	1,260	0,934	48° 27'	0,580	1,323	0,221	0,25	0,138	0,552	47° 36'	0,908	1,446	0,261
1,40	1,338	0,956	48° 58'	0,569	1,328	0,223	0,30	0,169	0,564	48° 08'	0,891	1,453	0,263
1,45	1,420	0,979	49° 28'	0,558	1,333	0,225	0,35	0,202	0,577	48° 40'	0,874	1,460	0,266
1,50	1,505	1,003	49° 59'	0,547	1,338	0,227	0,40	0,236	0,590	49° 12'	0,858	1,467	0,268
$\varphi = 40^\circ$							0,45	0,271	0,602	49° 43'	0,842	1,473	0,271
0,00	0,000	0,508	40° 00'	1,000	1,295	0,210	0,50	0,308	0,616	50° 15'	0,826	1,480	0,274
0,05	0,026	0,518	40° 31'	0,981	1,300	0,211	0,55	0,346	0,629	50° 46'	0,810	1,486	0,276
0,10	0,053	0,528	41° 02'	0,962	1,305	0,213	0,60	0,386	0,643	51° 18'	0,794	1,492	0,279
0,15	0,081	0,538	41° 32'	0,942	1,311	0,215	0,65	0,428	0,657	51° 50'	0,779	1,498	0,282
0,20	0,110	0,549	42° 03'	0,923	1,317	0,217	0,70	0,471	0,673	52° 20'	0,764	1,505	0,285
0,25	0,140	0,560	42° 33'	0,903	1,323	0,219	0,75	0,517	0,689	52° 52'	0,750	1,511	0,287
0,30	0,171	0,571	43° 03'	0,885	1,329	0,221	0,80	0,564	0,705	53° 23'	0,736	1,518	0,289
0,35	0,204	0,583	43° 33'	0,867	1,335	0,223	0,85	0,613	0,721	53° 55'	0,723	1,524	0,291
0,40	0,238	0,595	44° 04'	0,850	1,340	0,225	0,90	0,665	0,738	54° 25'	0,710	1,531	0,294
0,45	0,273	0,607	44° 35'	0,835	1,346	0,227	0,95	0,719	0,756	54° 57'	0,696	1,538	0,297
0,50	0,309	0,618	45° 06'	0,819	1,352	0,229	1,00	0,776	0,775	55° 27'	0,683	1,545	0,300
0,55	0,347	0,631	45° 37'	0,803	1,358	0,231	1,05	0,835	0,795	55° 59'	0,670	1,552	0,302
0,60	0,387	0,645	46° 08'	0,788	1,364	0,234	1,10	0,897	0,815	56° 29'	0,658	1,559	0,305
0,65	0,429	0,660	46° 40'	0,773	1,370	0,236	1,15	0,962	0,836	57° 00'	0,645	1,566	0,308
0,70	0,472	0,674	47° 12'	0,758	1,376	0,238	1,20	1,030	0,858	57° 30'	0,633	1,573	0,311
0,75	0,517	0,689	47° 43'	0,744	1,382	0,240	1,25	1,102	0,882	58° 00'	0,621	1,580	0,314
0,80	0,564	0,705	48° 15'	0,729	1,388	0,242	1,30	1,176	0,905	58° 29'	0,610	1,586	0,317
0,85	0,612	0,720	48° 45'	0,715	1,394	0,244	1,35	1,254	0,929	58° 59'	0,598	1,593	0,320
0,90	0,663	0,737	49° 16'	0,701	1,400	0,246	1,40	1,336	0,954	59° 28'	0,587	1,600	0,323
0,95	0,716	0,754	49° 47'	0,688	1,406	0,248	1,45	1,422	0,981	59° 57'	0,576	1,607	0,326
1,00	0,771	0,771	50° 18'	0,676	1,411	0,251	1,50	1,512	1,008	60° 26'	0,565	1,613	0,329



$2cX$	$\frac{cv_0^3}{g}$	$\frac{v_0^3}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_e}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_e}{X}$	$2cX$	$\frac{cv_0^3}{g}$	$\frac{v_0^3}{2gX}$	$\omega$	$\frac{v_e}{v_0}$	$T\sqrt{\frac{g}{X}}$	$\frac{y_e}{X}$
$\varphi = 60^\circ$							$\varphi = 70^\circ$						
1,05	1,107	1,054	70° 11'	0,655	2,080	0,542	0,30	0,286	0,954	72° 43'	0,870	2,437	0,742
1,10	1,199	1,090	70° 37'	0,641	2,090	0,548	0,35	0,346	0,989	73° 10'	0,849	2,452	0,752
1,15	1,298	1,129	71° 08'	0,626	2,101	0,554	0,40	0,411	1,027	73° 36'	0,829	2,468	0,762
1,20	1,403	1,169	71° 28'	0,612	2,112	0,560	0,45	0,480	1,067	74° 02'	0,808	2,485	0,772
1,25	1,515	1,212	71° 54'	0,598	2,124	0,567	0,50	0,555	1,110	74° 27'	0,788	2,501	0,783
1,30	1,633	1,256	72° 19'	0,584	2,135	0,573	0,55	0,636	1,156	74° 53'	0,767	2,518	0,794
1,35	1,759	1,303	72° 44'	0,570	2,146	0,580	0,60	0,723	1,205	75° 18'	0,748	2,536	0,804
1,40	1,894	1,353	73° 09'	0,556	2,157	0,586	0,65	0,817	1,257	75° 44'	0,727	2,554	0,815
1,45	2,040	1,407	73° 33'	0,543	2,169	0,593	0,70	0,920	1,314	76° 09'	0,707	2,573	0,827
							0,75	1,031	1,375	76° 34'	0,688	2,591	0,839
							0,80	1,151	1,439	76° 58'	0,668	2,609	0,851
0,00	0,000	0,648	65° 00'	1,000	2,071	0,536	0,85	1,281	1,507	77° 22'	0,649	2,628	0,863
0,05	0,034	0,668	65° 30'	0,981	2,082	0,542	0,90	1,423	1,581	77° 45'	0,629	2,646	0,876
0,10	0,069	0,689	66° 00'	0,961	2,093	0,548	0,95	1,578	1,661	78° 09'	0,609	2,665	0,889
0,15	0,106	0,709	66° 28'	0,942	2,104	0,555	1,00	1,747	1,747	78° 33'	0,590	2,685	0,902
0,20	0,146	0,730	66° 57'	0,922	2,116	0,561							
0,25	0,188	0,752	67° 28'	0,903	2,128	0,568	1,05	1,932	1,840	78° 56'	0,572	2,705	—
							1,10	2,134	1,940	79° 19'	0,554	—	—
0,30	0,233	0,775	67° 55'	0,884	2,140	0,574							
0,35	0,280	0,799	68° 28'	0,866	2,153	0,581							
0,40	0,329	0,824	68° 51'	0,848	2,165	0,587							
0,45	0,382	0,850	69° 18'	0,830	2,178	0,594							
0,50	0,439	0,878	69° 46'	0,812	2,191	0,602	0,00	0,000	1,000	75° 00'	1,000	2,732	0,933
							0,05	0,052	1,040	75° 25'	0,978	2,754	0,947
							0,10	0,109	1,085	75° 50'	0,947	2,776	0,962
							0,15	0,170	1,133	76° 16'	0,920	2,798	0,977
							0,20	0,236	1,183	76° 41'	0,893	2,820	0,993
							0,25	0,309	1,236	77° 06'	0,866	2,842	1,008
0,55	0,500	0,908	70° 14'	0,795	2,205	0,609							
0,60	0,564	0,940	70° 41'	0,777	2,218	0,616	0,30	0,389	1,295	77° 31'	0,840	2,865	1,024
0,65	0,632	0,973	71° 08'	0,759	2,232	0,624	0,35	0,477	1,360	77° 56'	0,815	2,888	1,041
0,70	0,705	1,007	71° 34'	0,742	2,245	0,631	0,40	0,573	1,431	78° 20'	0,789	2,912	1,059
0,75	0,782	1,043	72° 01'	0,725	2,259	0,639	0,45	0,679	1,508	78° 44'	0,764	2,936	1,077
							0,50	0,796	1,591	79° 08'	0,738	2,960	1,096
0,80	0,865	1,081	72° 27'	0,708	2,272	0,647							
0,85	0,954	1,122	72° 54'	0,691	2,286	0,655	0,55	0,925	1,681	79° 32'	0,713	2,985	1,115
0,90	1,043	1,165	73° 20'	0,675	2,300	0,664	0,60	1,067	1,779	79° 56'	0,688	3,011	1,135
0,95	1,149	1,210	73° 46'	0,659	2,314	0,672	0,65	1,223	1,884	80° 19'	0,664	3,038	1,155
1,00	1,259	1,258	74° 12'	0,643	2,328	0,680	0,70	1,397	1,998	80° 41'	0,640	3,066	1,176
							0,75	1,592	2,123	—	—	3,094	1,197
1,05	1,377	1,310	74° 37'	0,627	2,343	0,688							
1,10	1,503	1,366	75° 02'	0,611	2,358	0,696	0,80	1,810	2,262	—	—	3,122	—
1,15	1,633	1,424	75° 26'	0,595	2,373	0,705	0,85	2,055	2,417	—	—	—	—
1,20	1,764	1,487	75° 50'	0,579	2,388	0,714	0,90	2,333	2,592	—	—	—	—
1,25	1,941	1,553	76° 13'	0,564	2,402	0,723							
1,30	2,110	1,623	76° 36'	0,548	2,416	0,732							
$\varphi = 70^\circ$							$\varphi = 70^\circ$						
0,00	0,000	0,777	70° 00'	1,000	2,344	0,687							
0,05	0,040	0,805	70° 28'	0,978	2,359	0,696							
0,10	0,088	0,833	70° 56'	0,956	2,375	0,705							
0,15	0,129	0,862	71° 23'	0,934	2,390	0,714							
0,20	0,178	0,891	71° 50'	0,912	2,405	0,723							
0,25	0,230	0,921	72° 16'	0,891	2,421	0,732							



Tabelle 8a.  $\int \frac{d\vartheta}{\cos^n + 1}$  in Funktion von  $\vartheta$ ; für  $n = 1,55; 1,70; 3; 4; 5; 6$   
(vgl. § 18, 24, 38, 41).

$\vartheta = \downarrow$	für $n = 1,55$	für $n = 1,70$	für $n = 3$	für $n = 4$	für $n = 5$	für $n = 6$
1°	0,01746	0,01746	0,01746	0,01746	0,01746	0,01746
2°	0,03493	0,03493	0,03494	0,03495	0,03495	0,03499
3°	0,05242	0,05243	0,05246	0,05248	0,05250	0,05253
4°	0,06996	0,06999	0,07004	0,07010	0,07016	0,07021
5°	0,08755	0,08760	0,08771	0,08782	0,08794	0,08805
6°	0,10520	0,10527	0,10549	0,10569	0,10588	0,10608
7°	0,12295	0,12303	0,12340	0,12371	0,12403	0,12434
8°	0,14079	0,14089	0,14147	0,14193	0,14240	0,14288
9°	0,15874	0,15895	0,15971	0,16038	0,16105	0,16173
10°	0,17683	0,17689	0,17815	0,17908	0,18002	0,18096
11°	0,19504	0,19517	0,19683	0,19807	0,19933	0,20061
12°	0,21343	0,21369	0,21576	0,21739	0,21905	0,22072
13°	0,23185	0,23233	0,23497	0,23707	0,23920	0,24137
14°	0,25073	0,25108	0,25449	0,25715	0,25985	0,26261
15°	0,26969	0,26979	0,27436	0,27767	0,28105	0,28450
16°	0,28898	0,28907	0,29460	0,29868	0,30285	0,30712
17°	0,30836	0,30862	0,31526	0,32032	0,32532	0,33036
18°	0,32805	0,32846	0,33635	0,34234	0,34851	0,35488
19°	0,34803	0,34861	0,35794	0,36510	0,37251	0,38019
20°	0,36830	0,36908	0,38004	0,38855	0,39739	0,40658
21°	0,38891	0,38992	0,40272	0,41276	0,42324	0,43418
22°	0,40985	0,41114	0,42601	0,43780	0,45015	0,46310
23°	0,43120	0,43276	0,44997	0,46383	0,47822	0,49349
24°	0,45297	0,45481	0,47465	0,49064	0,50757	0,52549
25°	0,47502	0,47729	0,50011	0,51862	0,53832	0,55928
26°	0,49773	0,50027	0,52641	0,54776	0,57060	0,59505
27°	0,52088	0,52378	0,55362	0,57817	0,60458	0,63302
28°	0,54453	0,54790	0,58132	0,60996	0,64043	0,67344
29°	0,56883	0,57263	0,61108	0,64326	0,67832	0,71656
30°	0,59364	0,59806	0,64150	0,67821	0,71848	0,76271
31°	0,61923	0,62411	0,67817	0,71497	0,76115	0,81223
32°	0,64543	0,65093	0,70620	0,75371	0,80658	0,86552
33°	0,67224	0,67845	0,74070	0,79462	0,85509	0,92304
34°	0,70001	0,70693	0,77680	0,83791	0,90702	0,98532
35°	0,72848	0,73638	0,81464	0,88384	0,96274	1,05294
36°	0,75791	0,76633	0,85488	0,93264	1,02271	1,12661
37°	0,78848	0,79814	0,89619	0,98466	1,08742	1,20712
38°	0,81974	0,83064	0,94025	1,04021	1,15744	1,29539
39°	0,85170	0,86462	0,98679	1,09968	1,23344	1,39251
40°	0,88611	0,89965	1,03603	1,16350	1,31616	1,49973



Tabelle 8a.  $\int \frac{d\theta}{\cos^n + 1}$  in Funktion von  $\theta$ ; für  $n = 1,55; 1,70; 3; 4; 5; 6$ .  
(vgl. § 18, 24, 38, 41).

$\theta = \varphi$	für $n = 1,55$	für $n = 1,70$	für $n = 3$	für $n = 4$	für $n = 5$	für $n = 6$
41°	0,92147	0,93643	1,08825	1,23218	1,40649	1,61853
42°	0,95806	0,97459	1,14373	1,30627	1,50542	1,75065
43°	0,99604	1,01407	1,20282	1,38642	1,61414	1,89814
44°	1,03568	1,05373	1,26588	1,47336	1,73403	2,06343
45°	1,07686	1,09622	1,33333	1,56795	1,86667	2,24944
46°	1,11993	1,14172	1,40567	1,67117	2,01396	2,45962
47°	1,16525	1,18953	1,48344	1,78416	2,17813	2,69817
48°	1,21266	1,23988	1,56725	1,90823	2,36182	2,97012
49°	1,26250	1,29297	1,65781	2,04494	2,56818	3,28163
50°	1,31489	1,34930	1,75596	2,19609	2,80097	3,64016
51°	1,37049	1,41225	1,86263	2,36382	3,06471	4,05492
52°	1,42872	1,47487	1,97890	2,55063	3,36485	4,53726
53°	1,49219	1,53933	2,10604	2,75954	3,70815	5,10130
54°	1,55827	1,60415	2,24553	2,99411	4,10261	5,76469
55°	1,62871	1,67246	2,39910	3,25262	4,55827	6,54964
56°	1,70260	1,74601	2,56878	3,55828	5,08749	7,48434
57°	1,78269	1,82774	2,75697	3,89934	5,70565	8,60480
58°	1,86710	1,91652	2,96653	4,28949	6,43206	9,95738
59°	1,95839	2,02229	3,20087	4,73816	7,29111	11,60229
60°	2,05773	2,12903	3,46410	5,25700	8,31384	13,61843
61°	2,16308	2,23963	3,7613	—	9,5404	—
62°	2,27790	2,36158	4,0983	—	11,0218	—
63°	2,40684	2,49399	4,4824	—	12,8256	—
64°	2,54284	2,63950	4,9238	—	15,0429	—
65°	2,69269	2,79736	5,4320	—	17,7906	—
66°	2,85912	2,97066	6,0230	—	21,2817	—
67°	3,04040	3,14967	6,7143	—	25,5892	—
68°	3,24349	3,37423	7,5293	—	31,1596	—
69°	3,46926	3,61398	8,4982	—	38,3777	—
70°	3,71860	3,91482	9,6603	—	47,8847	—
71°	4,00677	4,25667	11,0710	—	60,5569	—
72°	4,33334	4,64652	12,7951	—	77,7396	—
73°	4,70703	5,09571	14,9345	—	101,4747	—
74°	5,14263	5,53355	17,6258	—	134,6546	—
75°	5,75329	6,15204	21,0590	—	183,1882	—

Tabelle 8b.  $\xi(\vartheta) = \int \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ .

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
0° 0'	0,0000000	0° 45'	0,0130911	1° 30'	0,0261889	2° 15'	0,03993003	3° 0'	0,0524317
1'	0,0002909	46'	0,0133821	31'	0,0264801	16'	0,0395918	1'	0,0527238
2'	0,0005818	47'	0,0136730	32'	0,0267713	17'	0,0398834	2'	0,0530159
3'	0,0008727	48'	0,0139640	33'	0,0270625	18'	0,0401750	3'	0,0533081
4'	0,0011636	49'	0,0142550	34'	0,0273537	19'	0,0404666	4'	0,0536002
5'	0,0014544	50'	0,0145460	35'	0,0276449	20'	0,0407582	5'	0,0538923
6'	0,0017453	51'	0,0148369	36'	0,0279362	21'	0,0410498	6'	0,0541845
7'	0,0020362	52'	0,0151279	37'	0,0282274	22'	0,0413414	7'	0,0544767
8'	0,0023271	53'	0,0154189	38'	0,0285187	23'	0,0416330	8'	0,0547689
9'	0,0026180	54'	0,0157099	39'	0,0288099	24'	0,0419247	9'	0,0550611
10'	0,0029089	55'	0,0160009	40'	0,0291012	25'	0,0422164	10'	0,0553533
11'	0,0031998	56'	0,0162919	41'	0,0293924	26'	0,0425080	11'	0,0556455
12'	0,0034907	57'	0,0165829	42'	0,0296837	27'	0,0427997	12'	0,0559377
13'	0,0037816	58'	0,0168739	43'	0,0299750	28'	0,0430914	13'	0,0562300
14'	0,0040725	59'	0,0171649	44'	0,0302663	29'	0,0433831	14'	0,0565223
15'	0,0043634	1° 0'	0,0174559	45'	0,0305575	30'	0,0436748	15'	0,0568146
16'	0,0046543	1'	0,0177470	46'	0,0308488	31'	0,0439665	16'	0,0571069
17'	0,0049452	2'	0,0180380	47'	0,0311401	32'	0,0442583	17'	0,0573992
18'	0,0052361	3'	0,0183291	48'	0,0314314	33'	0,0445500	18'	0,0576915
19'	0,0055270	4'	0,0186201	49'	0,0317228	34'	0,0448418	19'	0,0579839
20'	0,0058179	5'	0,0189111	50'	0,0320141	35'	0,0451335	20'	0,0582762
21'	0,0061088	6'	0,0192022	51'	0,0323055	36'	0,0454253	21'	0,0585686
22'	0,0063997	7'	0,0194932	52'	0,0325968	37'	0,0457171	22'	0,0588610
23'	0,0066906	8'	0,0197843	53'	0,0328882	38'	0,0460089	23'	0,0591534
24'	0,0069815	9'	0,0200754	54'	0,0331795	39'	0,0463008	24'	0,0594458
25'	0,0072724	10'	0,0203664	55'	0,0334709	40'	0,0465926	25'	0,0597383
26'	0,0075633	11'	0,0206575	56'	0,0337623	41'	0,0468844	26'	0,0600307
27'	0,0078542	12'	0,0209485	57'	0,0340537	42'	0,0471762	27'	0,0603232
28'	0,0081451	13'	0,0212396	58'	0,0343451	43'	0,0474681	28'	0,0606157
29'	0,0084361	14'	0,0215307	59'	0,0346365	44'	0,0477600	29'	0,0609082
30'	0,0087270	15'	0,0218218	2° 0'	0,0349279	45'	0,0480519	30'	0,0612007
31'	0,0090179	16'	0,0221129	1'	0,0352193	46'	0,0483438	31'	0,0614932
32'	0,0093088	17'	0,0224040	2'	0,0355108	47'	0,0486357	32'	0,0617858
33'	0,0095998	18'	0,0226951	3'	0,0358022	48'	0,0489276	33'	0,0620783
34'	0,0098907	19'	0,0229862	4'	0,0360937	49'	0,0492196	34'	0,0623709
35'	0,0101816	20'	0,0232774	5'	0,0363851	50'	0,0495115	35'	0,0626635
36'	0,0104725	21'	0,0235685	6'	0,0366766	51'	0,0498035	36'	0,0629561
37'	0,0107635	22'	0,0238596	7'	0,0369681	52'	0,0500955	37'	0,0632487
38'	0,0110544	23'	0,0241508	8'	0,0372596	53'	0,0503874	38'	0,0635414
39'	0,0113454	24'	0,0244419	9'	0,0375511	54'	0,0506794	39'	0,0638340
40'	0,0116363	25'	0,0247331	10'	0,0378426	55'	0,0509715	40'	0,0641267
41'	0,0119273	26'	0,0250242	11'	0,0381341	56'	0,0512635	41'	0,0644194
42'	0,0122182	27'	0,0253154	12'	0,0384256	57'	0,0515555	42'	0,0647121
43'	0,0125092	28'	0,0256066	13'	0,0387171	58'	0,0518476	43'	0,0650048
44'	0,0128001	29'	0,0258977	14'	0,0390087	59'	0,0521396	44'	0,0652976

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
3° 45'	0,0655903	4° 35'	0,0802512	5° 25'	0,0949633	6° 15'	0,1097364	7° 5'	0,1245804
46'	0,0658831	36'	0,0805449	26'	0,0952581	16'	0,1100325	6'	0,1248781
47'	0,0661759	37'	0,0808386	27'	0,0955529	17'	0,1103286	7'	0,1251758
48'	0,0664687	38'	0,0811323	28'	0,0958478	18'	0,1106249	8'	0,1254735
49'	0,0667615	39'	0,0814261	29'	0,0961427	19'	0,1109211	9'	0,1257713
50'	0,0670543	40'	0,0817199	30'	0,0964376	20'	0,1112174	10'	0,1260691
51'	0,0673472	41'	0,0820137	31'	0,0967326	21'	0,1115137	11'	0,1263669
52'	0,0676401	42'	0,0823075	32'	0,0970276	22'	0,1118100	12'	0,1266648
53'	0,0679330	43'	0,0826013	33'	0,0973226	23'	0,1121063	13'	0,1269627
54'	0,0682259	44'	0,0828952	34'	0,0976176	24'	0,1124027	14'	0,1272606
55'	0,0685188	45'	0,0831891	35'	0,0979126	25'	0,1126990	15'	0,1275586
56'	0,0688118	46'	0,0834830	36'	0,0982077	26'	0,1129954	16'	0,1278566
57'	0,0691048	47'	0,0837769	37'	0,0985028	27'	0,1132919	17'	0,1281546
58'	0,0693978	48'	0,0840709	38'	0,0987980	28'	0,1135884	18'	0,1284527
59'	0,0696908	49'	0,0843649	39'	0,0990931	29'	0,1138850	19'	0,1287508
4° 0'	0,0699838	50'	0,0846589	40'	0,0993883	30'	0,1141816	20'	0,1290489
1'	0,0702768	51'	0,0849529	41'	0,0996835	31'	0,1144783	21'	0,1293471
2'	0,0705698	52'	0,0852470	42'	0,0999785	32'	0,1147749	22'	0,1296453
3'	0,0708629	53'	0,0855410	43'	0,1002738	33'	0,1150716	23'	0,1299435
4'	0,0711560	54'	0,0858351	44'	0,1005693	34'	0,1153683	24'	0,1302418
5'	0,0714491	55'	0,0861292	45'	0,1008646	35'	0,1156649	25'	0,1305401
6'	0,0717422	56'	0,0864234	46'	0,1011600	36'	0,1159616	26'	0,1308384
7'	0,0720354	57'	0,0867175	47'	0,1014553	37'	0,1162583	27'	0,1311363
8'	0,0723285	58'	0,0870117	48'	0,1017507	38'	0,1165550	28'	0,1314352
9'	0,0726217	59'	0,0873059	49'	0,1020461	39'	0,1168518	29'	0,1317336
10'	0,0729149	5° 0'	0,0876001	50'	0,1023416	40'	0,1171487	30'	0,1320321
11'	0,0732081	1'	0,0878944	51'	0,1026371	41'	0,1174456	31'	0,1323306
12'	0,0735013	2'	0,0881887	52'	0,1029326	42'	0,1177426	32'	0,1326291
13'	0,0737946	3'	0,0884830	53'	0,1032281	43'	0,1180396	33'	0,1329277
14'	0,0740879	4'	0,0887773	54'	0,1035236	44'	0,1183366	34'	0,1332263
15'	0,0743812	5'	0,0890716	55'	0,1038192	45'	0,1186336	35'	0,1335249
16'	0,0746745	6'	0,0893659	56'	0,1041148	46'	0,1189306	36'	0,1338236
17'	0,0749678	7'	0,0896603	57'	0,1044104	47'	0,1192277	37'	0,1341223
18'	0,0752611	8'	0,0899547	58'	0,1047061	48'	0,1195248	38'	0,1344210
19'	0,0755545	9'	0,0902491	59'	0,1050018	49'	0,1198219	39'	0,1347198
20'	0,0758479	10'	0,0905436	6° 0'	0,1052975	50'	0,1201190	40'	0,1350186
21'	0,0761413	11'	0,0908381	1'	0,1055932	51'	0,1204162	41'	0,1353174
22'	0,0764347	12'	0,0911326	2'	0,1058889	52'	0,1207134	42'	0,1356163
23'	0,0767282	13'	0,0914271	3'	0,1061847	53'	0,1210107	43'	0,1359152
24'	0,0770217	14'	0,0917217	4'	0,1064805	54'	0,1213080	44'	0,1362141
25'	0,0773152	15'	0,0920163	5'	0,1067764	55'	0,1216053	45'	0,1365131
26'	0,0776087	16'	0,0923109	6'	0,1070723	56'	0,1219027	46'	0,1368121
27'	0,0779022	17'	0,0926055	7'	0,1073682	57'	0,1222001	47'	0,1371112
28'	0,0781957	18'	0,0929001	8'	0,1076642	58'	0,1224975	48'	0,1374108
29'	0,0784892	19'	0,0931947	9'	0,1079602	59'	0,1227949	49'	0,1377094
30'	0,0787828	20'	0,0934894	10'	0,1082562	7° 0'	0,1230924	50'	0,1380086
31'	0,0790764	21'	0,0937841	11'	0,1085522	1'	0,1233900	51'	0,1383078
32'	0,0793701	22'	0,0940789	12'	0,1088482	2'	0,1236876	52'	0,1386070
33'	0,0796638	23'	0,0943737	13'	0,1091442	3'	0,1239852	53'	0,1389063
34'	0,0799575	24'	0,0946685	14'	0,1094403	4'	0,1242828	54'	0,1392056

Tabelle 8b.  $\xi(\vartheta) = \int \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ 

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
7° 55'	0,1395049	8° 45'	0,1545204	9° 35'	0,1696370	10° 25'	0,1848653	11° 15'	0,2002164
56'	0,1398043	46'	0,1548217	36'	0,1699404	26'	0,1851711	16'	0,2005248
57'	0,1401037	47'	0,1551230	37'	0,1702439	27'	0,1854770	17'	0,2008332
58'	0,1404032	48'	0,1554244	38'	0,1705474	28'	0,1857829	18'	0,2011416
59'	0,1407027	49'	0,1557258	39'	0,1708510	29'	0,1860888	19'	0,2014501
8° 0'	0,1410022	50'	0,1560273	40'	0,1711546	30'	0,1863948	20'	0,2017587
1'	0,1413018	51'	0,1563288	41'	0,1714583	31'	0,1867008	21'	0,2020673
2'	0,1416014	52'	0,1566304	42'	0,1717620	32'	0,1870069	22'	0,2023760
3'	0,1419010	53'	0,1569320	43'	0,1720658	33'	0,1873130	23'	0,2026847
4'	0,1422007	54'	0,1572336	44'	0,1723696	34'	0,1876192	24'	0,2029935
5'	0,1425004	55'	0,1575353	45'	0,1726734	35'	0,1879254	25'	0,2033023
6'	0,1428002	56'	0,1578370	46'	0,1729773	36'	0,1882317	26'	0,2036112
7'	0,1431000	57'	0,1581387	47'	0,1732812	37'	0,1885380	27'	0,2039201
8'	0,1433998	58'	0,1584405	48'	0,1735852	38'	0,1888444	28'	0,2042291
9'	0,1436997	59'	0,1587423	49'	0,1738891	39'	0,1891508	29'	0,2045382
10'	0,1439996	9° 0'	0,1590442	50'	0,1741932	40'	0,1894573	30'	0,2048473
11'	0,1442995	1'	0,1593461	51'	0,1744973	41'	0,1897638	31'	0,2051565
12'	0,1445995	2'	0,1596481	52'	0,1748015	42'	0,1900704	32'	0,2054657
13'	0,1448995	3'	0,1599501	53'	0,1751057	43'	0,1903770	33'	0,2057750
14'	0,1451995	4'	0,1602522	54'	0,1754100	44'	0,1906837	34'	0,2060843
15'	0,1454996	5'	0,1605543	55'	0,1757143	45'	0,1909905	35'	0,2063937
16'	0,1457997	6'	0,1608564	56'	0,1760187	46'	0,1912973	36'	0,2067031
17'	0,1460999	7'	0,1611586	57'	0,1763231	47'	0,1916041	37'	0,2070126
18'	0,1464001	8'	0,1614608	58'	0,1766275	48'	0,1919110	38'	0,2073221
19'	0,1467003	9'	0,1617631	59'	0,1769320	49'	0,1922179	39'	0,2076317
20'	0,1470006	10'	0,1620654	10° 0'	0,1772366	50'	0,1925249	40'	0,2079414
21'	0,1473009	11'	0,1623677	1'	0,1775412	51'	0,1928319	41'	0,2082511
22'	0,1476013	12'	0,1626701	2'	0,1778458	52'	0,1931390	42'	0,2085609
23'	0,1479017	13'	0,1629725	3'	0,1781505	53'	0,1934461	43'	0,2088707
24'	0,1482021	14'	0,1632750	4'	0,1784552	54'	0,1937533	44'	0,2091806
25'	0,1485026	15'	0,1635775	5'	0,1787599	55'	0,1940605	45'	0,2094905
26'	0,1488031	16'	0,1638800	6'	0,1790647	56'	0,1943678	46'	0,2098005
27'	0,1491037	17'	0,1641826	7'	0,1793696	57'	0,1946752	47'	0,2101106
28'	0,1494043	18'	0,1644853	8'	0,1796745	58'	0,1949826	48'	0,2104207
29'	0,1497049	19'	0,1647880	9'	0,1799794	59'	0,1952901	49'	0,2107309
30'	0,1500056	20'	0,1650907	10'	0,1802844	11° 0'	0,1955976	50'	0,2110411
31'	0,1503063	21'	0,1653935	11'	0,1805895	1'	0,1959052	51'	0,2113514
32'	0,1506070	22'	0,1656963	12'	0,1808946	2'	0,1962128	52'	0,2116618
33'	0,1509078	23'	0,1659992	13'	0,1811998	3'	0,1965204	53'	0,2119722
34'	0,1512086	24'	0,1663021	14'	0,1815050	4'	0,1968281	54'	0,2122826
35'	0,1515095	25'	0,1666051	15'	0,1818102	5'	0,1971359	55'	0,2125931
36'	0,1518104	26'	0,1669081	16'	0,1821155	6'	0,1974437	56'	0,2129037
37'	0,1521114	27'	0,1672111	17'	0,1824209	7'	0,1977516	57'	0,2132143
38'	0,1524124	28'	0,1675142	18'	0,1827263	8'	0,1980595	58'	0,2135250
39'	0,1527134	29'	0,1678173	19'	0,1830317	9'	0,1983675	59'	0,2138357
40'	0,1530144	30'	0,1681205	20'	0,1833372	10'	0,1986755	12° 0'	0,2141465
41'	0,1533155	31'	0,1684237	21'	0,1836427	11'	0,1989836	1'	0,2144574
42'	0,1536167	32'	0,1687270	22'	0,1839483	12'	0,1992917	2'	0,2147683
43'	0,1539179	33'	0,1690303	23'	0,1842539	13'	0,1995999	3'	0,2150793
44'	0,1542191	34'	0,1693336	24'	0,1845596	14'	0,1999081	4'	0,2153903

Tabelle 8b.  $\xi(\vartheta) = \int \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ .

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
12° 5'	0,2157014	12° 55'	0,2313316	13° 45'	0,2471189	14° 35'	0,2630760	15° 25'	0,2792149
6'	0,2160125	56'	0,2316458	46'	0,2474363	36'	0,2633970	26'	0,2795396
7'	0,2163237	57'	0,2319600	47'	0,2477538	37'	0,2637180	27'	0,2798644
8'	0,2166349	58'	0,2322743	48'	0,2480714	38'	0,2640390	28'	0,2801893
9'	0,2169462	59'	0,2325887	49'	0,2483890	39'	0,2643601	29'	0,2805143
10'	0,2172576	13° 0'	0,2329031	50'	0,2487067	40'	0,2646813	30'	0,2808393
11'	0,2175690	1'	0,2332176	51'	0,2490245	41'	0,2650026	31'	0,2811644
12'	0,2178805	2'	0,2335321	52'	0,2493424	42'	0,2653240	32'	0,2814897
13'	0,2181921	3'	0,2338467	53'	0,2496603	43'	0,2656455	33'	0,2818150
14'	0,2185037	4'	0,2341614	54'	0,2499783	44'	0,2659671	34'	0,2821403
15'	0,2188153	5'	0,2344761	55'	0,2502964	45'	0,2662887	35'	0,2824658
16'	0,2191271	6'	0,2347909	56'	0,2506145	46'	0,2666104	36'	0,2827913
17'	0,2194389	7'	0,2351058	57'	0,2509327	47'	0,2669322	37'	0,2831169
18'	0,2197507	8'	0,2354207	58'	0,2512510	48'	0,2672540	38'	0,2834425
19'	0,2200626	9'	0,2357357	59'	0,2515693	49'	0,2675759	39'	0,2837683
20'	0,2203746	10'	0,2360508	14° 0'	0,2518877	50'	0,2678979	40'	0,2840941
21'	0,2206866	11'	0,2363659	1'	0,2522062	51'	0,2682200	41'	0,2844200
22'	0,2209987	12'	0,2366811	2'	0,2525247	52'	0,2685420	42'	0,2847460
23'	0,2213109	13'	0,2369963	3'	0,2528433	53'	0,2688642	43'	0,2850721
24'	0,2216231	14'	0,2373116	4'	0,2531619	54'	0,2691865	44'	0,2853983
25'	0,2219354	15'	0,2376270	5'	0,2534807	55'	0,2695089	45'	0,2857245
26'	0,2222477	16'	0,2379424	6'	0,2537995	56'	0,2698313	46'	0,2860508
27'	0,2225600	17'	0,2382579	7'	0,2541184	57'	0,2701538	47'	0,2863772
28'	0,2228725	18'	0,2385735	8'	0,2544374	58'	0,2704764	48'	0,2867037
29'	0,2231850	19'	0,2388891	9'	0,2547564	59'	0,2707991	49'	0,2870302
30'	0,2234976	20'	0,2392048	10'	0,2550755	15° 0'	0,2711218	50'	0,2873569
31'	0,2238102	21'	0,2395206	11'	0,2553947	1'	0,2714446	51'	0,2876836
32'	0,2241229	22'	0,2398364	12'	0,2557139	2'	0,2717674	52'	0,2880104
33'	0,2244356	23'	0,2401523	13'	0,2560332	3'	0,2720904	53'	0,2883372
34'	0,2247484	24'	0,2404683	14'	0,2563525	4'	0,2724134	54'	0,2886642
35'	0,2250613	25'	0,2407843	15'	0,2566720	5'	0,2727365	55'	0,2889912
36'	0,2253742	26'	0,2411004	16'	0,2569915	6'	0,2730597	56'	0,2893184
37'	0,2256872	27'	0,2414166	17'	0,2573110	7'	0,2733830	57'	0,2896456
38'	0,2260003	28'	0,2417328	18'	0,2576307	8'	0,2737063	58'	0,2899729
39'	0,2263134	29'	0,2420491	19'	0,2579505	9'	0,2740298	59'	0,2903003
40'	0,2266266	30'	0,2423655	20'	0,2582703	10'	0,2743533	16° 0'	0,2906277
41'	0,2269398	31'	0,2426819	21'	0,2585902	11'	0,2746769	1'	0,2909552
42'	0,2272531	32'	0,2429984	22'	0,2589102	12'	0,2750005	2'	0,2912828
43'	0,2275665	33'	0,2433150	23'	0,2592302	13'	0,2753242	3'	0,2916105
44'	0,2278799	34'	0,2436316	24'	0,2595502	14'	0,2756480	4'	0,2919383
45'	0,2281934	35'	0,2439483	25'	0,2598703	15'	0,2759718	5'	0,2922663
46'	0,2285069	36'	0,2442651	26'	0,2601905	16'	0,2762958	6'	0,2925941
47'	0,2288205	37'	0,2445819	27'	0,2605103	17'	0,2766189	7'	0,2929221
48'	0,2291342	38'	0,2448988	28'	0,2608312	18'	0,2769439	8'	0,2932502
49'	0,2294479	39'	0,2452158	29'	0,2611517	19'	0,2772681	9'	0,2935784
50'	0,2297617	40'	0,2455328	30'	0,2614722	20'	0,2775924	10'	0,2939067
51'	0,2300756	41'	0,2458499	31'	0,2617928	21'	0,2779167	11'	0,2942350
52'	0,2303895	42'	0,2461671	32'	0,2621135	22'	0,2782411	12'	0,2945635
53'	0,2307035	43'	0,2464843	33'	0,2624343	23'	0,2785656	13'	0,2948920
54'	0,2310175	44'	0,2468016	34'	0,2627551	24'	0,2788902	14'	0,2952207

$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$
16° 15'	0,2955494	17° 5'	0,3120929	17° 55'	0,3288598	18° 45'	0,3458652	19° 35'	0,3631240
16° 16'	0,2958782	6'	0,3124260	56'	0,3291976	46'	0,3462079	36'	0,3634719
17° 17'	0,2962070	7'	0,3127592	57'	0,3295354	47'	0,3465506	37'	0,3638199
18° 18'	0,2965360	8'	0,3130925	58'	0,3298735	48'	0,3468934	38'	0,3641680
19° 19'	0,2968650	9'	0,3134259	59'	0,3302114	49'	0,3472363	39'	0,3645162
20° 20'	0,2971941	10'	0,3137594	18° 0'	0,3305495	50'	0,3475794	40'	0,3648645
21° 21'	0,2975233	11'	0,3140929	1'	0,3308877	51'	0,3479225	41'	0,3652130
22° 22'	0,2978525	12'	0,3144265	2'	0,3312260	52'	0,3482657	42'	0,3655615
23° 23'	0,2981820	13'	0,3147602	3'	0,3315644	53'	0,3486089	43'	0,3659101
24° 24'	0,2985114	14'	0,3150941	4'	0,3319029	54'	0,3489525	44'	0,3662589
25° 25'	0,2988409	15'	0,3154280	5'	0,3322415	55'	0,3492959	45'	0,3666078
26° 26'	0,2991706	16'	0,3157620	6'	0,3325802	56'	0,3496397	46'	0,3669567
27° 27'	0,2995003	17'	0,3160961	7'	0,3329190	57'	0,3499835	47'	0,3673058
28° 28'	0,2998301	18'	0,3164303	8'	0,3332579	58'	0,3503273	48'	0,3676550
29° 29'	0,3001599	19'	0,3167646	9'	0,3335969	59'	0,3506713	49'	0,3680043
30° 30'	0,3004899	20'	0,3170990	10'	0,3339359	19° 0'	0,3510153	50'	0,3683537
31° 31'	0,3008200	21'	0,3174335	11'	0,3342751	1'	0,3513594	51'	0,3687032
32° 32'	0,3011501	22'	0,3177680	12'	0,3346144	2'	0,3517037	52'	0,3690528
33° 33'	0,3014803	23'	0,3181026	13'	0,3349538	3'	0,3520480	53'	0,3694026
34° 34'	0,3018106	24'	0,3184373	14'	0,3352933	4'	0,3523925	54'	0,3697524
35° 35'	0,3021410	25'	0,3187721	15'	0,3356328	5'	0,3527370	55'	0,3701023
36° 36'	0,3024715	26'	0,3191070	16'	0,3359725	6'	0,3530817	56'	0,3704524
37° 37'	0,3028020	27'	0,3194420	17'	0,3363122	7'	0,3534265	57'	0,3708026
38° 38'	0,3031327	28'	0,3197771	18'	0,3366521	8'	0,3537714	58'	0,3711529
39° 39'	0,3034634	29'	0,3201123	19'	0,3369920	9'	0,3541164	59'	0,3715033
40° 40'	0,3037942	30'	0,3204476	20'	0,3373321	10'	0,3544615	20° 0'	0,3718538
41° 41'	0,3041251	31'	0,3207829	21'	0,3376722	11'	0,3548067	1'	0,3722044
42° 42'	0,3044561	32'	0,3211184	22'	0,3380124	12'	0,3551520	2'	0,3725552
43° 43'	0,3047872	33'	0,3214539	23'	0,3383528	13'	0,3554974	3'	0,3729060
44° 44'	0,3051184	34'	0,3217895	24'	0,3386932	14'	0,3558430	4'	0,3732570
45° 45'	0,3054497	35'	0,3221253	25'	0,3390337	15'	0,3561886	5'	0,3736080
46° 46'	0,3057810	36'	0,3224612	26'	0,3393744	16'	0,3565344	6'	0,3739592
47° 47'	0,3061124	37'	0,3227971	27'	0,3397151	17'	0,3568802	7'	0,3743105
48° 48'	0,3064439	38'	0,3231332	28'	0,3400559	18'	0,3572262	8'	0,3746619
49° 49'	0,3067755	39'	0,3234693	29'	0,3403969	19'	0,3575723	9'	0,3750134
50° 50'	0,3071072	40'	0,3238055	30'	0,3407379	20'	0,3579185	10'	0,3753650
51° 51'	0,3074389	41'	0,3241418	31'	0,3410790	21'	0,3582648	11'	0,3757168
52° 52'	0,3077708	42'	0,3244782	32'	0,3414203	22'	0,3586112	12'	0,3760686
53° 53'	0,3081027	43'	0,3248147	33'	0,3417616	23'	0,3589577	13'	0,3764206
54° 54'	0,3084347	44'	0,3251513	34'	0,3421030	24'	0,3593043	14'	0,3767727
55° 55'	0,3087668	45'	0,3254879	35'	0,3424444	25'	0,3596511	15'	0,3771249
56° 56'	0,3090991	46'	0,3258247	36'	0,3427860	26'	0,3599979	16'	0,3774772
57° 57'	0,3094314	47'	0,3261715	37'	0,3431279	27'	0,3603449	17'	0,3778297
58° 58'	0,3097638	48'	0,3264985	38'	0,3434697	28'	0,3606928	18'	0,3781822
59° 59'	0,3100962	49'	0,3268355	39'	0,3438116	29'	0,3610391	19'	0,3785348
17° 0'	0,3104288	50'	0,3271727	40'	0,3441537	30'	0,3613868	20'	0,3788874
1° 1'	0,3107614	51'	0,3275099	41'	0,3444958	31'	0,3617338	21'	0,3792404
2° 2'	0,3110942	52'	0,3278472	42'	0,3448380	32'	0,3620811	22'	0,3795934
3° 3'	0,3114270	53'	0,3281847	43'	0,3451803	33'	0,3624286	23'	0,3799465
4° 4'	0,3117599	54'	0,3285222	44'	0,3455227	34'	0,3627763	24'	0,3802997

$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$
20° 25'	0,3806530	21° 15'	0,3984691	22° 5'	0,4165900	22° 55'	0,4350345	23° 45'	0,4538226
26'	0,3810065	16'	0,3988285	6'	0,4169557	56'	0,4354068	46'	0,4542020
31'	0,3818601	17'	0,3991880	7'	0,4173215	57'	0,4357792	47'	0,4545815
28'	0,3817137	18'	0,3995476	8'	0,4176874	58'	0,4361518	48'	0,4549612
29'	0,3820675	19'	0,3999073	9'	0,4180534	59'	0,4365245	49'	0,4553411
30'	0,3824214	20'	0,4002672	10'	0,4184196	23° 0'	0,4368974	50'	0,4557211
31'	0,3827754	21'	0,4006271	11'	0,4187859	1'	0,4372704	51'	0,4561013
32'	0,3831296	22'	0,4009872	12'	0,4191523	2'	0,4376436	52'	0,4564816
33'	0,3834838	23'	0,4013475	13'	0,4195189	3'	0,4380169	53'	0,4568620
34'	0,3838382	24'	0,4017078	14'	0,4198856	4'	0,4383904	54'	0,4572426
35'	0,3841927	25'	0,4020083	15'	0,4202524	5'	0,4387640	55'	0,4576223
36'	0,3845473	26'	0,4024289	16'	0,4206194	6'	0,4391377	56'	0,4580041
37'	0,3849020	27'	0,4027896	17'	0,4209865	7'	0,4395116	57'	0,4583851
38'	0,3852569	28'	0,4031504	18'	0,4213537	8'	0,4398856	58'	0,4587662
39'	0,3856118	29'	0,4035114	19'	0,4217211	9'	0,4402597	59'	0,4591475
40'	0,3859669	30'	0,4038725	20'	0,4220885	10'	0,4406340	24° 0'	0,4595290
41'	0,3863221	31'	0,4042337	21'	0,4224562	11'	0,4410085	1'	0,4599106
42'	0,3866774	32'	0,4045950	22'	0,4228239	12'	0,4413830	2'	0,4602924
43'	0,3870328	33'	0,4049565	23'	0,4231918	13'	0,4417577	3'	0,4606743
44'	0,3873884	34'	0,4053181	24'	0,4235598	14'	0,4421325	4'	0,4610564
45'	0,3877440	35'	0,4056798	25'	0,4239280	15'	0,4425075	5'	0,4614386
46'	0,3880998	36'	0,4060416	26'	0,4242962	16'	0,4428826	6'	0,4618210
47'	0,3884557	37'	0,4064046	27'	0,4246647	17'	0,4432578	7'	0,4622035
48'	0,3888117	38'	0,4067657	28'	0,4250332	18'	0,4436332	8'	0,4625862
49'	0,3891678	39'	0,4071279	29'	0,4254019	19'	0,4440087	9'	0,4629690
50'	0,3895241	40'	0,4074902	30'	0,4257707	20'	0,4443844	10'	0,4633519
51'	0,3898805	41'	0,4078527	31'	0,4261396	21'	0,4447602	11'	0,4637350
52'	0,3902370	42'	0,4082153	32'	0,4265087	22'	0,4451362	12'	0,4641183
53'	0,3905936	43'	0,4085780	33'	0,4268779	23'	0,4455123	13'	0,4645017
54'	0,3909503	44'	0,4089409	34'	0,4272472	24'	0,4458885	14'	0,4648853
55'	0,3913072	45'	0,4093038	35'	0,4276167	25'	0,4462649	15'	0,4652690
56'	0,3916641	46'	0,4096669	36'	0,4279863	26'	0,4466414	16'	0,4656528
57'	0,3920202	47'	0,4100301	37'	0,4283561	27'	0,4470180	17'	0,4660368
58'	0,3923784	48'	0,4103935	38'	0,4287259	28'	0,4473947	18'	0,4664210
59'	0,3927358	49'	0,4107570	39'	0,4290960	29'	0,4477716	19'	0,4668053
21° 0'	0,3930932	50'	0,4111206	40'	0,4294661	30'	0,4481486	20'	0,4671898
1'	0,3934508	51'	0,4114843	41'	0,4298364	31'	0,4485259	21'	0,4675744
2'	0,3938084	52'	0,4118482	42'	0,4302068	32'	0,4489034	22'	0,4679592
3'	0,3941662	53'	0,4122122	43'	0,4305773	33'	0,4492811	23'	0,4683441
4'	0,3945241	54'	0,4125763	44'	0,4309480	34'	0,4496588	24'	0,4687292
5'	0,3948822	55'	0,4129405	45'	0,4313188	35'	0,4500366	25'	0,4691144
6'	0,3952403	56'	0,4133049	46'	0,4316898	36'	0,4504146	26'	0,4694998
7'	0,3955986	57'	0,4136694	47'	0,4320609	37'	0,4507927	27'	0,4698853
8'	0,3959569	58'	0,4140341	48'	0,4324321	38'	0,4511709	28'	0,4702710
9'	0,3963154	59'	0,4143988	49'	0,4328035	39'	0,4515493	29'	0,4706568
10'	0,3966741	22° 0'	0,4147637	50'	0,4331750	40'	0,4519278	30'	0,4710428
11'	0,3970328	1'	0,4151287	51'	0,4335466	41'	0,4523065	31'	0,4714289
12'	0,3973917	2'	0,4154939	52'	0,4339184	42'	0,4526853	32'	0,4718151
13'	0,3977507	3'	0,4158591	53'	0,4342903	43'	0,4530642	33'	0,4722016
14'	0,3981097	4'	0,4162245	54'	0,4346623	44'	0,4534433	34'	0,4725882



$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$
24° 35'	0,4729749	25° 25'	0,4925183	26° 15'	0,5124613	27° 5'	0,5328430	27° 55'	0,5586846
36'	0,4738618	26'	0,4929082	16'	0,5128646	6'	0,5332553	56'	0,5541063
37'	0,4737489	27'	0,4938038	17'	0,5132681	7'	0,5336677	57'	0,5545283
38'	0,4741361	28'	0,4936985	18'	0,5136717	8'	0,5340803	58'	0,5549504
39'	0,4745235	29'	0,4940941	19'	0,5140755	9'	0,5344981	59'	0,5553727
40'	0,4749110	30'	0,4944894	20'	0,5144795	10'	0,5349061	28° 0'	0,5557952
41'	0,4752985	31'	0,4948851	21'	0,5148837	11'	0,5353193	1'	0,5562179
42'	0,4756862	32'	0,4952809	22'	0,5152880	12'	0,5357326	2'	0,5566408
43'	0,4760741	33'	0,4956769	23'	0,5156925	13'	0,5361461	3'	0,5570639
44'	0,4764627	34'	0,4960831	24'	0,5160972	14'	0,5365599	4'	0,5574872
45'	0,4768510	35'	0,4964695	25'	0,5165020	15'	0,5369738	5'	0,5579107
46'	0,4772395	36'	0,4968659	26'	0,5169071	16'	0,5373879	6'	0,5583344
47'	0,4776281	37'	0,4972626	27'	0,5173123	17'	0,5378021	7'	0,5587583
48'	0,4780169	38'	0,4976594	28'	0,5177177	18'	0,5382166	8'	0,5591824
49'	0,4784058	39'	0,4980564	29'	0,5181232	19'	0,5386312	9'	0,5596066
50'	0,4787949	40'	0,4984536	30'	0,5185290	20'	0,5390460	10'	0,5600310
51'	0,4791841	41'	0,4988510	31'	0,5189350	21'	0,5394610	11'	0,5604556
52'	0,4795735	42'	0,4992485	32'	0,5193411	22'	0,5398761	12'	0,5608805
53'	0,4799631	43'	0,4996462	33'	0,5197474	23'	0,5402915	13'	0,5613056
54'	0,4803528	44'	0,5000440	34'	0,5201539	24'	0,5407071	14'	0,5617308
55'	0,4807427	45'	0,5004421	35'	0,5205606	25'	0,5411229	15'	0,5621563
56'	0,4811327	46'	0,5008402	36'	0,5209674	26'	0,5415389	16'	0,5625820
57'	0,4815229	47'	0,5012386	37'	0,5213744	27'	0,5419551	17'	0,5630079
58'	0,4819132	48'	0,5016371	38'	0,5217815	28'	0,5423714	18'	0,5634339
59'	0,4823037	49'	0,5020358	39'	0,5221888	29'	0,5427880	19'	0,5638602
25° 0'	0,4826944	50	0,5024346	40'	0,5225963	30'	0,5432047	20'	0,5642866
1'	0,4830852	51'	0,5028336	41'	0,5230040	31'	0,5436216	21'	0,5647133
2'	0,4834762	52'	0,5032328	42'	0,5234119	32'	0,5440387	22'	0,5651402
3'	0,4838674	53'	0,5036322	43'	0,5238199	33'	0,5444560	23'	0,5655672
4'	0,4842587	54'	0,5040317	44'	0,5242282	34'	0,5448735	24'	0,5659945
5'	0,4846502	55'	0,5044314	45'	0,5246366	35'	0,5452911	25'	0,5664220
6'	0,4850418	56'	0,5048313	46'	0,5250452	36'	0,5457090	26'	0,5668496
7'	0,4854335	57'	0,5052318	47'	0,5254539	37'	0,5461270	27'	0,5672775
8'	0,4858255	58'	0,5056315	48'	0,5258629	38'	0,5465453	28'	0,5677056
9'	0,4862175	59'	0,5060319	49'	0,5262720	39'	0,5469637	29'	0,5681338
10'	0,4866098	26° 0'	0,5064324	50'	0,5266813	40'	0,5473823	30'	0,5685623
11'	0,4870022	1'	0,5068331	51'	0,5270908	41'	0,5478011	31'	0,5689910
12'	0,4873948	2'	0,5072340	52'	0,5275004	42'	0,5482201	32'	0,5694198
13'	0,4877876	3'	0,5076350	53'	0,5279103	43'	0,5486393	33'	0,5698489
14'	0,4881805	4'	0,5080362	54'	0,5283204	44'	0,5490586	34'	0,5702782
15'	0,4885736	5'	0,5084376	55'	0,5287306	45'	0,5494783	35'	0,5707077
16'	0,4889669	6'	0,5088392	56'	0,5291410	46'	0,5498981	36'	0,5711374
17'	0,4893603	7'	0,5092410	57'	0,5295517	47'	0,5503180	37'	0,5715673
18'	0,4897539	8'	0,5096429	58'	0,5299626	48'	0,5507382	38'	0,5719973
19'	0,4901476	9'	0,5100450	59'	0,5303734	49'	0,5511585	39'	0,5724277
20'	0,4905415	10'	0,5104473	27° 0'	0,5307845	50'	0,5515790	40'	0,5728582
21'	0,4909355	11'	0,5108498	1'	0,5311958	51'	0,5519998	41'	0,5732889
22'	0,4913297	12'	0,5112524	2'	0,5316074	52'	0,5524207	42'	0,5737199
23'	0,4917240	13'	0,5116552	3'	0,5320191	53'	0,5528418	43'	0,5741510
24'	0,4921186	14'	0,5120581	4'	0,5324310	54'	0,5532781	44'	0,5745824



$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$
28° 45'	0,5750139	29° 35'	0,5968598	30° 25'	0,6192539	31° 15'	0,6422290	32° 5'	0,6658206
46'	0,5754457	36'	0,5973022	26'	0,6197076	16'	0,6426947	6'	0,6662990
47'	0,5758776	37'	0,5977448	27'	0,6201616	17'	0,6431606	7'	0,6667777
48'	0,5763098	38'	0,5981877	28'	0,6206157	18'	0,6436268	8'	0,6672566
49'	0,5767422	39'	0,5986308	29'	0,6210701	19'	0,6440932	9'	0,6677358
50'	0,5771748	40'	0,5990741	30'	0,6215247	20'	0,6445598	10'	0,6682152
51'	0,5776076	41'	0,5995176	31'	0,6219795	21'	0,6450267	11'	0,6686949
52'	0,5780406	42'	0,5999613	32'	0,6224346	22'	0,6454939	12'	0,6691749
53'	0,5784738	43'	0,6004052	33'	0,6228899	23'	0,6459613	13'	0,6696551
54'	0,5789072	44'	0,6008494	34'	0,6233455	24'	0,6464289	14'	0,6701355
55'	0,5793408	45'	0,6012938	35'	0,6238013	25'	0,6468968	15'	0,6706162
56'	0,5797746	46'	0,6017384	36'	0,6242573	26'	0,6473650	16'	0,6710972
57'	0,5802086	47'	0,6021832	37'	0,6247136	27'	0,6478334	17'	0,6715785
58'	0,5806429	48'	0,6026283	38'	0,6251701	28'	0,6483020	18'	0,6720600
59'	0,5810773	49'	0,6030736	39'	0,6256269	29'	0,6487709	19'	0,6725418
29° 0'	0,5815120	50'	0,6035191	40'	0,6260839	30'	0,6492401	20'	0,6730239
1'	0,5819469	51'	0,6039649	41'	0,6265411	31'	0,6497095	21'	0,6735062
2'	0,5823820	52'	0,6044108	42'	0,6269986	32'	0,6501792	22'	0,6739892
3'	0,5828174	53'	0,6048570	43'	0,6274563	33'	0,6506491	23'	0,6744725
4'	0,5832529	54'	0,6053034	44'	0,6279142	34'	0,6511192	24'	0,6749559
5'	0,5836887	55'	0,6057500	45'	0,6283723	35'	0,6515896	25'	0,6754394
6'	0,5841246	56'	0,6061968	46'	0,6288307	36'	0,6520603	26'	0,6759229
7'	0,5845607	57'	0,6066438	47'	0,6292893	37'	0,6525312	27'	0,6764065
8'	0,5849971	58'	0,6070910	48'	0,6297482	38'	0,6530023	28'	0,6768901
9'	0,5854336	59'	0,6075386	49'	0,6302073	39'	0,6534737	29'	0,6773742
10'	0,5858704	30° 0'	0,6079863	50'	0,6306667	40'	0,6539454	30'	0,6778587
11'	0,5863074	1'	0,6084343	51'	0,6311263	41'	0,6544173	31'	0,6783436
12'	0,5867446	2'	0,6088825	52'	0,6315861	42'	0,6548895	32'	0,6788289
13'	0,5871820	3'	0,6093310	53'	0,6320462	43'	0,6553619	33'	0,6793147
14'	0,5876197	4'	0,6097796	54'	0,6325065	44'	0,6558346	34'	0,6798010
15'	0,5880575	5'	0,6102285	55'	0,6329670	45'	0,6563076	35'	0,6802878
16'	0,5884956	6'	0,6106776	56'	0,6334277	46'	0,6567808	36'	0,6807737
17'	0,5889339	7'	0,6111269	57'	0,6338887	47'	0,6572543	37'	0,6812602
18'	0,5893724	8'	0,6115764	58'	0,6343500	48'	0,6577280	38'	0,6817471
19'	0,5898111	9'	0,6120261	59'	0,6348115	49'	0,6582020	39'	0,6822343
20'	0,5902500	10'	0,6124761	31° 0'	0,6352732	50'	0,6586762	40'	0,6827217
21'	0,5906981	11'	0,6129263	1'	0,6357352	51'	0,6591507	41'	0,6832095
22'	0,5911284	12'	0,6133768	2'	0,6361975	52'	0,6596255	42'	0,6836977
23'	0,5915680	13'	0,6138275	3'	0,6366600	53'	0,6601005	43'	0,6841858
24'	0,5920078	14'	0,6142785	4'	0,6371228	54'	0,6605757	44'	0,6846743
25'	0,5924478	15'	0,6147296	5'	0,6375858	55'	0,6610512	45'	0,6851682
26'	0,5928880	16'	0,6151810	6'	0,6380490	56'	0,6615269	46'	0,6856523
27'	0,5933285	17'	0,6156326	7'	0,6385125	57'	0,6620029	47'	0,6861416
28'	0,5937691	18'	0,6160845	8'	0,6389762	58'	0,6624792	48'	0,6866313
29'	0,5942100	19'	0,6165366	9'	0,6394401	59'	0,6629557	49'	0,6871212
30'	0,5946511	20'	0,6169889	10'	0,6399044	32° 0'	0,6634325	50'	0,6876114
31'	0,5950924	21'	0,6174414	11'	0,6403688	1'	0,6639096	51'	0,6881019
32'	0,5955339	22'	0,6178942	12'	0,6408335	2'	0,6643870	52'	0,6885927
33'	0,5959757	23'	0,6183472	13'	0,6412984	3'	0,6648646	53'	0,6890837
34'	0,5964176	24'	0,6188004	14'	0,6417636	4'	0,6653425	54'	0,6895750

Tabelle 8b.  $\xi(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$

$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$
32° 55'	0,6900666	33° 45'	0,7150071	34° 35'	0,7406856	35° 25'	0,7671487	36° 15'	0,7944451
56'	0,6905585	46'	0,7155183	38'	0,7412070	28'	0,7676863	16'	0,7949999
57'	0,6910506	47'	0,7160198	37'	0,7417288	27'	0,7682242	17'	0,7955550
58'	0,6915430	48'	0,7165268	38'	0,7422508	28'	0,7687625	18'	0,7961105
59'	0,6920357	49'	0,7170337	39'	0,7427732	29'	0,7693011	19'	0,7966663
38° 0'	0,6925287	50'	0,7175412	40'	0,7432959	30'	0,7698400	20'	0,7972226
1'	0,6930219	51'	0,7180489	41'	0,7438189	31'	0,7703793	21'	0,7977791
2'	0,6935154	52'	0,7185569	42'	0,7443422	32'	0,7709188	22'	0,7983359
3'	0,6940092	53'	0,7190653	43'	0,7448653	33'	0,7714588	23'	0,7988933
4'	0,6945033	54'	0,7195737	44'	0,7453887	34'	0,7719990	24'	0,7994510
5'	0,6949977	55'	0,7200825	45'	0,7459140	35'	0,7725397	25'	0,8000090
6'	0,6954924	56'	0,7205916	46'	0,7464385	36'	0,7730806	26'	0,8005678
7'	0,6959873	57'	0,7211010	47'	0,7469634	37'	0,7736219	27'	0,8011260
8'	0,6964825	58'	0,7216107	48'	0,7474886	38'	0,7741635	28'	0,8016851
9'	0,6969780	59'	0,7221207	49'	0,7480141	39'	0,7747055	29'	0,8022446
10'	0,6974738	34° 0'	0,7226311	50'	0,7485399	40'	0,7752478	30'	0,8028044
11'	0,6979698	1'	0,7231418	51'	0,7490661	41'	0,7757904	31'	0,8033646
12'	0,6984662	2'	0,7236528	52'	0,7495925	42'	0,7763334	32'	0,8039251
13'	0,6989629	3'	0,7241640	53'	0,7501193	43'	0,7768767	33'	0,8044861
14'	0,6994598	4'	0,7246756	54'	0,7506465	44'	0,7774204	34'	0,8050473
15'	0,6999570	5'	0,7251875	55'	0,7511740	45'	0,7779644	35'	0,8056090
16'	0,7004545	6'	0,7256997	56'	0,7517017	46'	0,7785088	36'	0,8061710
17'	0,7009523	7'	0,7262122	57'	0,7522297	47'	0,7790535	37'	0,8067334
18'	0,7014504	8'	0,7267250	58'	0,7527581	48'	0,7795985	38'	0,8072961
19'	0,7019488	9'	0,7272380	59'	0,7532863	49'	0,7801433	39'	0,8078592
20'	0,7024474	10'	0,7277514	35° 0'	0,7538159	50'	0,7806895	40'	0,8084227
21'	0,7029464	11'	0,7282651	1'	0,7543454	51'	0,7812356	41'	0,8089865
22'	0,7034456	12'	0,7287791	2'	0,7548752	52'	0,7817820	42'	0,8095507
23'	0,7039451	13'	0,7292934	3'	0,7554052	53'	0,7823287	43'	0,8101153
24'	0,7044449	14'	0,7298080	4'	0,7559356	54'	0,7828758	44'	0,8106802
25'	0,7049449	15'	0,7303229	5'	0,7564663	55'	0,7834232	45'	0,8112455
26'	0,7054453	16'	0,7308381	6'	0,7569973	56'	0,7839710	46'	0,8118112
27'	0,7059459	17'	0,7313536	7'	0,7575286	57'	0,7845191	47'	0,8123773
28'	0,7064468	18'	0,7318694	8'	0,7580603	58'	0,7850676	48'	0,8129437
29'	0,7069480	19'	0,7323855	9'	0,7585923	59'	0,7856164	49'	0,8135105
30'	0,7074495	20'	0,7329020	10'	0,7591246	36° 0'	0,7861656	50'	0,8140776
31'	0,7079513	21'	0,7334187	11'	0,7596572	1'	0,7867151	51'	0,8146452
32'	0,7084534	22'	0,7339358	12'	0,7601902	2'	0,7872650	52'	0,8152131
33'	0,7089558	23'	0,7344531	13'	0,7607235	3'	0,7878152	53'	0,8157813
34'	0,7094585	24'	0,7349708	14'	0,7612571	4'	0,7883657	54'	0,8163500
35'	0,7099614	25'	0,7354888	15'	0,7617911	5'	0,7889166	55'	0,8169191
36'	0,7104647	26'	0,7360071	16'	0,7623253	6'	0,7894679	56'	0,8174885
37'	0,7109682	27'	0,7365257	17'	0,7628600	7'	0,7900195	57'	0,8180583
38'	0,7114720	28'	0,7370446	18'	0,7633949	8'	0,7905714	58'	0,8186285
39'	0,7119761	29'	0,7375639	19'	0,7639302	9'	0,7911237	59'	0,8191990
40'	0,7124805	30'	0,7380834	20'	0,7644658	10'	0,7916764	37° 0'	0,8197699
41'	0,7129852	31'	0,7386032	21'	0,7650017	11'	0,7922294	1'	0,8203411
42'	0,7134902	32'	0,7391233	22'	0,7655380	12'	0,7927828	2'	0,8209127
43'	0,7139955	33'	0,7396437	23'	0,7660748	13'	0,7933366	3'	0,8214847
44'	0,7145011	34'	0,7401645	24'	0,7666115	14'	0,7938907	4'	0,8220571

Tabelle 8b.  $\xi(\vartheta) = \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ .

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
37° 5'	0,8226299	37° 55'	0,8517595	38° 45'	0,8818965	39° 35'	0,9181074	40° 25'	0,9454651
6'	0,8232030	56'	0,8523521	46'	0,8825100	36'	0,9137481	26'	0,9461245
7'	0,8237765	57'	0,8529451	47'	0,8831239	37'	0,9143792	27'	0,9467843
8'	0,8243504	58'	0,8535385	48'	0,8837382	38'	0,9150158	28'	0,9474447
9'	0,8249247	59'	0,8541323	49'	0,8843530	39'	0,9156529	29'	0,9481056
10'	0,8254993	38° 0'	0,8547266	50'	0,8849680	40'	0,9162904	30'	0,9487669
11'	0,8260744	1'	0,8553213	51'	0,8855836	41'	0,9169284	31'	0,9494287
12'	0,8266498	2'	0,8559164	52'	0,8861996	42'	0,9175668	32'	0,9500911
13'	0,8272256	3'	0,8565119	53'	0,8868161	43'	0,9182057	33'	0,9507539
14'	0,8278018	4'	0,8571078	54'	0,8874330	44'	0,9188450	34'	0,9514172
15'	0,8283783	5'	0,8577042	55'	0,8880504	45'	0,9194848	35'	0,9520810
16'	0,8289553	6'	0,8583009	56'	0,8886683	46'	0,9201251	36'	0,9527453
17'	0,8295326	7'	0,8588980	57'	0,8892865	47'	0,9207658	37'	0,9534101
18'	0,8301103	8'	0,8594956	58'	0,8899052	48'	0,9214070	38'	0,9540753
19'	0,8306884	9'	0,8600936	59'	0,8905244	49'	0,9220487	39'	0,9547411
20'	0,8312669	10'	0,8606919	39° 0'	0,8911439	50'	0,9226908	40'	0,9554074
21'	0,8318458	11'	0,8612907	1'	0,8917638	51'	0,9233334	41'	0,9560742
22'	0,8324250	12'	0,8618899	2'	0,8923842	52'	0,9239764	42'	0,9567415
23'	0,8330047	13'	0,8624895	3'	0,8930050	53'	0,9246200	43'	0,9574094
24'	0,8335847	14'	0,8630895	4'	0,8936262	54'	0,9252640	44'	0,9580777
25'	0,8341650	15'	0,8636899	5'	0,8942479	55'	0,9259085	45'	0,9587466
26'	0,8347458	16'	0,8642907	6'	0,8948700	56'	0,9265534	46'	0,9594159
27'	0,8353269	17'	0,8648919	7'	0,8954926	57'	0,9271988	47'	0,9600858
28'	0,8359084	18'	0,8654936	8'	0,8961157	58'	0,9278448	48'	0,9607561
29'	0,8364904	19'	0,8660957	9'	0,8967393	59'	0,9284911	49'	0,9614269
30'	0,8370727	20'	0,8666982	10'	0,8973632	40° 0'	0,9291380	50'	0,9620982
31'	0,8376555	21'	0,8673010	11'	0,8979876	1'	0,9297853	51'	0,9627700
32'	0,8382386	22'	0,8679044	12'	0,8986125	2'	0,9304332	52'	0,9634424
33'	0,8388222	23'	0,8685081	13'	0,8992378	3'	0,9310815	53'	0,9641152
34'	0,8394061	24'	0,8691122	14'	0,8998635	4'	0,9317302	54'	0,9647886
35'	0,8399904	25'	0,8697167	15'	0,9004897	5'	0,9323795	55'	0,9654626
36'	0,8405751	26'	0,8703216	16'	0,9011163	6'	0,9330292	56'	0,9661370
37'	0,8411602	27'	0,8709270	17'	0,9017434	7'	0,9336794	57'	0,9668120
38'	0,8417457	28'	0,8715327	18'	0,9023709	8'	0,9343301	58'	0,9674874
39'	0,8423316	29'	0,8721390	19'	0,9029988	9'	0,9349812	59'	0,9681634
40'	0,8429179	30'	0,8727456	20'	0,9036272	10'	0,9356328	41° 0'	0,9688398
41'	0,8435045	31'	0,8733527	21'	0,9042560	11'	0,9362849	1'	0,9695166
42'	0,8440916	32'	0,8739602	22'	0,9048853	12'	0,9369375	2'	0,9701940
43'	0,8446790	33'	0,8745682	23'	0,9055150	13'	0,9375905	3'	0,9708719
44'	0,8452667	34'	0,8751765	24'	0,9061452	14'	0,9382440	4'	0,9715504
45'	0,8458549	35'	0,8757853	25'	0,9067757	15'	0,9388980	5'	0,9722298
46'	0,8464435	36'	0,8763945	26'	0,9074067	16'	0,9395525	6'	0,9729088
47'	0,8470326	37'	0,8770041	27'	0,9080382	17'	0,9402075	7'	0,9735888
48'	0,8476220	38'	0,8776141	28'	0,9086701	18'	0,9408630	8'	0,9742694
49'	0,8482119	39'	0,8782245	29'	0,9093026	19'	0,9415190	9'	0,9749505
50'	0,8488022	40'	0,8788354	30'	0,9099355	20'	0,9421755	10'	0,9756321
51'	0,8493929	41'	0,8794467	31'	0,9105690	21'	0,9428324	11'	0,9763142
52'	0,8499840	42'	0,8800585	32'	0,9112029	22'	0,9434899	12'	0,9769968
53'	0,8505754	43'	0,8806707	33'	0,9118373	23'	0,9441478	13'	0,9776799
54'	0,8511673	44'	0,8812834	34'	0,9124721	24'	0,9448062	14'	0,9783635

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
41° 15'	0,9790476	42° 5'	1,0189407	42° 55'	1,0502364	43° 45'	1,0880351	44° 35'	1,1274463
16'	0,9797823	6'	1,0146526	56'	1,0509773	46'	1,0888072	36'	1,1282518
17'	0,9804175	7'	1,0153651	57'	1,0517187	49'	1,0895799	37'	1,1290580
18'	0,9811033	8'	1,0160782	58'	1,0524609	48'	1,0903538	38'	1,1298648
19'	0,9817896	9'	1,0167918	59'	1,0532036	49'	1,0911272	39'	1,1306725
20'	0,9824765	10'	1,0175060	43° 0'	1,0539469	50'	1,0919018	40'	1,1314807
21'	0,9831639	11'	1,0182207	1'	1,0546909	51'	1,0926771	41'	1,1322896
22'	0,9838519	12'	1,0189359	2'	1,0554355	52'	1,0934530	42'	1,1330993
23'	0,9845403	13'	1,0196516	3'	1,0561806	53'	1,0942296	43'	1,1339097
24'	0,9852293	14'	1,0203679	4'	1,0569264	54'	1,0950068	44'	1,1347207
25'	0,9859188	15'	1,0210848	5'	1,0576727	55'	1,0957847	45'	1,1355324
26'	0,9866089	16'	1,0218022	6'	1,0584197	56'	1,0965632	46'	1,1363449
27'	0,9872994	17'	1,0225208	7'	1,0591672	57'	1,0973425	47'	1,1371581
28'	0,9879905	18'	1,0232389	8'	1,0599154	58'	1,0981223	48'	1,1379719
29'	0,9886822	19'	1,0239582	9'	1,0606642	59'	1,0989028	49'	1,1387864
30'	0,9893748	20'	1,0246781	10'	1,0614136	44° 0'	1,0996840	50'	1,1396016
31'	0,9900669	21'	1,0253985	11'	1,0621636	1'	1,1004658	51'	1,1404176
32'	0,9907600	22'	1,0261195	12'	1,0629142	2'	1,1012483	52'	1,1412342
33'	0,9914537	23'	1,0268410	13'	1,0636654	3'	1,1020314	53'	1,1420516
34'	0,9921480	24'	1,0275631	14'	1,0644173	4'	1,1028152	54'	1,1428697
35'	0,9928428	25'	1,0282856	15'	1,0651698	5'	1,1035997	55'	1,1436885
36'	0,9935381	26'	1,0290088	16'	1,0659229	6'	1,1043848	56'	1,1445080
37'	0,9942340	27'	1,0297325	17'	1,0666766	7'	1,1051706	57'	1,1453283
38'	0,9949305	28'	1,0304569	18'	1,0674309	8'	1,1059570	58'	1,1461493
39'	0,9956275	29'	1,0311818	19'	1,0681858	9'	1,1067441	59'	1,1469710
40'	0,9963251	30'	1,0319078	20'	1,0689414	10'	1,1075319	45° 0'	1,1477934
41'	0,9970232	31'	1,0326334	21'	1,0696976	11'	1,1083204	1'	1,1486166
42'	0,9977218	32'	1,0333602	22'	1,0704544	12'	1,1091095	2'	1,1494405
43'	0,9984209	33'	1,0340875	23'	1,0712118	13'	1,1098993	3'	1,1502651
44'	0,9991206	34'	1,0348154	24'	1,0719699	14'	1,1106898	4'	1,1510904
45'	0,9998208	35'	1,0355438	25'	1,0727286	15'	1,1114810	5'	1,1519164
46'	1,0005216	36'	1,0362729	26'	1,0734879	16'	1,1122728	6'	1,1527432
47'	1,0012229	37'	1,0370025	27'	1,0742479	17'	1,1130653	7'	1,1535707
48'	1,0019248	38'	1,0377328	28'	1,0750084	18'	1,1138585	8'	1,1543988
49'	1,0026272	39'	1,0384636	29'	1,0757697	19'	1,1146524	9'	1,1552277
50'	1,0033301	40'	1,0391950	30'	1,0765315	20'	1,1154469	10'	1,1560574
51'	1,0040336	41'	1,0399269	31'	1,0772940	21'	1,1162422	11'	1,1568877
52'	1,0047376	42'	1,0406594	32'	1,0780571	22'	1,1170380	12'	1,1577188
53'	1,0054423	43'	1,0413925	33'	1,0788209	23'	1,1178346	13'	1,1585505
54'	1,0061474	44'	1,0421262	34'	1,0795853	24'	1,1186318	14'	1,1593830
55'	1,0068531	45'	1,0428605	35'	1,0803503	25'	1,1194296	15'	1,1602162
56'	1,0075594	46'	1,0435954	36'	1,0811159	26'	1,1202281	16'	1,1610502
57'	1,0082662	47'	1,0443309	37'	1,0818820	27'	1,1210273	17'	1,1618849
58'	1,0089736	48'	1,0450670	38'	1,0826489	28'	1,1218272	18'	1,1627204
59'	1,0096815	49'	1,0458037	39'	1,0834163	29'	1,1226278	19'	1,1635567
42° 0'	1,0103900	50'	1,0465410	40'	1,0841844	30'	1,1234291	20'	1,1643937
1'	1,0110990	51'	1,0472788	41'	1,0849582	31'	1,1242312	21'	1,1652315
2'	1,0118086	52'	1,0480173	42'	1,0857227	32'	1,1250339	22'	1,1660700
3'	1,0125187	53'	1,0487564	43'	1,0864929	33'	1,1258374	23'	1,1669092
4'	1,0132294	54'	1,0494961	44'	1,0872636	34'	1,1266415	24'	1,1677491

Tabelle 8b.  $\xi(\phi) = \int \frac{d\phi}{\cos^2 \phi}$ .

$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$
45° 25'	1,1685897	46° 15'	1,2115958	47° 5'	1,2566077	47° 55'	1,3087825	48° 45'	1,3582937
26'	1,1694311	16'	1,2124759	6'	1,2575295	56'	1,3047491	46'	1,3543090
27'	1,1702732	17'	1,2133568	7'	1,2584522	57'	1,3057163	47'	1,3553254
28'	1,1711161	18'	1,2142385	8'	1,2593758	58'	1,3066853	48'	1,3563427
29'	1,1719597	19'	1,2151209	9'	1,2603002	59'	1,3076549	49'	1,3573610
30'	1,1728041	20'	1,2160041	10'	1,2612254	48° 0'	1,3086253	50'	1,3583804
31'	1,1736492	21'	1,2168881	11'	1,2621515	1'	1,3095968	51'	1,3594008
32'	1,1744951	22'	1,2177730	12'	1,2630785	2'	1,3105692	52'	1,3604222
33'	1,1753418	23'	1,2186587	13'	1,2640062	3'	1,3115426	53'	1,3614446
34'	1,1761892	24'	1,2195452	14'	1,2649348	4'	1,3125169	54'	1,3624681
35'	1,1770374	25'	1,2204326	15'	1,2658642	5'	1,3134921	55'	1,3634926
36'	1,1778863	26'	1,2213208	16'	1,2667946	6'	1,3144683	56'	1,3645180
37'	1,1787360	27'	1,2222098	17'	1,2677259	7'	1,3154454	57'	1,3655445
38'	1,1795865	28'	1,2230996	18'	1,2686579	8'	1,3164235	58'	1,3665721
39'	1,1804377	29'	1,2239902	19'	1,2695912	9'	1,3174025	59'	1,3676007
40'	1,1812897	30'	1,2248817	20'	1,2705252	10'	1,3183824	49° 0'	1,3686303
41'	1,1821424	31'	1,2257739	21'	1,2714601	11'	1,3193633	1'	1,3696609
42'	1,1829959	32'	1,2266670	22'	1,2723959	12'	1,3203452	2'	1,3706926
43'	1,1838502	33'	1,2275609	23'	1,2733326	13'	1,3213279	3'	1,3717253
44'	1,1847052	34'	1,2284557	24'	1,2742702	14'	1,3223116	4'	1,3727590
45'	1,1855610	35'	1,2293512	25'	1,2752087	15'	1,3232963	5'	1,3737938
46'	1,1864175	36'	1,2302476	26'	1,2761480	16'	1,3242819	6'	1,3748297
47'	1,1872748	37'	1,2311448	27'	1,2770883	16'	1,3252686	7'	1,3758666
48'	1,1881329	38'	1,2320429	28'	1,2780294	18'	1,3262562	8'	1,3769045
49'	1,1889917	39'	1,2329418	29'	1,2789715	19'	1,3272448	9'	1,3779435
50'	1,1898513	40'	1,2338415	30'	1,2799144	20'	1,3282345	10'	1,3789836
51'	1,1907116	41'	1,2347420	31'	1,2808581	21'	1,3292251	11'	1,3800247
52'	1,1915727	42'	1,2356434	32'	1,2818028	22'	1,3302167	12'	1,3810669
53'	1,1924346	43'	1,2365456	33'	1,2827484	23'	1,3312092	13'	1,3821102
54'	1,1932973	44'	1,2374486	34'	1,2836949	24'	1,3322027	14'	1,3831545
55'	1,1941607	45'	1,2383525	35'	1,2846423	25'	1,3331970	15'	1,3841999
56'	1,1950249	46'	1,2392572	36'	1,2855906	26'	1,3341924	16'	1,3852464
57'	1,1958898	47'	1,2401627	37'	1,2865399	27'	1,3351887	17'	1,3862939
58'	1,1967556	48'	1,2410691	38'	1,2874901	28'	1,3361861	18'	1,3873424
59'	1,1976222	49'	1,2419763	39'	1,2884411	29'	1,3371845	19'	1,3883919
46° 0'	1,1984896	50'	1,2428844	40'	1,2893932	30'	1,3381840	20'	1,3894425
1'	1,1993578	51'	1,2437933	41'	1,2903461	31'	1,3391846	21'	1,3904942
2'	1,2002269	52'	1,2447029	42'	1,2912999	32'	1,3401854	22'	1,3915469
3'	1,2010967	53'	1,2456135	43'	1,2922547	33'	1,3411878	23'	1,3926007
4'	1,2019673	54'	1,2465251	44'	1,2932103	34'	1,3421912	24'	1,3936556
5'	1,2028386	55'	1,2474373	45'	1,2941669	35'	1,3431956	25'	1,3947116
6'	1,2037108	56'	1,2483504	46'	1,2951242	36'	1,3442011	26'	1,3957686
7'	1,2045837	57'	1,2492644	47'	1,2960827	37'	1,3452074	27'	1,3968267
8'	1,2054574	58'	1,2501793	48'	1,2970420	38'	1,3462146	28'	1,3978860
9'	1,2063319	59'	1,2510950	49'	1,2980021	39'	1,3472229	29'	1,3989462
10'	1,2072072	47° 0'	1,2520116	50'	1,2989631	40'	1,3482322	30'	1,4000076
11'	1,2080833	1'	1,2529291	51'	1,2999251	41'	1,3492425	31'	1,4010700
12'	1,2089602	2'	1,2538474	52'	1,3008880	42'	1,3502538	32'	1,4021335
13'	1,2098379	3'	1,2547667	53'	1,3018518	43'	1,3512661	33'	1,4031981
14'	1,2107165	4'	1,2556867	54'	1,3028168	44'	1,3522794	34'	1,4042638

Tabelle 8b.  $\xi(\phi) = \int \frac{d\phi}{\cos^3 \phi}$ .

$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$
49° 35'	1,4053306	50° 25'	1,460104	51° 15'	1,517847	52° 5'	1,57816	52° 55'	1,643299
36'	1,4063985	26'	1,461229	16'	1,519034	6'	1,580070	56'	1,644626
37'	1,4074676	27'	1,462355	17'	1,520222	7'	1,581326	57'	1,645956
38'	1,4085377	28'	1,463483	18'	1,521411	8'	1,582583	58'	1,647286
39'	1,4096088	29'	1,464611	19'	1,522602	9'	1,583841	59'	1,648618
40'	1,4106818	30'	1,465741	20'	1,523794	10'	1,585101	53° 0'	1,649952
41'	1,4117548	31'	1,466872	21'	1,524987	11'	1,586362	1'	1,651287
42'	1,4128293	32'	1,468004	22'	1,526182	12'	1,587625	2'	1,652624
43'	1,4139048	33'	1,469137	23'	1,527378	13'	1,588889	3'	1,653962
44'	1,4149815	34'	1,470271	24'	1,528575	14'	1,590155	4'	1,655302
45'	1,4160593	35'	1,471407	25'	1,529774	15'	1,591422	5'	1,656644
46'	1,4171383	36'	1,472544	26'	1,530973	16'	1,592690	6'	1,657987
47'	1,4182183	37'	1,473682	27'	1,532174	17'	1,593960	7'	1,659332
48'	1,4192995	38'	1,474822	28'	1,533377	18'	1,595231	8'	1,660678
49'	1,4203818	39'	1,475963	29'	1,534581	19'	1,596504	9'	1,662026
50'	1,4214652	40'	1,477105	30'	1,535786	20'	1,597778	10'	1,663375
51'	1,4225497	41'	1,478248	31'	1,536993	21'	1,599054	11'	1,664727
52'	1,4236354	42'	1,479392	32'	1,538200	22'	1,600331	12'	1,666079
53'	1,4247221	43'	1,480537	33'	1,539409	23'	1,601609	13'	1,667433
54'	1,4258100	44'	1,481684	34'	1,540620	24'	1,602889	14'	1,668789
55'	1,4268993	45'	1,482831	35'	1,541832	25'	1,604170	15'	1,670146
56'	1,4279894	46'	1,483980	36'	1,543045	26'	1,605453	16'	1,671505
57'	1,4290803	47'	1,485131	37'	1,544260	27'	1,606737	17'	1,672865
58'	1,4301731	48'	1,486282	38'	1,545475	28'	1,608023	18'	1,674227
59'	1,4312667	49'	1,487435	39'	1,546692	29'	1,609310	19'	1,675591
50° 0'	1,432361	50'	1,488589	40'	1,547911	30'	1,610599	20'	1,676956
1'	1,433457	51'	1,489744	41'	1,549131	31'	1,611889	21'	1,678323
2'	1,434554	52'	1,490900	42'	1,550352	32'	1,613181	22'	1,679691
3'	1,435652	53'	1,492058	43'	1,551574	33'	1,614474	23'	1,681061
4'	1,436751	54'	1,493217	44'	1,552798	34'	1,615768	24'	1,682433
5'	1,437851	55'	1,494377	45'	1,554023	35'	1,617064	25'	1,683806
6'	1,438953	56'	1,495539	46'	1,555250	36'	1,618362	26'	1,685181
7'	1,440056	57'	1,496701	47'	1,556478	37'	1,619661	27'	1,686558
8'	1,441160	58'	1,497865	48'	1,557707	38'	1,620961	28'	1,687936
9'	1,442265	59'	1,499031	49'	1,558937	39'	1,622263	29'	1,689316
10'	1,443371	51° 0'	1,500197	50'	1,560169	40'	1,623567	30'	1,690697
11'	1,444478	1'	1,501365	51'	1,561403	41'	1,624872	31'	1,692080
12'	1,445587	2'	1,502538	52'	1,562637	42'	1,626178	32'	1,693464
13'	1,446697	3'	1,503704	53'	1,563874	43'	1,627486	33'	1,694851
14'	1,447808	4'	1,504875	54'	1,565111	44'	1,628795	34'	1,696238
15'	1,448920	5'	1,506048	55'	1,566350	45'	1,630106	35'	1,697628
16'	1,450033	6'	1,507222	56'	1,567591	46'	1,631419	36'	1,699019
17'	1,451148	7'	1,508398	57'	1,568832	47'	1,632733	37'	1,700412
18'	1,452263	8'	1,509574	58'	1,570076	48'	1,634048	38'	1,701806
19'	1,453379	9'	1,510752	59'	1,571320	49'	1,635365	39'	1,703203
20'	1,454497	10'	1,511932	52° 0'	1,572566	50'	1,636684	40'	1,704600
21'	1,455616	11'	1,513112	1'	1,573813	51'	1,638004	41'	1,706000
22'	1,456736	12'	1,514294	2'	1,575062	52'	1,639325	42'	1,707401
23'	1,457857	13'	1,515477	3'	1,576312	53'	1,640648	43'	1,708804
24'	1,458980	14'	1,516661	4'	1,577563	54'	1,641973	44'	1,710208

Tabelle 8b.  $\xi(\theta) = \int \frac{d\phi}{\cos^2 \phi}$ .

$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$
53° 45'	1,711615	54° 35'	1,784120	55° 25'	1,861215	56° 15'	1,943349	57° 5'	2,031027
46'	1,713022	36'	1,785616	26'	1,862806	18'	1,945046	6'	2,032841
47'	1,714432	37'	1,787118	27'	1,864400	17'	1,946742	7'	2,034657
48'	1,715843	38'	1,788613	28'	1,865996	18'	1,948448	8'	2,036476
49'	1,717256	39'	1,790114	29'	1,867594	19'	1,950152	9'	2,038297
50'	1,718670	40'	1,791617	30'	1,869194	20'	1,951859	10'	2,040120
51'	1,720086	41'	1,793121	31'	1,870796	21'	1,953568	11'	2,041946
52'	1,721504	42'	1,794628	32'	1,872400	22'	1,955279	12'	2,043775
53'	1,722924	43'	1,796138	33'	1,874007	23'	1,956992	13'	2,045606
54'	1,724345	44'	1,797646	34'	1,875615	24'	1,958706	14'	2,047440
55'	1,725768	45'	1,799158	35'	1,877225	25'	1,960424	15'	2,049276
56'	1,727193	46'	1,800672	36'	1,878837	26'	1,962144	16'	2,051115
57'	1,728619	47'	1,802188	37'	1,880451	27'	1,963866	17'	2,052956
58'	1,730047	48'	1,803706	38'	1,882067	28'	1,965590	18'	2,054800
59'	1,731477	49'	1,805226	39'	1,883685	29'	1,967317	19'	2,056646
54° 0'	1,732909	50'	1,806748	40'	1,885305	30'	1,969046	20'	2,058495
1'	1,734342	51'	1,808271	41'	1,886928	31'	1,970777	21'	2,060347
2'	1,735777	52'	1,809797	42'	1,888552	32'	1,972510	22'	2,062200
3'	1,737214	53'	1,811324	43'	1,890178	33'	1,974246	23'	2,064057
4'	1,738653	54'	1,812853	44'	1,891807	34'	1,975984	24'	2,065915
5'	1,740093	55'	1,814384	45'	1,893438	35'	1,977724	25'	2,067776
6'	1,741535	56'	1,815917	46'	1,895070	36'	1,979467	26'	2,069640
7'	1,742979	57'	1,817451	47'	1,896705	37'	1,981212	27'	2,071507
8'	1,744424	58'	1,818988	48'	1,898342	38'	1,982959	28'	2,073375
9'	1,745871	59'	1,820526	49'	1,899981	39'	1,984709	29'	2,075247
10'	1,747320	55° 0'	1,822067	50'	1,901622	40'	1,986461	30'	2,077121
11'	1,748771	1'	1,823609	51'	1,903265	41'	1,988215	31'	2,078997
12'	1,750223	2'	1,825154	52'	1,904911	42'	1,989972	32'	2,080877
13'	1,751677	3'	1,826700	53'	1,906558	43'	1,991731	33'	2,082758
14'	1,753133	4'	1,828249	54'	1,908208	44'	1,993492	34'	2,084643
15'	1,754590	5'	1,829799	55'	1,909860	45'	1,995255	35'	2,086529
16'	1,756050	6'	1,831351	56'	1,911514	46'	1,997021	36'	2,088419
17'	1,757511	7'	1,832905	57'	1,913170	47'	1,998789	37'	2,090311
18'	1,758974	8'	1,834461	58'	1,914828	48'	2,000560	38'	2,092206
19'	1,760439	9'	1,836019	59'	1,916489	49'	2,002333	39'	2,094103
20'	1,761906	10'	1,837579	56° 0'	1,918151	50'	2,004108	40'	2,096008
21'	1,763374	11'	1,839141	1'	1,919816	51'	2,005886	41'	2,097906
22'	1,764844	12'	1,840705	2'	1,921482	52'	2,007667	42'	2,099811
23'	1,766316	13'	1,842271	3'	1,923151	53'	2,009449	43'	2,101719
24'	1,767790	14'	1,843838	4'	1,924822	54'	2,011234	44'	2,103629
25'	1,769265	15'	1,845408	5'	1,926496	55'	2,013021	45'	2,105542
26'	1,770743	16'	1,846980	6'	1,928171	56'	2,014811	46'	2,107458
27'	1,772222	17'	1,848553	7'	1,929849	57'	2,016603	47'	2,109376
28'	1,773708	18'	1,850129	8'	1,931529	58'	2,018398	48'	2,111297
29'	1,775185	19'	1,851707	9'	1,933211	59'	2,020195	49'	2,113221
30'	1,776670	20'	1,853286	10'	1,934895	57° 0'	2,021994	50'	2,115147
31'	1,778156	21'	1,854868	11'	1,936581	1'	2,023796	51'	2,117076
32'	1,779645	22'	1,856452	12'	1,938270	2'	2,025600	52'	2,119008
33'	1,781135	23'	1,858037	13'	1,939961	3'	2,027407	53'	2,120943
34'	1,782627	24'	1,859625	14'	1,941654	4'	2,029216	54'	2,122880



Tabelle 8b.  $\xi(\phi) = \int \frac{d\phi}{\cos^2 \phi}$ .

$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$
57° 55'	2,124820	58° 45'	2,225376	59° 35'	2,333432	60° 25'	2,449828	61° 15'	2,575525
58'	2,126762	46'	2,227461	36'	2,335675	26'	2,452247	16'	2,578141
57'	2,128708	47'	2,229549	37'	2,337922	27'	2,454670	17'	2,580761
58'	2,130656	48'	2,231640	38'	2,340171	28'	2,457097	18'	2,583386
59'	2,132607	49'	2,233734	39'	2,342425	29'	2,459528	19'	2,586015
58° 0'	2,134560	50'	2,235831	40'	2,344681	30'	2,461962	20'	2,588647
1'	2,136516	51'	2,237931	41'	2,346942	31'	2,464400	21'	2,591284
2'	2,138475	52'	2,240035	42'	2,349205	32'	2,466841	22'	2,593926
3'	2,140437	53'	2,242141	43'	2,351472	33'	2,469287	23'	2,596571
4'	2,142401	54'	2,244250	44'	2,353742	34'	2,471736	24'	2,599221
5'	2,144368	55'	2,246362	45'	2,356016	35'	2,474189	25'	2,601875
6'	2,146338	56'	2,248477	46'	2,358293	36'	2,476646	26'	2,604533
7'	2,148310	57'	2,250595	47'	2,360573	37'	2,479107	27'	2,607196
8'	2,150286	58'	2,252717	48'	2,362857	38'	2,481571	28'	2,609863
9'	2,152264	59'	2,254841	49'	2,365144	39'	2,484040	29'	2,612534
10'	2,154245	59° 0'	2,256969	50'	2,367435	40'	2,486512	30'	2,615209
11'	2,156228	1'	2,259100	51'	2,369729	41'	2,488988	31'	2,617889
12'	2,158215	2'	2,261233	52'	2,372026	42'	2,491468	32'	2,620573
13'	2,160204	3'	2,263370	53'	2,374327	43'	2,493952	33'	2,623261
14'	2,162197	4'	2,265510	54'	2,376631	44'	2,496440	34'	2,625954
15'	2,164192	5'	2,267654	55'	2,378939	45'	2,498931	35'	2,628651
16'	2,166190	6'	2,269800	56'	2,381250	46'	2,501427	36'	2,631352
17'	2,168191	7'	2,271949	57'	2,383565	47'	2,503927	37'	2,634058
18'	2,170194	8'	2,274102	58'	2,385883	48'	2,506430	38'	2,636768
19'	2,172200	9'	2,276258	59'	2,388205	49'	2,508937	39'	2,639482
20'	2,174209	10'	2,278417	60° 0'	2,390530	50'	2,511449	40'	2,642201
21'	2,176221	11'	2,280579	1'	2,392859	51'	2,513964	41'	2,644924
22'	2,178236	12'	2,282744	2'	2,395191	52'	2,516483	42'	2,647652
23'	2,180254	13'	2,284912	3'	2,397527	53'	2,519006	43'	2,650384
24'	2,182274	14'	2,287084	4'	2,399866	54'	2,521533	44'	2,653121
25'	2,184296	15'	2,289259	5'	2,402209	55'	2,524063	45'	2,655862
26'	2,186323	16'	2,291437	6'	2,404556	56'	2,526598	46'	2,658607
27'	2,198352	17'	2,293618	7'	2,406906	57'	2,529136	47'	2,661357
28'	2,190384	18'	2,295802	8'	2,409260	58'	2,531679	48'	2,664112
29'	2,192419	19'	2,297989	9'	2,411617	59'	2,534225	49'	2,666871
30'	2,194457	20'	2,300180	10'	2,413978	61° 0'	2,536778	50'	2,669634
31'	2,196498	21'	2,302374	11'	2,416343	1'	2,539331	51'	2,672402
32'	2,198541	22'	2,304571	12'	2,418711	2'	2,541889	52'	2,675174
33'	2,200588	23'	2,306771	13'	2,421082	3'	2,544452	53'	2,677952
34'	2,202637	24'	2,308975	14'	2,423458	4'	2,547019	54'	2,680733
35'	2,204690	25'	2,311182	15'	2,425836	5'	2,549590	55'	2,683519
36'	2,206745	26'	2,313392	16'	2,428219	6'	2,552165	56'	2,686310
37'	2,208803	27'	2,315605	17'	2,430605	7'	2,554744	57'	2,689104
38'	2,210864	28'	2,317822	18'	2,432995	8'	2,557327	58'	2,691905
39'	2,212929	29'	2,320042	19'	2,435389	9'	2,559914	59'	2,694711
40'	2,214996	30'	2,322285	20'	2,437786	10'	2,562506	62° 0'	2,697520
41'	2,217066	31'	2,324492	21'	2,440187	11'	2,565101	1'	2,700333
42'	2,219139	32'	2,326722	22'	2,442592	12'	2,567701	2'	2,703150
43'	2,221215	33'	2,328955	23'	2,445000	13'	2,570305	3'	2,705973
44'	2,223294	34'	2,331192	24'	2,447412	14'	2,572913	4'	2,708800



Tabelle 8b.  $\xi(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ .

$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$
62° 5'	2,711632	62° 55'	2,859428	63° 45'	3,020392	64° 35'	3,196254	65° 25'	3,389042
6'	2,714469	56'	2,862512	46'	3,023757	36'	3,199937	26'	3,393086
7'	2,717810	57'	2,865602	47'	3,027128	37'	3,203627	27'	3,397137
8'	2,720156	58'	2,868698	48'	3,030505	38'	3,207323	28'	3,401197
9'	2,723007	59'	2,871799	49'	3,033888	39'	3,211026	29'	3,405264
10'	2,725863	63° 0'	2,874905	50'	3,037277	40'	3,214736	30'	3,409339
11'	2,728723	1'	2,878016	51'	3,040671	41'	3,218453	31'	3,413421
12'	2,731588	2'	2,881133	52'	3,044073	42'	3,222177	32'	3,417512
13'	2,734458	3'	2,884255	53'	3,047480	43'	3,225907	33'	3,421610
14'	2,737332	4'	2,887383	54'	3,050893	44'	3,229645	34'	3,425716
15'	2,740211	5'	2,890516	55'	3,054312	45'	3,233389	35'	3,429831
16'	2,743095	6'	2,893664	56'	3,057738	46'	3,237140	36'	3,433953
17'	2,745984	7'	2,896797	57'	3,061169	47'	3,240899	37'	3,438083
18'	2,748878	8'	2,899946	58'	3,064607	48'	3,244664	38'	3,442221
19'	2,751777	9'	2,903101	59'	3,068051	49'	3,248436	39'	3,446368
20'	2,754680	10'	2,906261	64° 0'	3,071501	50'	3,252215	40'	3,450522
21'	2,757588	11'	2,909426	1'	3,074957	51'	3,256001	41'	3,454685
22'	2,760501	12'	2,912597	2'	3,078420	52'	3,259794	42'	3,458855
23'	2,763419	13'	2,915773	3'	3,081888	53'	3,263595	43'	3,463033
24'	2,766342	14'	2,918955	4'	3,085363	54'	3,267402	44'	3,467220
25'	2,769269	15'	2,922142	5'	3,088845	55'	3,271216	45'	3,471414
26'	2,772202	16'	2,925335	6'	3,092332	56'	3,275037	46'	3,475617
27'	2,775139	17'	2,928533	7'	3,095825	57'	3,278866	47'	3,479828
28'	2,778081	18'	2,931737	8'	3,099325	58'	3,282702	48'	3,484047
29'	2,781029	19'	2,934946	9'	3,102831	59'	3,286545	49'	3,488278
30'	2,783981	20'	2,938161	10'	3,106344	65° 0'	3,290395	50'	3,492508
31'	2,786938	21'	2,941382	11'	3,109863	1'	3,294252	51'	3,496752
32'	2,789900	22'	2,944608	12'	3,113388	2'	3,298117	52'	3,501008
33'	2,792868	23'	2,947840	13'	3,116920	3'	3,301989	53'	3,505264
34'	2,795840	24'	2,951078	14'	3,120458	4'	3,305868	54'	3,509532
35'	2,798817	25'	2,954321	15'	3,124002	5'	3,309754	55'	3,513809
36'	2,801799	26'	2,957570	16'	3,127553	6'	3,313648	56'	3,518094
37'	2,804786	27'	2,960825	17'	3,131110	7'	3,317549	57'	3,522388
38'	2,807778	28'	2,964085	18'	3,134674	8'	3,321457	58'	3,526690
39'	2,810775	29'	2,967351	19'	3,138244	9'	3,325372	59'	3,531000
40'	2,813777	30'	2,970623	20'	3,141820	10'	3,329295	66° 0'	3,535319
41'	2,816785	31'	2,973900	21'	3,145403	11'	3,333226	1'	3,539646
42'	2,819797	32'	2,977184	22'	3,148992	12'	3,337164	2'	3,543981
43'	2,822814	33'	2,980473	23'	3,152589	13'	3,341109	3'	3,548326
44'	2,825837	34'	2,983767	24'	3,156191	14'	3,345062	4'	3,552678
45'	2,828865	35'	2,987068	25'	3,159800	15'	3,349023	5'	3,557040
46'	2,831898	36'	2,990374	26'	3,163415	16'	3,352991	6'	3,561410
47'	2,834936	37'	2,993686	27'	3,167037	17'	3,356966	7'	3,565788
48'	2,837979	38'	2,997008	28'	3,170666	18'	3,360949	8'	3,570176
49'	2,841027	39'	3,000327	29'	3,174301	19'	3,364939	9'	3,574571
50'	2,844081	40'	3,003656	30'	3,177944	20'	3,368937	10'	3,578976
51'	2,847140	41'	3,006992	31'	3,181592	21'	3,372943	11'	3,583390
52'	2,850204	42'	3,010338	32'	3,185248	22'	3,376956	12'	3,587812
53'	2,853273	43'	3,013680	33'	3,188910	23'	3,380977	13'	3,592245
54'	2,856348	44'	3,017038	34'	3,192579	24'	3,385006	14'	3,596683

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
66° 15'	3,601181	67° 5'	3,835341	67° 55'	4,095031	68° 45'	4,384228	69° 35'	4,707786
16'	3,605588	6'	3,840273	56'	4,100510	46'	4,390345	36'	4,714647
17'	3,610055	7'	3,845215	57'	4,106002	47'	4,396476	37'	4,721523
18'	3,614530	8'	3,850167	58'	4,111506	48'	4,402620	38'	4,728416
19'	3,619013	9'	3,855129	59'	4,117021	49'	4,408777	39'	4,735325
20'	3,623506	10'	3,860102	68° 0'	4,122549	50'	4,414949	40'	4,742250
21'	3,628007	11'	3,865085	1'	4,128088	51'	4,421135	41'	4,749192
22'	3,632518	12'	3,870079	2'	4,133640	52'	4,427334	42'	4,756150
23'	3,637087	13'	3,875083	3'	4,139204	53'	4,433548	43'	4,763123
24'	3,641566	14'	3,880097	4'	4,144779	54'	4,439776	44'	4,770113
25'	3,646104	15'	3,885121	5'	4,150367	55'	4,446017	45'	4,777120
26'	3,650651	16'	3,890157	6'	4,155968	56'	4,452273	46'	4,784144
27'	3,655207	17'	3,895203	7'	4,161580	57'	4,458543	47'	4,791185
28'	3,659772	18'	3,900259	8'	4,167204	58'	4,464828	48'	4,798242
29'	3,664346	19'	3,905326	9'	4,172840	59'	4,471127	49'	4,805315
30'	3,668930	20'	3,910408	10'	4,178489	69° 0'	4,477440	50'	4,812406
31'	3,673522	21'	3,915491	11'	4,184150	1'	4,483767	51'	4,819514
32'	3,678124	22'	3,920590	12'	4,189824	2'	4,490110	52'	4,826638
33'	3,682735	23'	3,925700	13'	4,195509	3'	4,496468	53'	4,833780
34'	3,687355	24'	3,930820	14'	4,201207	4'	4,502837	54'	4,840939
35'	3,691985	25'	3,935950	15'	4,206917	5'	4,509223	55'	4,848114
36'	3,696624	26'	3,941091	16'	4,212641	6'	4,515622	56'	4,855307
37'	3,701272	27'	3,946244	17'	4,218377	7'	4,522036	57'	4,862517
38'	3,705930	28'	3,951407	18'	4,224125	8'	4,528466	58'	4,869744
39'	3,700597	29'	3,956581	19'	4,229886	9'	4,534910	59'	4,876989
40'	3,715274	30'	3,961766	20'	4,235659	10'	4,541369	70° 0'	4,884251
41'	3,719961	31'	3,966962	21'	4,241446	11'	4,547843	1'	4,891530
42'	3,724656	32'	3,972169	22'	4,247245	12'	4,554332	2'	4,898828
43'	3,729361	33'	3,977387	23'	4,253057	13'	4,560835	3'	4,906140
44'	3,734076	34'	3,982616	24'	4,258882	14'	4,567354	4'	4,913473
45'	3,738800	35'	3,987857	25'	4,264719	15'	4,573888	5'	4,920822
46'	3,743535	36'	3,993108	26'	4,270569	16'	4,580437	6'	4,928190
47'	3,748279	37'	3,998370	27'	4,276433	17'	4,587001	7'	4,935575
48'	3,753032	38'	4,003643	28'	4,282309	18'	4,593580	8'	4,942977
49'	3,757795	39'	4,008928	29'	4,288199	19'	4,600174	9'	4,950398
50'	3,762567	40'	4,014224	30'	4,294101	20'	4,606783	10'	4,957837
51'	3,767350	41'	4,019531	31'	4,300016	21'	4,613407	11'	4,965294
52'	3,772142	42'	4,024850	32'	4,305944	22'	4,620047	12'	4,972770
53'	3,776944	43'	4,030180	33'	4,311885	23'	4,626703	13'	4,980263
54'	3,781756	44'	4,035521	34'	4,317840	24'	4,633374	14'	4,987774
55'	3,786577	45'	4,040878	35'	4,323808	25'	4,640060	15'	4,995304
56'	3,791409	46'	4,046237	36'	4,329790	26'	4,646761	16'	5,002852
57'	3,796250	47'	4,051618	37'	4,335784	27'	4,653478	17'	5,010419
58'	3,801101	48'	4,057000	38'	4,341792	28'	4,660211	18'	5,018004
59'	3,805963	49'	4,062398	39'	4,347814	29'	4,666960	19'	5,025607
67° 0'	3,810834	50'	4,067807	40'	4,353849	30'	4,673725	20'	5,033228
1'	3,815715	51'	4,073229	41'	4,359898	31'	4,680505	21'	5,040869
2'	3,820606	52'	4,078662	42'	4,365960	32'	4,687301	22'	5,048528
3'	3,825508	53'	4,084106	43'	4,372036	33'	4,694113	23'	5,056206
4'	3,830419	54'	4,089563	44'	4,378125	34'	4,700942	24'	5,063908

Tabelle 8b.  $\xi(\phi) = \int \frac{d\phi}{\cos^2 \phi}$ .

$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$	$\phi$	$\xi$
70° 25'	5,071618	71° 15'	5,482963	72° 5'	5,950783	72° 55'	6,486266	73° 45'	7,103521
26'	5,079852	16'	5,491733	6'	5,960789	56'	6,497756	46'	7,116817
27'	5,087105	17'	5,500526	7'	5,970820	57'	6,509280	47'	7,130153
28'	5,094878	18'	5,509341	8'	5,980879	58'	6,520836	48'	7,143529
29'	5,102670	19'	5,518178	9'	5,990965	59'	6,532426	49'	7,156944
30'	5,110481	20'	5,527038	10'	6,001079	73° 0'	6,544048	50'	7,170400
31'	5,118311	21'	5,535921	11'	6,011221	1'	6,555702	51'	7,183897
32'	5,126160	22'	5,544828	12'	6,021390	2'	6,567391	52'	7,197435
33'	5,134029	23'	5,553758	13'	6,031586	3'	6,579113	53'	7,211015
34'	5,141918	24'	5,562711	14'	6,041809	4'	6,590870	54'	7,224635
35'	5,149826	25'	5,571687	15'	6,052062	5'	6,602660	55'	7,238203
36'	5,157754	26'	5,580686	16'	6,062342	6'	6,614485	56'	7,251994
37'	5,165700	27'	5,589709	17'	6,072651	7'	6,626342	57'	7,265737
38'	5,173667	28'	5,598756	18'	6,082988	8'	6,638233	58'	7,279522
39'	5,181653	29'	5,607826	19'	6,093352	9'	6,650159	59'	7,293350
40'	5,189660	30'	5,616921	20'	6,103745	10'	6,662120	74° 0'	7,307220
41'	5,197687	31'	5,626037	21'	6,114166	11'	6,674116	1'	7,321130
42'	5,205734	32'	5,635177	22'	6,124617	12'	6,686147	2'	7,335083
43'	5,213800	33'	5,644342	23'	6,135096	13'	6,698211	3'	7,349080
44'	5,221887	34'	5,653531	24'	6,145605	14'	6,710310	4'	7,363120
45'	5,229995	35'	5,662744	25'	6,156141	15'	6,722445	5'	7,377203
46'	5,238122	36'	5,671982	26'	6,166706	16'	6,734615	6'	7,391329
47'	5,246271	37'	5,681243	27'	6,177301	17'	6,746821	7'	7,405498
48'	5,254439	38'	5,690523	28'	6,187926	18'	6,759063	8'	7,419710
49'	5,262626	39'	5,699838	29'	6,198530	19'	6,771337	9'	7,433966
50'	5,270835	40'	5,709174	30'	6,209264	20'	6,783649	10'	7,448267
51'	5,279065	41'	5,718533	31'	6,219976	21'	6,795996	11'	7,462612
52'	5,287316	42'	5,727918	32'	6,230718	22'	6,808381	12'	7,477001
53'	5,295587	43'	5,737326	33'	6,241490	23'	6,820802	13'	7,491431
54'	5,303879	44'	5,746760	34'	6,252292	24'	6,833260	14'	7,505907
55'	5,312192	45'	5,756218	35'	6,263125	25'	6,845753	15'	7,520428
56'	5,320526	46'	5,765703	36'	6,273988	26'	6,858283	16'	7,534996
57'	5,328882	47'	5,775212	37'	6,284879	27'	6,870851	17'	7,549608
58'	5,337259	48'	5,784747	38'	6,295802	28'	6,883456	18'	7,564267
59'	5,345657	49'	5,794306	39'	6,306755	29'	6,896098	19'	7,578969
71° 0'	5,354076	50'	5,803891	40'	6,317740	30'	6,908777	20'	7,593717
1'	5,362515	51'	5,813502	41'	6,328755	31'	6,921490	21'	7,608512
2'	5,370976	52'	5,823139	42'	6,339802	32'	6,934242	22'	7,623354
3'	5,379459	53'	5,832801	43'	6,350879	33'	6,947033	23'	7,638243
4'	5,387964	54'	5,842489	44'	6,361987	34'	6,959862	24'	7,653178
5'	5,396491	55'	5,852201	45'	6,373127	35'	6,972730	25'	7,668157
6'	5,405039	56'	5,861940	46'	6,384298	36'	6,985636	26'	7,683185
7'	5,413608	57'	5,871705	47'	6,395501	37'	6,998578	27'	7,698260
8'	5,422200	58'	5,881497	48'	6,406736	38'	7,011559	28'	7,713383
9'	5,430814	59'	5,891315	49'	6,418000	39'	7,024579	29'	7,728554
10'	5,439450	72° 0'	5,901160	50'	6,429297	40'	7,037639	30'	7,743773
11'	5,448108	1'	5,911031	51'	6,440626	41'	7,050738	31'	7,759037
12'	5,456789	2'	5,920928	52'	6,451988	42'	7,063876	32'	7,774349
13'	5,465491	3'	5,930853	53'	6,463382	43'	7,077051	33'	7,789711
14'	5,474215	4'	5,940805	54'	6,474808	44'	7,090266	34'	7,805123

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
74° 35'	7,820583	75° 25'	8,660734	76° 15'	9,654526	77° 5'	10,84264	77° 55'	12,28022
36'	7,836093	26'	8,678988	16'	9,676229	6'	10,86874	56'	12,31199
37'	7,851649	27'	8,697303	17'	9,698010	7'	10,89493	57'	12,34390
38'	7,867255	28'	8,715681	18'	9,719869	8'	10,92122	58'	12,37594
39'	7,882911	29'	8,734122	19'	9,741801	9'	10,94761	59'	12,40811
40'	7,898619	30'	8,752624	20'	9,763814	10'	10,97411	78° 0'	12,44041
41'	7,914377	31'	8,771185	21'	9,785908	11'	11,00071	1'	12,47284
42'	7,930185	32'	8,789810	22'	9,808082	12'	11,02741	2'	12,50540
43'	7,946041	33'	8,808499	23'	9,830337	13'	11,05420	3'	12,53810
44'	7,961949	34'	8,827253	24'	9,852673	14'	11,08110	4'	12,57094
45'	7,977909	35'	8,846071	25'	9,875084	15'	11,10811	5'	12,60392
46'	7,993920	36'	8,864953	26'	9,897577	16'	11,13522	6'	12,63703
47'	8,009983	37'	8,883898	27'	9,920154	17'	11,16244	7'	12,67027
48'	8,026093	38'	8,902905	28'	9,942813	18'	11,18977	8'	12,70365
49'	8,042263	39'	8,921977	29'	9,965556	19'	11,21720	9'	12,73717
50'	8,058477	40'	8,941117	30'	9,988382	20'	11,24473	10'	12,77083
51'	8,074747	41'	8,960324	31'	10,011285	21'	11,27237	11'	12,80464
52'	8,091069	42'	8,979596	32'	10,034273	22'	11,30013	12'	12,83859
53'	8,107445	43'	8,998930	33'	10,057847	23'	11,32799	13'	12,87267
54'	8,123874	44'	9,018332	34'	10,080506	24'	11,35586	14'	12,90690
55'	8,140353	45'	9,037802	35'	10,103751	25'	11,38403	15'	12,94127
56'	8,156886	46'	9,057340	36'	10,127031	26'	11,41221	16'	12,97579
57'	8,173474	47'	9,076946	37'	10,150490	27'	11,44051	17'	13,01046
58'	8,190116	48'	9,096620	38'	10,173988	28'	11,46892	18'	13,04527
59'	8,206814	49'	9,116357	39'	10,197574	29'	11,49744	19'	13,08022
75° 0'	8,223565	50'	9,136163	40'	10,221248	30'	11,52608	20'	13,11531
1'	8,240367	51'	9,156040	41'	10,245010	31'	11,55482	21'	13,15056
2'	8,257226	52'	9,175936	42'	10,268886	32'	11,58368	22'	13,18597
3'	8,274141	53'	9,196003	43'	10,29279	33'	11,61265	23'	13,22152
4'	8,291112	54'	9,216089	44'	10,31682	34'	11,64174	24'	13,25723
5'	8,308139	55'	9,236240	45'	10,34093	35'	11,67095	25'	13,29308
6'	8,325222	56'	9,256463	46'	10,36514	36'	11,70027	26'	13,32908
7'	8,342358	57'	9,276758	47'	10,38943	37'	11,72970	27'	13,36525
8'	8,359551	58'	9,297124	48'	10,41382	38'	11,75925	28'	13,40157
9'	8,376802	59'	9,317563	49'	10,43829	39'	11,78892	29'	13,43804
10'	8,394111	76° 0'	9,338074	50'	10,46285	40'	11,81871	30'	13,47468
11'	8,411477	1'	9,358652	51'	10,48751	41'	11,84862	31'	13,51146
12'	8,428902	2'	9,379303	52'	10,51226	42'	11,87865	32'	13,54840
13'	8,446331	3'	9,400029	53'	10,53711	43'	11,90879	33'	13,58551
14'	8,463918	4'	9,420829	54'	10,56205	44'	11,93906	34'	13,62278
15'	8,481515	5'	9,441702	55'	10,58708	45'	11,96945	35'	13,66021
16'	8,499171	6'	9,462650	56'	10,61220	46'	11,99997	36'	13,69780
17'	8,516886	7'	9,483666	57'	10,63742	47'	12,03060	37'	13,73554
18'	8,534660	8'	9,504758	58'	10,66274	48'	12,06137	38'	13,77345
19'	8,552488	9'	9,525927	59'	10,68815	49'	12,09225	39'	13,81153
20'	8,570377	10'	9,547171	77° 0'	10,71366	50'	12,12326	40'	13,84978
21'	8,588328	11'	9,568492	1'	10,73928	51'	12,15440	41'	13,88819
22'	8,606339	12'	9,589889	2'	10,76495	52'	12,18566	42'	13,92678
23'	8,624411	13'	9,611356	3'	10,79075	53'	12,21706	43'	13,96552
24'	8,642544	14'	9,632902	4'	10,81665	54'	12,24858	44'	14,00443

Tabelle 8b.  $\xi(\theta) = \int \frac{d\phi}{\cos^2 \phi}$ .

$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$	$\theta$	$\xi$
78° 45'	14,04352	79° 35'	16,24047	80° 25'	19,02772	81° 15'	22,65990	82° 5'	27,44121
46'	14,08279	36'	16,28981	26'	19,09092	16'	22,72277	6'	27,55290
47'	14,12223	37'	16,33936	27'	19,15445	17'	22,80611	7'	27,66528
48'	14,16184	38'	16,38916	28'	19,21832	18'	22,88991	8'	27,77898
49'	14,20162	39'	16,43920	29'	19,28252	19'	22,97421	9'	27,89219
50'	14,24157	40'	16,48949	30'	19,34705	20'	23,05898	10'	28,00673
51'	14,28171	41'	16,54002	31'	19,41192	21'	23,14425	11'	28,12200
52'	14,32203	42'	16,59079	32'	19,47712	22'	23,23000	12'	28,23800
53'	14,36253	43'	16,64179	33'	19,54268	23'	23,31625	13'	28,35473
54'	14,40321	44'	16,69303	34'	19,60857	24'	23,40299	14'	28,47222
55'	14,44405	45'	16,74454	35'	19,67482	25'	23,49025	15'	28,59047
56'	14,48509	46'	16,79629	36'	19,74140	26'	23,57799	16'	28,70946
57'	14,52631	47'	16,84831	37'	19,80835	27'	23,66625	17'	28,82923
58'	14,56772	48'	16,90057	38'	19,87564	28'	23,75503	18'	28,94979
59'	14,60932	49'	16,95306	39'	19,94329	29'	23,84432	19'	29,07111
79° 0'	14,65110	50'	17,00582	40'	20,01131	30'	23,93414	20'	29,19322
1'	14,69306	51'	17,05884	41'	20,07969	31'	24,02449	21'	29,31612
2'	14,73521	52'	17,11213	42'	20,14843	32'	24,11535	22'	29,43983
3'	14,77755	53'	17,16568	43'	20,21754	33'	24,20676	23'	29,56435
4'	14,82009	54'	17,21949	44'	20,28701	34'	24,29870	24'	29,68967
5'	14,86283	55'	17,27354	45'	20,35687	35'	24,39120	25'	29,81533
6'	14,90576	56'	17,32786	46'	20,42709	36'	24,48423	26'	29,94232
7'	14,94887	57'	17,38246	47'	20,49770	37'	24,57782	27'	30,07064
8'	14,99218	58'	17,43734	48'	20,56868	38'	24,67195	28'	30,19930
9'	15,03569	59'	17,49249	49'	20,64005	39'	24,76666	29'	30,32831
10'	15,07940	80° 0'	17,54792	50'	20,71180	40'	24,86192	30'	30,45919
11'	15,12332	1'	17,60363	51'	20,78395	41'	24,95777	31'	30,59044
12'	15,16744	2'	17,65959	52'	20,85649	42'	25,05418	32'	30,72254
13'	15,21174	3'	17,71585	53'	20,92941	43'	25,15116	33'	30,85554
14'	15,25625	4'	17,77237	54'	21,00274	44'	25,24873	34'	30,98944
15'	15,30098	5'	17,82917	55'	21,07647	45'	25,34690	35'	31,12423
16'	15,34591	6'	17,88627	56'	21,15060	46'	25,44564	36'	31,25992
17'	15,39105	7'	17,94335	57'	21,22514	47'	25,54499	37'	31,39653
18'	15,43640	8'	18,00132	58'	21,30009	48'	25,64495	38'	31,53406
19'	15,48194	9'	18,05931	59'	21,37545	49'	25,74550	39'	31,67253
20'	15,52770	10'	18,11753	81° 0'	21,45123	50'	25,84667	40'	31,81194
21'	15,57368	11'	18,17608	1'	21,52742	51'	25,94847	41'	31,95228
22'	15,61988	12'	18,23491	2'	21,60404	52'	26,05087	42'	32,09360
23'	15,66629	13'	18,29405	3'	21,68100	53'	26,15392	43'	32,23587
24'	15,71292	14'	18,35349	4'	21,75855	54'	26,25758	44'	32,37912
25'	15,75975	15'	18,41324	5'	21,83646	55'	26,36189	45'	32,52336
26'	15,80680	16'	18,47328	6'	21,91478	56'	26,46684	46'	32,66859
27'	15,85409	17'	18,53363	7'	21,99356	57'	26,57243	47'	32,81432
28'	15,90159	18'	18,59430	8'	22,07278	58'	26,67868	48'	32,96206
29'	15,94933	19'	18,65526	9'	22,15243	59'	26,78560	49'	33,11082
30'	15,99729	20'	18,71654	10'	22,23253	82° 0'	26,89318	50'	33,25961
31'	16,04546	21'	18,77813	11'	22,31310	1'	27,00141	51'	33,40995
32'	16,09386	22'	18,84006	12'	22,39411	2'	27,11034	52'	33,56181
33'	16,14249	23'	18,90230	13'	22,47558	3'	27,21994	53'	33,71377
34'	16,19136	24'	18,96485	14'	22,55751	4'	27,33023	54'	33,86721

Tabelle 8b.  $\xi(\vartheta) = \int \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ .

005

$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$	$\vartheta$	$\xi$
82° 55'	34,02187	83° 45'	43,39013	84° 35'	57,3857	85° 25'	79,6619	86° 15'	118,3482
56'	34,17755	46'	43,61848	36'	57,7331	26'	80,2351	16'	119,3949
57'	34,33433	47'	43,84465	37'	58,0837	27'	80,8146	17'	120,4557
58'	34,49222	48'	44,07464	38'	58,4376	28'	81,4005	18'	121,5308
59'	34,65122	49'	44,30650	39'	58,7948	29'	81,9929	19'	122,6207
83° 0'	34,81131	50'	44,54024	40'	59,1553	30'	82,5918	20'	123,7253
1'	34,97265	51'	44,77584	41'	59,5193	31'	83,1975	21'	124,8451
2'	35,13508	52'	45,01337	42'	59,8866	32'	83,8099	22'	125,9802
3'	35,29868	53'	45,25286	43'	60,2575	33'	84,4291	23'	127,1312
4'	35,46346	54'	45,49428	44'	60,6318	34'	85,0554	24'	128,2981
5'	35,62942	55'	45,73770	45'	61,0097	35'	85,6888	25'	129,4813
6'	35,79658	56'	45,98312	46'	61,3912	36'	86,3293	26'	130,6811
7'	35,96495	57'	46,23055	47'	61,7764	37'	86,9772	27'	131,8979
8'	36,13454	58'	46,48004	48'	62,1652	38'	87,6325	28'	133,1318
9'	36,30536	59'	46,73159	49'	62,5578	39'	88,2953	29'	134,3834
10'	36,47744	84° 0'	46,98522	50'	62,9542	40'	88,9658	30'	135,6528
11'	36,65077	1'	47,24099	51'	63,3545	41'	89,6440	31'	136,9405
12'	36,82536	2'	47,49888	52'	63,7586	42'	90,3301	32'	138,2467
13'	37,00124	3'	47,75894	53'	64,1667	43'	91,0243	33'	139,5720
14'	37,17842	4'	48,02118	54'	64,5788	44'	91,7265	34'	140,9165
15'	37,35690	5'	48,28564	55'	64,9949	45'	92,4371	35'	142,2808
16'	37,53671	6'	48,55233	56'	65,4152	46'	93,1560	36'	143,6651
17'	37,71785	7'	48,82129	57'	65,8395	47'	93,8834	37'	145,0700
18'	37,90034	8'	49,09253	58'	66,2682	48'	94,6195	38'	146,4956
19'	38,08419	9'	49,36608	59'	66,7010	49'	95,3644	39'	147,9426
20'	38,26941	10'	49,64197	85° 0'	67,1382	50'	96,1182	40'	149,4114
21'	38,45601	11'	49,92024	1'	67,5797	51'	96,8812	41'	150,9023
22'	38,64403	12'	50,20089	2'	68,0258	52'	97,6583	42'	152,4159
23'	38,83345	13'	50,48397	3'	68,4763	53'	98,4349	43'	153,9525
24'	39,02431	14'	50,76952	4'	68,9314	54'	99,2259	44'	155,5127
25'	39,21662	15'	51,05751	5'	69,3911	55'	100,0267	45'	157,0969
26'	39,41038	16'	51,34813	6'	69,8556	56'	100,8373	46'	158,7057
27'	39,60561	17'	51,64106	7'	70,3247	57'	101,6579	47'	160,3395
28'	39,80234	18'	51,93668	8'	70,7986	58'	102,4887	48'	161,9989
29'	40,00057	19'	52,23486	9'	71,2775	59'	103,3299	49'	163,6843
30'	40,20031	20'	52,5357	10'	71,7613	86° 0'	104,1816	50'	165,3965
31'	40,40161	21'	52,8392	11'	72,2501	1'	105,0439	51'	167,1358
32'	40,60445	22'	53,1454	12'	72,7440	2'	105,9171	52'	168,9029
33'	40,80885	23'	53,4543	13'	73,2431	3'	106,8014	53'	170,6984
34'	41,01484	24'	53,7660	14'	73,7474	4'	107,6970	54'	172,5230
35'	41,22244	25'	54,0804	15'	74,2570	5'	108,6040	55'	174,3772
36'	41,43163	26'	54,3976	16'	74,7719	6'	109,5226	56'	176,2617
37'	41,64248	27'	54,7177	17'	75,2924	7'	110,4531	57'	178,1771
38'	41,85498	28'	55,0408	18'	75,8183	8'	111,3956	58'	180,1242
39'	42,06914	29'	55,3667	19'	76,3500	9'	112,3502	59'	182,1030
40'	42,28498	30'	55,6956	20'	76,8872	10'	113,3175	87° 0'	184,1160
41'	42,50253	31'	56,0275	21'	77,4303	11'	114,2974		
42'	42,72182	32'	56,3624	22'	77,9792	12'	115,2902		
43'	42,94283	33'	56,7004	23'	78,5323	13'	116,2961		
44'	43,16560	34'	57,0414	24'	79,0949	14'	117,3153		

Tabelle 9. Schußfaktorentabelle von Siacci auf Grund des

$Z$	$^{10}\log f =$	Diff.	$^{10}\log f_1 =$	Diff.	$^{10}\log f_2 =$	Diff.	$^{10}\log f_3 =$	Diff.	$^{10}\log f_4 =$	Diff.
0,00	0,0000		0,0000		1,6548		0,0000		1,6990	
0,03	0,0044	44	0,0044	44	1,6559	11	0,0065	65	1,7001	11
0,06	0,0087	43	0,0087	43	1,6570	11	0,0130	65	1,7011	10
0,09	0,0131	44	0,0130	43	1,6581	11	0,0195	65	1,7022	11
0,12	0,0175	44	0,0174	44	1,6592	11	0,0260	65	1,7033	11
		45		43		10		66		11
0,15	0,0220		0,0217		1,6602		0,0326		1,7044	
0,18	0,0265	45	0,0260	43	1,6613	11	0,0391	65	1,7054	10
0,21	0,0309	44	0,0304	44	1,6624	11	0,0456	65	1,7065	11
0,24	0,0354	45	0,0348	44	1,6634	10	0,0521	65	1,7076	11
0,27	0,0400	46	0,0391	43	1,6645	11	3,0586	65	1,7086	10
		45		43		11				11
0,30	0,0445		0,0434		1,6656		0,0651		1,7097	
0,33	0,0491	46	0,0477	43	1,6666	10	0,0717	66	1,7107	10
0,36	0,0537	46	0,0521	44	1,6676	10	0,0782	65	1,7118	11
0,39	0,0583	46	0,0564	43	1,6687	11	0,0847	65	1,7128	10
0,42	0,0630	47	0,0608	44	1,6697	11	0,0912	65	1,7139	11
		46		43		11				10
0,45	0,0676		0,0651		1,6708		0,0977		1,7149	
0,48	0,0723	47	0,0694	43	1,6718	10	0,1042	65	1,7160	11
0,51	0,0770	47	0,0737	43	1,6728	10	0,1107	65	1,7170	10
0,54	0,0818	48	0,0780	43	1,6739	11	0,1172	65	1,7181	11
0,57	0,0865	47	0,0823	43	1,6749	10	0,1238	66	1,7191	10
		48		43		10		65		10
0,60	0,0913		0,0866		1,6759		0,1303		1,7201	
0,63	0,0961	48	0,0909	43	1,6770	11	0,1368	65	1,7211	10
0,66	0,1010	49	0,0952	43	1,6780	10	0,1433	65	1,7221	10
0,69	0,1058	48	0,0996	44	1,6790	10	0,1498	65	1,7231	10
0,72	0,1107	49	0,1039	43	1,6800	10	0,1563	65	1,7241	10
		49		42		10		66		11
0,75	0,1156		0,1081		1,6810		0,1629		1,7252	
0,78	0,1205	49	0,1124	43	1,6820	10	0,1694	65	1,7262	10
0,81	0,1254	49	0,1167	43	1,6830	10	0,1759	65	1,7272	10
0,84	0,1304	50	0,1210	43	1,6840	10	0,1824	65	1,7282	10
0,87	0,1354	50	0,1252	42	1,6850	10	0,1889	65	1,7292	10
		50		43		10				
0,90	0,1404		0,1295		1,6860		0,1954		1,7302	
0,93	0,1455	51	0,1338	43	1,6870	10	0,2019	65	1,7312	10
0,96	0,1505	50	0,1380	42	1,6879	9	0,2085	66	1,7321	9
0,99	0,1556	51	0,1423	43	1,6889	10	0,2150	65	1,7331	10
1,02	0,1607	51	0,1465	42	1,6899	10	0,2215	65	1,7341	10
		52		43		9				
1,05	0,1659		0,1508		1,6908		0,2280		1,7351	
1,08	0,1710	51	0,1550	42	1,6918	10	0,2345	65	1,7361	10
1,11	0,1762	52	0,1592	42	1,6928	10	0,2410	65	1,7370	9
1,14	0,1814	52	0,1635	43	1,6937	9	0,2475	65	1,7380	10
1,17	0,1867	53	0,1677	43	1,6947	10	0,2541	66	1,7389	9
		52		42		9		65		10
1,20	0,1919		0,1719		1,6956		0,2606		1,7399	
1,23	0,1972	53	0,1761	42	1,6966	10	0,2671	65	1,7409	10
1,26	0,2025	53	0,1803	42	1,6975	9	0,2736	65	1,7418	9
1,29	0,2078	53	0,1845	42	1,6985	10	0,2801	65	1,7427	9
1,32	0,2132	54	0,1887	42	1,6994	6	0,2866	65	1,7437	10

quadratischen Luftwiderstandsgesetzes, vgl. Band I, § 25.

$^{10}\log f_0 =$	Diff.	$f_0 =$	$f_1 =$	Diff.	Bemerkungen
1,3979		0	0		Es bedeutet:
1,4002	23	139	140	140	
1,4024	22	278	283	143	$f = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g X}$
1,4046	22	417	429	146	
1,4068	22	556	578	149	$f_1 = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}$
	21			152	
1,4089		694	730		$f_2 = \frac{T}{\sqrt{X \operatorname{tg} \varphi}}$
1,4111	22	833	886	156	
1,4133	22	972	1044	158	
1,4155	22	1111	1206	162	$f_3 = \frac{v_0 \cos \varphi}{v_r \cos \omega}$
1,4176	21	1250	1370	164	
	22			169	
1,4198		1389	1539		$f_4 = \frac{x_s}{X}$
1,4220	22	1528	1711	172	
1,4241	21	1667	1886	175	
1,4263	22	1806	2065	179	$f_5 = \frac{y_s}{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}$
1,4284	21	1944	2247	182	
	22			187	
1,4306		2083	2434		$f_6 = \frac{1000 \cdot i \cdot \delta \cdot \alpha \cdot (2R)^2}{1,206 \cdot P} \cdot X$
1,4327	21	2222	2625	191	
1,4349	22	2361	2819	194	
1,4370	21	2500	3018	199	
1,4392	22	2639	3221	203	$f_6 = \frac{1000 \cdot i \cdot \delta \cdot \alpha \cdot (2R)^2}{g \cdot 1,206 \cdot P} \cdot v_0^2 \sin^2 \varphi$
	21			207	
1,4413		2778	3428		$Z = 2 c \alpha X$
1,4435	22	2917	3639	211	
1,4456	21	3056	3855	216	Dabei
1,4477	21	3194	4075	220	
1,4498	21	3333	4301	226	$c = \frac{0,014 \cdot R^2 \pi \cdot \delta \cdot 9,81 \cdot i}{1,206 \cdot P}$
	22			230	
1,4520		3472	4531		$2R =$ Kaliber in m
1,4542	22	3611	4766	235	$P =$ Geschoßgewicht in kg
1,4563	21	3750	5006	240	
1,4585	22	3889	5251	245	$\delta =$ Tagesluftgew. in kg/cbm,
1,4606	21	4028	5501	250	$i$ Formkoeffizient, = 1 für
	22			256	Ogivalgeschosse von 1,3 Ka-
1,4627		4167	5757		liber Spitzenhöhe oder
1,4648	21	4306	6019	262	2 Kaliber Abrundungsradius
1,4669	21	4445	6286	267	
1,4691	22	4583	6558	272	
1,4712	21	4722	6837	279	$\alpha = \frac{\xi(\varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}$ ; genauer:
	22			285	
1,4733		4861	7122		$\xi \left( \frac{\varphi + \omega}{2} \right)$
1,4755	22	5000	7413	291	
1,4776	21	5139	7711	298	$\alpha = \frac{\xi \left( \frac{\varphi + \omega}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi + \omega}{2} \right)}$
1,4797	21	5278	8015	304	
1,4818	21	5417	8325	310	
	22			318	
1,4839		5556	8643		
1,4860	21	5694	8967	324	
1,4881	21	5833	9299	332	
1,4902	21	5972	9638	339	
1,4922	20	6111	9985	347	



Tabelle 10a. Primäre Funktionen  $D, J, A, T$  von  $u$  auf Grund des Luftwiderstandsgesetzes von Chapel-Vallier-Hojel.

Formeln zu den Tabellen 10a bis 10f:

Beliebig- er Flug- bahn- punkt ( $x, y$ )	{	$\frac{x}{c'} = \xi = D(u) - D(v_0)$
		$t = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot (T(u) - T(v_0)) = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot H(v_0, \xi)$
		$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot (J(u) - J(v_0)) = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot L(v_0, \xi)$
		$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{c' \cdot x}{2 \cos^2 \varphi} \left( \frac{A(u) - A(v_0)}{D(u) - D(v_0)} - J(v_0) \right) = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{c' x}{2 \cos^2 \varphi} \cdot E(v_0, \xi)$
		$u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}$

Gipfelpunkt ( $x_s, y_s$ ) der Flugbahn	{	$\frac{x_s}{c'} = \xi_s = D(u_s) - D(v_0)$
		$\frac{\sin 2 \varphi}{c'} = L(v_0, \xi_s)$
		$t_s = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot H(v_0, \xi_s)$
		$y_s = x_s \cdot \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot M(v_0, \xi_s) = x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{M(v_0, \xi_s)}{L(v_0, \xi_s)}$
		$u_s = \frac{v_s}{\cos \varphi}$

Auffallpunkt ( $x = X, y = 0$ )	{	$\frac{X}{c'} = \xi_e = D(u_e) - D(v_0)$
		$\sin 2 \varphi = X \cdot N(v_0, \xi_e) = c' \cdot E(v_0, \xi_e)$
		$\operatorname{tg} \omega = - \operatorname{tg} \vartheta_e = \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot M(v_0, \xi_e) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{M(v_0, \xi_e)}{E(v_0, \xi_e)}$
		$T = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot H(v_0, \xi_e)$
		$u_e = \frac{v_e \cos \omega}{\cos \varphi}$

dabei ist

$$c' = \frac{P \cdot 1,206}{R^2 \cdot \delta \cdot \beta}; \quad P = \text{Geschossgewicht in kg; } 2R = \text{Kaliber in cm;}$$

$\delta = \text{Tagesluftgewicht in kg/cbm.}$

$\beta$  ist in erster Annäherung = 1 oder genauer

$$\beta = \cos \frac{2}{3} \varphi; \quad \text{im übrigen vgl. Band I, § 28.}$$

Tabelle 10a. Primäre Funktionen  $D$ ,  $J$ ,  $A$ ,  $T$ .

609

$D(u)$	$J(u)$	Diff.	$A(u)$	Diff.	$T(u)$	Diff.	$u$	Diff.	$D(u)$	$J(u)$	Diff.	$A(u)$	Diff.	$T(u)$	Diff.	$u$	Diff.
0	0,005	1	32	2	0,00	8	1200	10									
100	0,006	2	34	2	0,08	8	1190	10	4050	0,086	1	200	5	4,06	6	826	4
200	0,008	1	36	2	0,16	8	1180	10	4100	0,087	2	205	5	4,12	6	822	4
300	0,009	1	38	2	0,25	9	1170	10	4150	0,089	1	209	4	4,17	5	818	4
400	0,011	2	40	2	0,34	9	1160	10	4200	0,090	2	213	4	4,23	6	814	4
500	0,012	1	42	2	0,43	9	1150	10	4250	0,092	2	217	4	4,30	7	810	4
		2		2		9		9			2		5		7		5
600	0,014	1	44	1	0,52	8	1141	10	4300	0,094	1	222	5	4,37	6	805	4
700	0,015	1	45	1	0,60	8	1131	10	4350	0,095	1	227	5	4,43	6	801	4
800	0,016	2	46	2	0,69	9	1122	9	4400	0,096	1	232	5	4,49	6	797	4
900	0,018	2	48	2	0,77	8	1112	10	4450	0,098	1	237	5	4,55	6	793	4
1000	0,020	1	50	2	0,86	10	1103	10	4500	0,099	2	242	5	4,61	6	789	4
		2		2		9		9			1		5		6		4
1100	0,021	2	52	3	0,96	9	1093	9	4550	0,101	1	247	5	4,67	6	785	4
1200	0,023	2	55	3	1,05	9	1084	9	4600	0,102	2	252	5	4,73	6	781	4
1300	0,025	1	57	3	1,14	8	1074	10	4650	0,104	2	258	5	4,81	7	776	5
1400	0,026	2	60	3	1,22	9	1065	9	4700	0,106	1	263	5	4,88	6	772	4
1500	0,028	2	62	3	1,31	10	1056	10	4750	0,107	2	268	5	4,94	6	768	4
		2		3		10		10			1		6		6		4
1600	0,030	2	65	3	1,41	10	1046	9	4800	0,109	2	273	5	5,00	6	764	4
1700	0,032	2	68	3	1,51	9	1037	9	4850	0,110	2	279	6	5,06	6	760	4
1800	0,034	1	71	3	1,60	9	1028	9	4900	0,112	2	285	6	5,13	7	756	4
1900	0,035	1	75	4	1,70	10	1018	10	4950	0,114	1	290	6	5,20	7	752	4
2000	0,037	2	78	3	1,80	10	1009	9	5000	0,115	2	296	6	5,27	7	748	4
		2		3		10		9			2		6		7		4
2100	0,039	2	81	4	1,90	10	1000	9	5050	0,117	2	302	6	5,34	6	744	4
2200	0,041	2	85	4	2,00	10	991	9	5100	0,119	2	308	6	5,40	6	740	4
2300	0,043	2	89	4	2,10	10	982	9	5150	0,120	1	314	6	5,47	7	736	4
2400	0,045	2	94	5	2,20	10	972	10	5200	0,122	2	320	6	5,54	7	732	4
2500	0,047	2	98	5	2,30	10	963	9	5250	0,124	2	326	6	5,60	6	728	4
		2		5		10		9			2		6		7		4
2600	0,050	2	103	5	2,40	10	954	9	5300	0,126	2	332	6	5,67	7	724	4
2700	0,052	2	108	5	2,50	11	945	9	5350	0,128	2	338	6	5,74	7	720	4
2800	0,054	2	113	5	2,61	11	936	9	5400	0,130	2	345	7	5,81	7	716	4
2900	0,056	3	119	6	2,72	11	927	9	5450	0,132	2	352	6	5,88	7	712	4
3000	0,059	1	125	3	2,83	6	918	5	5500	0,134	2	358	7	5,96	8	708	4
		1		3		6		5			2		7		8		4
3050	0,060	1	128	2	2,89	6	913	4	5550	0,136	2	365	7	6,04	7	704	4
3100	0,061	1	130	2	2,95	5	909	4	5600	0,138	2	372	7	6,11	7	700	4
3150	0,062	1	133	3	3,00	6	905	4	5650	0,140	2	379	7	6,18	7	696	4
3200	0,064	2	136	3	3,06	6	900	5	5700	0,142	2	386	7	6,25	7	692	4
3250	0,065	1	140	3	3,12	6	895	5	5750	0,144	2	393	7	6,33	7	688	4
		1		3		6		5			2		7		7		4
3300	0,066	1	143	3	3,18	5	891	4	5800	0,146	2	400	8	6,40	8	684	4
3350	0,067	2	146	4	3,23	6	887	5	5850	0,148	2	408	8	6,48	8	680	4
3400	0,069	2	150	4	3,29	6	882	5	5900	0,150	2	415	7	6,56	8	676	3
3450	0,070	1	153	3	3,35	6	878	4	5950	0,152	2	422	8	6,63	7	673	4
3500	0,071	2	156	4	3,40	6	874	5	6000	0,154	2	430	8	6,70	7	669	4
		2		4		6		5			2		7		7		4
3550	0,073	1	160	4	3,46	6	869	4	6050	0,156	2	437	8	6,77	8	665	4
3600	0,074	1	164	4	3,52	6	865	5	6100	0,158	2	445	8	6,85	8	661	4
3650	0,075	2	168	4	3,58	6	860	4	6150	0,160	2	453	8	6,93	8	657	3
3700	0,077	2	172	4	3,64	6	856	4	6200	0,162	2	460	7	7,00	7	654	4
3750	0,678	1	176	4	3,70	6	852	5	6250	0,165	2	468	8	7,07	8	650	4
		1		4		6		5			2		8		8		4
3800	0,079	1	180	4	3,76	6	847	4	6300	0,167	2	476	8	7,15	7	646	3
3850	0,080	1	184	4	3,82	6	843	4	6350	0,169	2	484	8	7,22	7	643	3
3900	0,082	1	188	4	3,88	6	839	4	6400	0,172	2	493	8	7,30	8	639	4
3950	0,083	2	192	4	3,94	6	835	5	6450	0,174	2	501	8	7,38	8	635	3
4000	0,085	1	196	4	4,00	6	830	4	6500	0,176	2	509	9	7,45	8	632	4

$D(u)$	$J(u)$	Diff.	$A(u)$	Diff.	$T(u)$	Diff.	$u$	Diff.	$D(u)$	$J(u)$	Diff.	$A(u)$	Diff.	$T(u)$	Diff.	$u$	Diff.
6550	0,179		518		7,53	8	628	4	9050	0,352	4	1169	18	12,18	11	467	2
6600	0,182	3	527	9	7,61	8	624	3	9100	0,356	5	1187	19	12,29	11	465	3
6650	0,185	3	536	9	7,69	8	621	4	9150	0,361	5	1206	19	12,40	11	462	3
6700	0,187	3	545	9	7,77	8	617	4	9200	0,366	5	1225	19	12,51	11	459	3
6750	0,190	3	555	10	7,85	8	613	3	9250	0,371	4	1244	19	12,62	10	456	2
6800	0,193		564		7,93	8	610	3	9300	0,375	5	1263	19	12,72	10	454	2
6850	0,195	2	573	9	8,01	8	607	3	9350	0,380	5	1282	20	12,82	10	452	3
6900	0,198	3	583	10	8,09	8	603	4	9400	0,385	6	1302	20	12,92	11	449	3
6950	0,201	3	592	10	8,17	8	600	4	9450	0,391	5	1322	20	13,03	11	446	3
7000	0,204	2	602	10	8,25	8	596	3	9500	0,396	5	1342	20	13,14	12	443	2
7050	0,206		612		8,33	8	593	3	9550	0,401	5	1362	20	13,26	12	441	3
7100	0,209	3	622	11	8,42	8	589	4	9600	0,406	5	1382	21	13,38	12	438	2
7150	0,212	3	633	11	8,50	9	586	4	9650	0,411	5	1402	21	13,50	12	436	2
7200	0,215	3	644	11	8,59	9	582	4	9700	0,416	5	1423	21	13,62	12	434	2
7250	0,218	3	655	11	8,67	8	579	3	9750	0,421	5	1444	21	13,74	12	431	2
7300	0,221		666		8,75	9	576	4	9800	0,426	5	1465	21	13,86	12	429	3
7350	0,224	3	677	11	8,84	9	572	4	9850	0,431	5	1486	21	13,98	11	426	2
7400	0,227	3	688	12	8,93	9	569	4	9900	0,436	5	1507	21	14,09	12	424	3
7450	0,230	3	700	12	9,02	8	565	3	9950	0,441	6	1528	22	14,21	12	421	2
7500	0,233	3	712	12	9,10	8	562	3	10000	0,447	5	1550	22	14,33	11	419	2
7550	0,236		724		9,18	9	559	4	10050	0,452	6	1572	22	14,44	12	417	2,5
7600	0,240	4	736	12	9,27	10	555	3	10100	0,458	5	1594	22	14,56	12	414,5	2,5
7650	0,243	3	748	12	9,37	9	552	3	10150	0,463	6	1616	22	14,68	12	412	2
7700	0,246	3	760	12	9,46	9	549	3	10200	0,469	6	1638	23	14,80	12	410	2,5
7750	0,249	4	773	13	9,55	10	546	4	10250	0,475	6	1661	23	14,92	13	407,5	2
7800	0,253		786		9,65	10	542	3	10300	0,481	6	1684	23	15,05	12	405,5	2
7850	0,256	3	799	13	9,75	9	539	3	10350	0,487	6	1707	24	15,17	13	403,5	2,5
7900	0,259	3	812	13	9,84	9	536	3	10400	0,493	6	1731	24	15,30	13	401	2
7950	0,262	4	825	13	9,93	9	533	3	10450	0,499	7	1755	25	15,42	13	399	2
8000	0,266	4	838	14	10,02	10	530	4	10500	0,506	6	1780	25	15,55	13	397	2,5
8050	0,270		852		10,12	10	526	3	10550	0,512	6	1805	26	15,68	13	394,5	2
8100	0,274	3	866	14	10,22	9	523	3	10600	0,518	6	1831	26	15,81	13	392,5	2
8150	0,277	3	880	14	10,31	9	520	3	10650	0,524	7	1857	26	15,93	13	390,5	2
8200	0,280	4	894	14	10,41	9	517	3	10700	0,531	7	1883	27	16,06	13	388,5	2
8250	0,284	4	908	15	10,50	10	514	3	10750	0,538	7	1910	27	16,19	13	386,5	2
8300	0,288	3	923	15	10,60	10	511	3	10800	0,545	7	1937	28	16,32	13	384,5	2
8350	0,291	3	938	15	10,70	10	508	3	10850	0,552	7	1965	28	16,45	13	382,5	2
8400	0,295	4	953	15	10,80	10	505	3	10900	0,559	7	1993	28	16,58	13	380,5	2
8450	0,299	4	968	15	10,90	10	502	3	10950	0,566	7	2021	29	16,71	13	378,5	1,5
8500	0,303	4	983	16	11,01	11	499	3	11000	0,573	7	2050	29	16,84	13	377	2
8550	0,307	5	999	16	11,11	11	496	3	11050	0,580	7	2078	29	16,97	13	375	2
8600	0,312	5	1015	16	11,22	11	493	3	11100	0,587	7	2107	29	17,10	14	373	2
8650	0,316	4	1031	16	11,33	10	490	3	11150	0,594	7	2136	29	17,24	14	371	1,5
8700	0,320	5	1047	17	11,43	10	487	3	11200	0,601	7	2165	30	17,38	13	369,5	2
8750	0,325	5	1064	17	11,53	11	484	3	11250	0,608	7	2195	31	17,51	13	367,5	1,5
8800	0,330		1081		11,64	11	481	3	11300	0,615	7	2226	32	17,64	14	366	2
8850	0,334	4	1098	17	11,75	10	478	2	11350	0,622	8	2258	32	17,78	14	364	1,5
8900	0,338	5	1115	18	11,85	11	476	3	11400	0,630	8	2290	32	17,92	14	362,5	1,5
8950	0,343	5	1133	18	11,96	11	473	3	11450	0,638	8	2322	33	18,05	14	361	2
9000	0,348	4	1151	18	12,07	11	470	3	11500	0,646	8	2355	33	18,19	14	359	1,5

Tabelle 10a. Primäre Funktionen  $D, J, A, T$ .

611

$D(u)$	$J(u)$	Diff.	$A(u)$	Diff.	$T(u)$	Diff.	$u$	Diff.	$D(u)$	$J(u)$	Diff.	$A(u)$	Diff.	$T(u)$	Diff.	$u$	Diff.
11550	0,654	8	2388	33	18,33	14	357,5	1,5	15200	1,400	26	6027	141	30,09	36	278,5	2
11600	0,662	8	2421	33	18,47	14	356	2	15300	1,426	26	6168	143	30,45	36	276,5	1,5
11650	0,670	8	2455	34	18,61	14	354	1,5	15400	1,452	26	6311	146	30,81	36	275	1,5
11700	0,678	8	2489	34	18,75	15	352,5	1,5	15500	1,478	26	6457	148	31,17	36	273,5	1,5
11750	0,686	8	2524	35	18,90	15	351	1,5	15600	1,504	26	6605	151	31,53	36	272	1,5
		8		35		14					26				37		
11800	0,694	8	2559	35	19,04	14	349,5	1,5	15700	1,530	26	6756	154	31,90	37	270,5	1,5
11850	0,702	8	2594	35	19,18	15	348	1,5	15800	1,556	27	6910	159	32,27	38	269	1,5
11900	0,710	8	2629	35	19,33	15	346,5	1,5	15900	1,583	27	7069	159	32,65	37	267,5	1,5
11950	0,718	8	2665	36	19,48	15	345	1,5	16000	1,610	57	7228	330	33,02	74	266	3
12000	0,726	8	2701	36	19,63	15	343,5	1,5	16200	1,667	59	7558	341	33,76	75	263	2,5
		8		36		15											
12050	0,734	9	2737	37	19,78	14	342	1,5	16400	1,726	60	7899	352	34,51	75	260,5	3
12100	0,743	9	2774	37	19,92	15	340,5	1,5	16600	1,786	61	8251	358	35,26	76	257,5	2,5
12150	0,751	8	2811	38	20,07	15	339	1,5	16800	1,847	61	8614	374	36,02	79	255	3
12200	0,760	8	2849	38	20,22	15	337,5	1,5	17000	1,908	62	8988	386	36,81	81	252	2,5
12250	0,768	9	2887	39	20,37	14	336	1	17200	1,970	63	9374	398	37,62	82	249,5	3
		9		39		15					64						
12300	0,777	8	2926	39	20,51	15	335	1,5	17400	2,033	65	9772	411	38,44	83	246,5	2,5
12350	0,785	9	2965	39	20,66	15	333,5	1,5	17600	2,097	65	10183	424	39,27	84	244	2,5
12400	0,794	9	3004	40	20,81	15	332	1,5	17800	2,162	67	10607	438	40,11	85	241,5	2,5
12450	0,803	9	3044	41	20,96	15	330,5	1	18000	2,229	68	11045	452	40,96	86	239	2,5
12500	0,812	9	3085	41	21,11	15	329,5	1	18200	2,297	70	11497	466	41,82	86	236,5	2,5
		9		41		15					72						
12550	0,821	9	3126	42	21,26	15	328,5	1,5	18400	2,367	73	11963	480	42,68	87	234	2,5
12600	0,830	9	3167	42	21,41	15	327	1	18600	2,439	73	12443	494	43,55	87	231,5	2
12650	0,839	10	3209	43	21,56	15	326	1,5	18800	2,512	76	12937	508	44,42	88	229,5	2,5
12700	0,849	10	3251	43	21,71	16	324,5	1	19000	2,588	78	13445	523	45,30	88	227	2
12750	0,858	10	3293	44	21,87	16	323,5	1,5	19200	2,666	79	13968	539	46,18	89	225	2,5
		10		44		16					80						
12800	0,868	9	3337	43	22,02	16	322	1	19400	2,745	82	14507	556	47,07	89	222,5	2
12850	0,877	10	3380	44	22,18	16	321	1	19600	2,825	83	15063	576	47,96	90	220,5	2,5
12900	0,887	10	3424	44	22,34	16	320	2,5	19800	2,907	84	15639	601	48,86	91	218	2
13000	0,907	20	3515	98	22,65	31	317,5	2	20000	2,991	86	16240	616	49,77	93	216	2,5
13100	0,927	20	3607	95	22,97	32	315,5	2	20200	3,077	87	16856	631	50,70	94	213,5	2
		20		95		32					88						
13200	0,947	21	3702	96	23,29	33	313,5	2,5	20400	3,164	88	17487	646	51,64	95	211,5	2
13300	0,968	20	3798	98	23,62	32	311	2	20600	3,252	90	18133	661	52,59	96	209,5	2
13400	0,988	20	3896	99	23,94	33	309	2	20800	3,342	92	18794	677	53,55	97	207,5	2
13500	1,009	21	3995	102	24,27	33	307	1,5	21000	3,434	94	19471	693	54,52	98	205,5	2
13600	1,029	21	4097	103	24,60	32	305,5	2	21200	3,528	96	20164	711	55,50	99	203,5	2
		21		103		32					98						
13700	1,050	21	4200	105	24,92	33	303,5	2	21400	3,624	99	20875	729	56,49	1,00	201,5	2
13800	1,071	21	4305	107	25,25	33	301,5	1,5	21600	3,722	99	21604	748	57,49	1,00	199,5	2
13900	1,092	21	4412	111	25,58	33	300	2	21800	3,821	100	22352	771	58,49	1,02	197,5	1,5
14000	1,113	22	4523	113	25,91	33	298	1,5	22000	3,921	103	23123	799	59,51	1,03	196	2
14100	1,135	23	4636	115	26,24	34	296,5	2	22200	4,024	106	23922	837	60,54	1,05	194	1,5
		23		115		34					108						
14200	1,158	23	4751	116	26,58	34	294,5	1,5	22400	4,130	108	24739	885	61,57	1,04	192,5	2
14300	1,181	23	4867	119	26,92	34	293	2	22600	4,238	109	25574	926	62,61	1,05	190,5	1,5
14400	1,204	24	4986	121	27,26	34	291	1,5	22800	4,347	111	26430	979	63,66	1,06	189	2
14500	1,228	24	5107	123	27,60	35	288	1,5	23000	4,458	113	27309	1028	64,72	1,07	187	1,5
14600	1,252	24	5230	126	27,95	35	286	2	23200	4,571	116	28207	1080	65,79	1,08	185,5	2
		24		126		35					117						
14700	1,276	24	5356	129	28,30	35	284,5	1,5	23400	4,687	117	29127	1133	66,87	1,09	183,5	1,5
14800	1,300	24	5485	132	28,65	36	283	1,5	23600	4,804	119	30074	1193	67,96	1,11	182	1,5
14900	1,324	25	5617	134	29,01	36	281,5	1,5	23800	4,923	123	31048	1268	69,07	1,13	180,5	2
15000	1,349	25	5751	137	29,37	36	280	1,5	24000	5,046	124	32056	1344	70,20	1,13	178,5	1,5
15100	1,374	26	5888	139	29,73	36		1,5	24200	5,170	126	33066	1423	71,33	1,14	177	1,5

$D(u)$	$J(u)$	Dif.	$A(u)$	Dif.	$T(u)$	Dif.	$u$	Dif.	$D(u)$	$J(u)$	Dif.	$A(u)$	Dif.	$T(u)$	Dif.	$u$	Dif.
24400	5,296		34089		72,47		175,5		43000	34,51		334790		234,59		79	
24600	5,425	189	35132	1043	73,62	1,15	174	1,5	43500	36,10	1,59	353000	18910	240,97	6,88	77,5	1,5
24800	5,556	131	36179	1047	74,78	1,16	172,5	1,5	44000	37,77	1,87	371610	18610	247,50	6,58	75,5	1,5
25000	5,690	134	37301	1122	75,95	1,17	171	1,5	44500	39,58	1,76	390620	19010	254,18	6,88	74	1,5
25200	5,825	135	38455	1154	77,13	1,18	169,5	1,5	45000	41,36	1,83	410530	19910	261,02	6,34	72,5	1,5
		137		1187		1,18		1,5			1,92		20680		7,01		1,5
25400	5,962		39642		78,31		168		45500	43,28		431410		268,08		71	
25600	6,102	140	40901	1259	79,50	1,19	166,5	1,5	46000	45,29	2,01	453610	22200	275,19	7,16	69,5	1,5
25800	6,245	143	42170	1269	80,70	1,20	165	1,5	46500	47,37	2,08	477200	22590	282,49	7,80	68	1,5
26000	6,391	146	43450	1280	81,91	1,21	163,5	1,5	47000	49,53	2,13	501510	24310	289,93	7,44	66,5	1,5
26200	6,538	147	44735	1285	83,12	1,21	162	1,5	47500	51,77	2,24	526540	25030	297,48	7,55	65	1,5
		148		1290		1,22		1,5			2,35		26730		7,72		1
26400	6,686		46025		84,34	1,21	160,5	1	48000	54,12		552270		305,20		64	
26600	6,836	150	47322	1297	85,55	1,21	159,5	1,5	48500	56,57	2,45	579600	27330	313,09	7,89	62,5	1,5
26800	6,987	151	48625	1308	86,77	1,22	158	1,5	49000	59,14	2,57	609440	29840	321,15	8,06	61	1,5
27000	7,140	153	50060	1425	88,00	1,23	157	1	49500	61,78	2,64	640440	31000	329,30	8,15	60	1
27500	7,54	40	53700	3840	91,22	3,23	153,5	3,5	50000	64,53	2,75	672150	31710	337,66	8,36	58,5	1,5
		42		3890		3,30		3,5			2,91		32420		8,57		1
28000	7,96	45	57590	4110	94,52	3,37	150	3	50500	67,44	3,05	704570	33130	346,23	8,78	57,5	1,5
28500	8,41	47	61700	4330	97,89	3,44	147	3	51000	70,49	3,14	737700	35580	355,01	8,89	56	1
29000	8,88	48	66030	4560	101,33	3,51	144	3	51500	73,63	3,30	773280	37210	363,90	9,16	54	1,5
29500	9,36	50	70580	4800	104,84	3,58	141	3	52000	76,93	3,47	810490	38770	373,06	9,44	52,5	1,5
30000	9,86	53	75380	5070	108,42	3,66	138	3	52500	80,40	3,66	850260	41670	382,50	9,71	51	1
30500	10,39		80450		112,08		135		53000	84,06		891930		392,21		51,5	
31000	10,95	56	85780	5330	115,82	3,74	132	2,5	53500	87,95	3,89	935940	44010	402,31	10,10	50,5	1
31500	11,52	57	91460	5680	119,65	3,83	129,5	2,5	54000	92,00	4,05	981960	46080	412,61	10,30	49,5	1,5
32000	12,12	60	97460	6000	123,56	3,91	126,5	3	54500	96,21	4,21	1030120	48160	423,08	10,47	48	1,5
32500	12,75	63	103700	6340	127,55	3,99	124	2,5	55000	100,58	4,37	1080440	50390	433,72	10,64	47	1
		65		6580		4,09		2,5			4,49		53610		10,77		1
33000	13,40		110220		131,64		121,5		55500	105,07		1133050		444,49		46	
33500	14,08	68	117230	7010	135,81	4,17	118,5	3	56000	109,76	4,63	1186510	53580	455,42	10,93	45	1
34000	14,79	71	124650	7420	140,06	4,25	116	2,5	56500	114,65	4,89	1242180	55600	466,55	11,13	44,5	0,5
34500	15,53	74	132460	7810	144,40	4,34	113,5	2,5	57000	119,74	5,09	1299920	57740	477,87	11,33	43,5	1
35000	16,31	78	140480	8090	148,85	4,45	111,5	2	57500	124,91	5,17	1359030	59110	489,26	11,59	42,5	1
		80		8320		4,54		2,5			5,45		60980		11,87		1
35500	17,11		148800		153,39		109		58000	130,36		1419950		500,93		41,5	
36000	17,95	84	157500	8700	158,03	4,64	106,5	2,5	58500	136,08	5,72	1486730	66790	512,89	11,96	40,5	1,5
36500	18,83	88	166520	9090	162,77	4,74	104,5	2	59000	142,08	6,00	1557070	70340	525,14	12,25	40	0,5
37000	19,76	93	175680	9160	167,61	4,84	102	2,5	59500	148,19	6,11	1630280	73210	537,52	12,38	39	1
37500	20,75	99	185980	10300	172,54	4,93	100	2	60000	154,67	6,48	1706290	76010	550,30	12,78	38	1,5
		1,00		10620		5,04		2			6,86		77480		13,19		0,5
38000	21,75		196600		177,58		98		60500	161,53		1783710		563,49		37,5	
38500	22,78	1,03	207710	11110	182,74	5,16	96	2	61000	168,77	7,24	1864030	80980	577,08	13,59	36,5	1
39000	23,86	1,06	219130	11420	188,02	5,28	94	2	61500	176,46	7,69	1947150	83180	591,27	14,19	36	0,5
39500	25,00	1,14	231110	11980	193,42	5,40	92	2	62000	184,47	8,01	2037780	90630	605,75	14,43	35	1
40000	26,19	1,15	243610	12500	198,95	5,53	90	2	62500	192,81	8,34	2135920	98140	620,47	14,72	34,5	0,5
		1,26		13100		5,65		2			8,66		105690		14,96		1
40500	27,44		256710		204,60		88		63000	201,47		2241580		635,43		33,5	
41000	28,74	1,36	269980	13270	210,37	5,77	86	1,5	63500	210,42	8,96	2343890	107290	650,63	15,20	33	0,5
41500	30,08	1,34	284980	15000	216,22	5,85	84,5	2	64000	219,72	9,30	2457590	108790	666,03	15,40	32	1
42000	31,49	1,41	300300	15320	222,20	5,98	82,5	2	64500	229,37	9,63	2567950	110860	681,65	15,63	31,5	0,5
42500	32,97	1,48	316730	16430	228,32	6,12	80,5	2	65000	239,37	10,00	2679880	111980	697,47	15,83	31	0,5
		1,54		18060		6,27		1,5	65500	249,72	10,35	2793380	113500	713,49	16,02	30	1

Tabelle 10b. Sekundäre Funktion  $E$ ; vgl. Bd. I, § 30.

$\downarrow \frac{\rightarrow v_0}{\xi}$	1200	Diff.	1180	Diff.	1160	Diff.	1140	Diff.	1120	Diff.	1100	Diff.	1080	Diff.	1060	Diff.	1040	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,004	4	0,004	4	0,004	4	0,004	4	0,004	4	0,004	4	0,004	4	0,005	5	0,005	5
1000	0,008	8	0,008	8	0,008	8	0,008	8	0,009	9	0,009	9	0,009	10	0,010	10	0,010	11
2000	0,016	16	0,016	16	0,017	17	0,017	17	0,018	18	0,018	18	0,019	19	0,020	20	0,021	21
3000	0,025	25	0,026	26	0,027	27	0,027	27	0,028	28	0,029	29	0,030	30	0,031	31	0,033	33
4000	0,035	35	0,036	36	0,038	38	0,039	39	0,040	40	0,041	41	0,043	43	0,044	44	0,047	47
5000	0,047	47	0,048	48	0,050	50	0,052	52	0,054	54	0,056	56	0,058	58	0,060	60	0,063	63
6000	0,061	61	0,062	62	0,064	64	0,067	67	0,070	70	0,073	73	0,076	76	0,079	79	0,082	82
7000	0,078	78	0,079	79	0,081	81	0,085	85	0,089	89	0,093	93	0,097	97	0,102	102	0,106	106
8000	0,098	98	0,100	100	0,103	103	0,107	107	0,112	112	0,117	117	0,122	122	0,128	128	0,134	134
9000	0,121	121	0,124	124	0,129	129	0,134	134	0,140	140	0,146	146	0,152	152	0,160	160	0,169	169
10000	0,148	148	0,153	153	0,159	159	0,165	165	0,173	173	0,181	181	0,189	189	0,198	198	0,209	209
11000	0,180	180	0,187	187	0,194	194	0,202	202	0,211	211	0,221	221	0,232	232	0,243	243	0,256	256
12000	0,218	218	0,227	227	0,237	237	0,246	246	0,257	257	0,269	269	0,283	283	0,297	297	0,311	311
13000	0,263	263	0,274	274	0,286	286	0,298	298	0,311	311	0,325	325	0,341	341	0,357	357	0,373	373
14000	0,315	315	0,328	328	0,342	342	0,357	357	0,372	372	0,389	389	0,407	407	0,425	425	0,443	443
15000	0,375	375	0,390	390	0,406	406	0,424	424	0,442	442	0,461	461	0,481	481	0,502	502	0,523	523
16000	0,442	442	0,460	460	0,479	479	0,499	499	0,520	520	0,542	542	0,564	564	0,587	587	0,611	611
17000	0,518	518	0,539	539	0,561	561	0,584	584	0,608	608	0,633	633	0,658	658	0,683	683	0,709	709
18000	0,604	604	0,628	628	0,653	653	0,679	679	0,706	706	0,733	733	0,760	760	0,786	786	0,814	814
19000	0,700	700	0,726	726	0,753	753	0,781	781	0,810	810	0,839	839	0,869	869	0,900	900	0,932	932
20000	0,802	802	0,832	832	0,863	863	0,894	894	0,925	925	0,957	957	0,989	989	1,022	1022	1,057	1057

$\downarrow \frac{\rightarrow v_0}{\xi}$	1020	Diff.	1000	Diff.	980	Diff.	960	Diff.	940	Diff.	920	Diff.	900	Diff.	880	Diff.	860	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,005	5	0,005	5	0,005	5	0,005	5	0,006	6	0,006	6	0,006	6	0,006	6	0,007	7
1000	0,010	10	0,011	11	0,011	11	0,011	11	0,012	12	0,012	12	0,012	12	0,013	13	0,014	14
2000	0,022	22	0,023	23	0,023	23	0,024	24	0,025	25	0,026	26	0,027	27	0,028	28	0,030	30
3000	0,034	34	0,036	36	0,037	37	0,039	39	0,040	40	0,042	42	0,044	44	0,046	46	0,049	49
4000	0,048	48	0,051	51	0,053	53	0,056	56	0,058	58	0,061	61	0,064	64	0,068	68	0,072	72
5000	0,065	65	0,069	69	0,072	72	0,076	76	0,080	80	0,084	84	0,088	88	0,093	93	0,099	99
6000	0,086	86	0,091	91	0,095	95	0,100	100	0,106	106	0,111	111	0,117	117	0,124	124	0,131	131
7000	0,111	111	0,117	117	0,123	123	0,129	129	0,136	136	0,143	143	0,151	151	0,160	160	0,169	169
8000	0,141	141	0,149	149	0,156	156	0,164	164	0,172	172	0,181	181	0,191	191	0,202	202	0,213	213
9000	0,178	178	0,187	187	0,196	196	0,205	205	0,215	215	0,226	226	0,238	238	0,251	251	0,264	264
10000	0,220	220	0,231	231	0,242	242	0,253	253	0,265	265	0,278	278	0,293	293	0,308	308	0,323	323
11000	0,269	269	0,282	282	0,295	295	0,308	308	0,322	322	0,338	338	0,355	355	0,372	372	0,390	390
12000	0,326	326	0,341	341	0,356	356	0,371	371	0,388	388	0,407	407	0,426	426	0,446	446	0,466	466
13000	0,390	390	0,407	407	0,424	424	0,443	443	0,463	463	0,485	485	0,507	507	0,529	529	0,552	552
14000	0,462	462	0,482	482	0,502	502	0,524	524	0,547	547	0,571	571	0,596	596	0,621	621	0,647	647
15000	0,544	544	0,567	567	0,590	590	0,615	615	0,640	640	0,667	667	0,694	694	0,722	722	0,751	751
16000	0,635	635	0,661	661	0,688	688	0,716	716	0,744	744	0,772	772	0,803	803	0,834	834	0,866	866
17000	0,736	736	0,764	764	0,793	793	0,823	823	0,854	854	0,886	886	0,919	919	0,954	954	0,990	990
18000	0,843	843	0,874	874	0,907	907	0,941	941	0,976	976	1,012	1012	1,049	1049	1,087	1087	1,127	1127
19000	0,965	965	1,000	1000	1,036	1036	1,072	1072	1,109	1109	1,147	1147	1,187	1187	1,229	1229	1,273	1273
20000	1,093	1093	1,130	1130	1,170	1170	1,208	1208	1,249	1249	1,292	1292	1,337	1337	1,384	1384	1,432	1432

$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	840	Dif.	820	Dif.	800	Dif.	790	Dif.	780	Dif.	770	Dif.	760	Dif.	750	Dif.	740	Dif.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,007	7	0,007	7	0,008	8	0,008	8	0,009	9	0,009	9	0,009	10	0,009	10	0,010	10
1000	0,014	17	0,015	18	0,016	19	0,017	20	0,018	21	0,019	21	0,019	22	0,019	23	0,020	23
2000	0,031	30	0,033	31	0,035	32	0,037	33	0,040	34	0,041	35	0,041	36	0,042	37	0,043	38
3000	0,051	34	0,054	35	0,057	36	0,060	37	0,063	38	0,065	39	0,067	40	0,068	41	0,070	42
4000	0,075	39	0,079	40	0,083	41	0,086	42	0,090	43	0,093	44	0,096	45	0,099	46	0,102	47
5000	0,104	44	0,109	45	0,114	46	0,118	47	0,122	48	0,126	49	0,130	50	0,134	51	0,138	52
6000	0,138	48	0,144	49	0,151	50	0,156	51	0,161	52	0,166	53	0,171	54	0,176	55	0,181	56
7000	0,178	52	0,186	53	0,195	54	0,201	55	0,207	56	0,213	57	0,219	58	0,225	59	0,232	60
8000	0,224	56	0,235	57	0,247	58	0,254	59	0,261	60	0,268	61	0,276	62	0,284	63	0,292	64
9000	0,277	61	0,291	62	0,307	63	0,316	64	0,325	65	0,334	66	0,343	67	0,352	68	0,361	69
10000	0,338	66	0,355	67	0,375	68	0,385	69	0,395	70	0,405	71	0,416	72	0,427	73	0,438	74
11000	0,409	71	0,429	72	0,451	73	0,463	74	0,475	75	0,487	76	0,499	77	0,511	78	0,524	79
12000	0,487	76	0,510	77	0,535	78	0,548	79	0,562	80	0,576	81	0,590	82	0,604	83	0,619	84
13000	0,576	81	0,602	82	0,630	83	0,645	84	0,659	85	0,675	86	0,691	87	0,707	88	0,723	89
14000	0,675	86	0,705	87	0,737	88	0,753	89	0,770	90	0,787	91	0,804	92	0,821	93	0,838	94
15000	0,782	91	0,815	92	0,850	93	0,868	94	0,886	95	0,904	96	0,923	97	0,942	98	0,962	99
16000	0,900	96	0,936	97	0,974	98	0,994	99	1,014	100	1,034	101	1,055	102	1,076	103	1,098	104
17000	1,028	101	1,068	102	1,110	103	1,132	104	1,154	105	1,177	106	1,200	107	1,223	108	1,246	109
18000	1,169	106	1,213	107	1,259	108	1,283	109	1,307	110	1,331	111	1,355	112	1,379	113	1,404	114
19000	1,319	111	1,367	112	1,417	113	1,441	114	1,466	115	1,492	116	1,519	117	1,547	118	1,576	119
20000	1,481	116	1,532	117	1,585	118	1,612	119	1,640	120	1,669	121	1,699	122	1,729	123	1,760	124

$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	730	Dif.	720	Dif.	710	Dif.	700	Dif.	690	Dif.	680	Dif.	670	Dif.	660	Dif.	650	Dif.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,010	10	0,010	10	0,011	11	0,011	11	0,011	11	0,011	11	0,012	12	0,012	12	0,013	13
1000	0,021	20	0,021	20	0,022	21	0,023	22	0,023	22	0,024	23	0,025	24	0,026	25	0,027	26
2000	0,044	38	0,045	39	0,047	40	0,049	41	0,050	42	0,052	43	0,054	44	0,056	45	0,058	46
3000	0,072	53	0,073	54	0,076	55	0,079	56	0,081	57	0,084	58	0,087	59	0,090	60	0,093	61
4000	0,105	67	0,108	68	0,111	69	0,114	70	0,117	71	0,121	72	0,125	73	0,129	74	0,133	75
5000	0,142	82	0,146	83	0,150	84	0,155	85	0,159	86	0,164	87	0,169	88	0,175	89	0,181	90
6000	0,186	96	0,191	97	0,197	98	0,203	99	0,209	100	0,215	101	0,221	102	0,228	103	0,236	104
7000	0,239	110	0,246	111	0,253	112	0,260	113	0,267	114	0,275	115	0,283	116	0,292	117	0,301	118
8000	0,300	124	0,308	125	0,316	126	0,325	127	0,334	128	0,343	129	0,353	130	0,364	131	0,375	132
9000	0,370	138	0,380	139	0,390	140	0,400	141	0,410	142	0,421	143	0,433	144	0,445	145	0,457	146
10000	0,449	144	0,461	145	0,473	146	0,485	147	0,497	148	0,509	149	0,524	150	0,537	151	0,550	152
11000	0,537	150	0,550	151	0,563	152	0,577	153	0,591	154	0,605	155	0,620	156	0,635	157	0,651	158
12000	0,634	156	0,649	157	0,664	158	0,680	159	0,696	160	0,712	161	0,728	162	0,745	163	0,763	164
13000	0,740	162	0,757	163	0,774	164	0,791	165	0,808	166	0,826	167	0,845	168	0,865	169	0,885	170
14000	0,856	168	0,874	169	0,892	170	0,911	171	0,930	172	0,950	173	0,971	174	0,993	175	1,016	176
15000	1,032	174	1,053	175	1,074	176	1,095	177	1,116	178	1,138	179	1,161	180	1,185	181	1,210	182
16000	1,120	180	1,142	181	1,165	182	1,188	183	1,212	184	1,236	185	1,261	186	1,287	187	1,314	188
17000	1,270	186	1,294	187	1,318	188	1,343	189	1,369	190	1,396	191	1,424	192	1,452	193	1,480	194
18000	1,430	192	1,457	193	1,484	194	1,511	195	1,539	196	1,568	197	1,598	198	1,629	199	1,660	200
19000	1,605	198	1,634	199	1,663	200	1,692	201	1,722	202	1,753	203	1,785	204	1,818	205	1,851	206
20000	1,791	204	1,822	205	1,853	206	1,885	207	1,918	208	1,952	209	1,987	210	2,023	211	2,059	212



Tabelle 10b. Sekundäre Funktion E.

$v_0 \rightarrow$	640	Diff.	630	Diff.	620	Diff.	610	Diff.	600	Diff.	590	Diff.	580	Diff.	570	Diff.	560	Diff.
0	0,000	13	0,000	14	0,000	14	0,000	14	0,000	14	0,000	15	0,000	15	0,000	16	0,000	16
500	0,013	15	0,014	15	0,014	15	0,014	16	0,014	17	0,015	17	0,015	18	0,016	18	0,016	19
1000	0,028	33	0,029	33	0,029	34	0,030	35	0,031	36	0,032	37	0,033	38	0,034	39	0,035	40
2000	0,060	36	0,062	37	0,063	39	0,065	40	0,067	42	0,069	43	0,071	44	0,073	46	0,075	47
3000	0,096	41	0,099	42	0,102	44	0,105	46	0,109	47	0,112	49	0,115	51	0,119	53	0,122	55
4000	0,137	50	0,141	52	0,146	53	0,151	54	0,156	56	0,161	58	0,166	60	0,172	62	0,177	64
5000	0,187	57	0,193	59	0,199	61	0,205	63	0,212	65	0,219	67	0,226	69	0,234	71	0,241	73
6000	0,244	67	0,252	70	0,260	72	0,268	74	0,277	75	0,286	76	0,295	78	0,305	80	0,314	82
7000	0,311	76	0,322	77	0,332	79	0,342	81	0,352	83	0,362	85	0,373	87	0,385	89	0,396	91
8000	0,387	85	0,399	87	0,411	89	0,423	91	0,435	93	0,447	95	0,460	97	0,474	98	0,487	100
9000	0,472	94	0,486	96	0,500	98	0,514	99	0,528	100	0,542	102	0,557	104	0,572	107	0,587	109
10000	0,566	103	0,582	105	0,598	107	0,613	109	0,628	111	0,644	113	0,661	115	0,679	117	0,696	119
11000	0,669	113	0,687	115	0,705	117	0,722	119	0,739	121	0,757	123	0,776	125	0,796	127	0,815	129
12000	0,782	123	0,802	125	0,822	127	0,841	129	0,860	131	0,880	133	0,901	135	0,923	137	0,944	139
13000	0,905	134	0,927	136	0,949	138	0,970	140	0,991	142	1,013	144	1,036	146	1,060	148	1,083	151
14000	1,039	146	1,063	147	1,087	148	1,110	151	1,133	154	1,157	156	1,182	158	1,208	160	1,234	163
15000	1,185	158	1,210	158	1,235	161	1,261	163	1,287	166	1,313	169	1,340	171	1,368	173	1,396	176
16000	1,341	168	1,368	168	1,396	174	1,424	177	1,453	179	1,482	181	1,511	184	1,541	187	1,572	190
17000	1,509	188	1,539	188	1,570	185	1,601	188	1,632	192	1,663	196	1,695	199	1,728	202	1,762	205
18000	1,691	193	1,722	196	1,755	199	1,789	203	1,824	207	1,859	211	1,894	215	1,930	218	1,967	221
19000	1,884	211	1,918	215	1,954	219	1,992	223	2,031	225	2,070	228	2,109	233	2,148	236	2,188	240
20000	2,095		2,133		2,173		2,214		2,256		2,298		2,341		2,384		2,428	

$v_0 \rightarrow$	550	Diff.	540	Diff.	530	Diff.	520	Diff.	510	Diff.	500	Diff.	490	Diff.	480	Diff.	470	Diff.
0	0,000	17	0,000	17	0,000	18	0,000	18	0,000	19	0,000	19	0,000	20	0,000	21	0,000	21
500	0,017	19	0,017	20	0,018	20	0,018	21	0,019	21	0,019	22	0,020	23	0,021	24	0,021	26
1000	0,036	42	0,037	44	0,038	45	0,039	47	0,040	48	0,041	50	0,043	51	0,045	52	0,047	54
2000	0,078	49	0,081	51	0,083	53	0,086	54	0,088	56	0,091	58	0,094	60	0,097	63	0,101	64
3000	0,127	57	0,132	58	0,136	60	0,140	62	0,144	65	0,149	67	0,154	69	0,159	71	0,165	73
4000	0,184	66	0,190	69	0,196	71	0,202	73	0,209	74	0,216	76	0,223	78	0,230	81	0,238	84
5000	0,250	75	0,259	77	0,267	79	0,275	81	0,283	83	0,292	85	0,301	88	0,311	90	0,322	92
6000	0,325	84	0,336	86	0,346	88	0,356	90	0,366	92	0,377	94	0,389	97	0,401	101	0,414	104
7000	0,409	93	0,422	94	0,434	96	0,446	99	0,458	102	0,471	105	0,486	108	0,502	109	0,518	112
8000	0,502	102	0,516	104	0,530	107	0,545	109	0,560	112	0,576	115	0,592	119	0,611	121	0,630	123
9000	0,604	111	0,620	114	0,637	116	0,654	119	0,672	122	0,691	125	0,711	127	0,732	130	0,753	133
10000	0,715	121	0,734	123	0,753	126	0,773	129	0,794	132	0,816	135	0,838	138	0,862	140	0,886	143
11000	0,836	131	0,857	133	0,879	136	0,902	139	0,926	142	0,951	145	0,976	148	1,002	150	1,029	153
12000	0,967	142	0,990	144	1,015	147	1,041	150	1,068	153	1,096	156	1,124	158	1,152	161	1,182	164
13000	1,109	154	1,134	157	1,162	159	1,191	162	1,221	165	1,251	168	1,282	171	1,313	174	1,346	176
14000	1,263	164	1,291	168	1,321	172	1,353	175	1,386	178	1,419	181	1,453	184	1,487	187	1,522	191
15000	1,427	179	1,459	182	1,493	185	1,528	188	1,564	191	1,600	194	1,637	197	1,674	200	1,713	203
16000	1,606	193	1,641	196	1,678	199	1,716	202	1,755	206	1,794	209	1,834	210	1,874	213	1,915	217
17000	1,799	208	1,837	211	1,877	214	1,918	217	1,960	220	2,002	223	2,044	226	2,087	229	2,132	234
18000	2,007	224	2,048	228	2,091	231	2,135	234	2,180	237	2,225	240	2,270	245	2,317	249	2,366	253
19000	2,231	243	2,276	245	2,322	249	2,369	253	2,417	256	2,465	260	2,515	264	2,566	269	2,619	274
20000	2,473		2,521		2,571		2,622		2,673		2,725		2,779		2,835		2,893	



$\downarrow \frac{v}{\varepsilon}$	460	Diff.	450	Diff.	440	Diff.	430	Diff.	420	Diff.	410	Diff.	400	Diff.	390	Diff.	380	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,022	28	0,023	28	0,024	24	0,025	25	0,027	27	0,028	28	0,030	30	0,031	31	0,032	32
1000	0,049	27	0,051	28	0,053	29	0,055	30	0,057	30	0,060	30	0,063	32	0,066	35	0,070	38
2000	0,105	56	0,109	58	0,113	60	0,118	63	0,124	67	0,130	70	0,136	78	0,143	87	0,150	90
3000	0,171	66	0,177	68	0,184	71	0,192	74	0,201	77	0,210	80	0,220	84	0,231	88	0,242	92
		75		78		81		84		87		91		95		98		101
4000	0,246	87	0,255	89	0,265	91	0,276	94	0,288	97	0,301	100	0,315	102	0,329	105	0,343	108
5000	0,333	95	0,344	98	0,356	101	0,370	104	0,385	107	0,401	110	0,417	114	0,434	117	0,451	121
6000	0,428	106	0,442	108	0,457	111	0,474	114	0,492	117	0,511	120	0,531	124	0,551	128	0,572	131
7000	0,534	115	0,550	118	0,568	121	0,588	124	0,609	127	0,631	130	0,655	132	0,679	135	0,703	138
8000	0,649	126	0,668	129	0,689	131	0,712	134	0,736	137	0,761	141	0,787	146	0,814	150	0,843	158
9000	0,775	136	0,797	139	0,820	142	0,846	144	0,873	148	0,902	151	0,933	154	0,964	158	0,996	162
10000	0,911	146	0,936	149	0,962	152	0,990	155	1,021	157	1,053	161	1,087	165	1,122	170	1,158	175
11000	1,057	156	1,085	159	1,114	162	1,145	166	1,178	170	1,214	174	1,252	178	1,292	181	1,333	186
12000	1,213	167	1,244	170	1,276	173	1,310	178	1,348	182	1,388	186	1,430	190	1,473	195	1,519	200
13000	1,380	179	1,414	183	1,449	188	1,488	191	1,530	195	1,574	199	1,620	203	1,668	209	1,719	214
14000	1,559	194	1,597	198	1,637	202	1,679	206	1,725	210	1,773	215	1,823	221	1,877	225	1,933	230
15000	1,753	205	1,795	209	1,839	214	1,885	220	1,935	224	1,988	229	2,044	234	2,102	240	2,163	245
16000	1,958	221	2,004	226	2,053	232	2,105	237	2,159	242	2,217	246	2,278	251	2,342	257	2,409	263
17000	2,179	239	2,230	243	2,285	246	2,342	250	2,401	256	2,463	263	2,529	270	2,599	277	2,672	285
18000	2,418	256	2,473	262	2,531	271	2,592	277	2,657	281	2,726	286	2,799	290	2,876	295	2,957	301
19000	2,674	280	2,736	285	2,802	286	2,869	292	2,938	300	3,011	308	3,089	315	3,171	322	3,258	329
20000	2,954		3,019		3,088		3,161		3,238		3,319		3,404		3,493		3,587	

$\downarrow \frac{v}{\varepsilon}$	370	Diff.	360	Diff.	350	Diff.	340	Diff.	330	Diff.	320	Diff.	310	Diff.	300	Diff.	290	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,034	84	0,036	86	0,038	88	0,040	40	0,043	43	0,046	46	0,049	49	0,053	53	0,057	57
1000	0,074	40	0,078	42	0,083	45	0,088	48	0,093	50	0,098	52	0,104	55	0,111	58	0,119	62
2000	0,158	84	0,167	89	0,176	93	0,186	98	0,196	103	0,207	108	0,219	115	0,232	122	0,249	130
3000	0,253	95	0,265	98	0,278	103	0,292	108	0,308	113	0,325	118	0,344	125	0,366	133	0,391	142
		104		106		113		119		124		130		137		144		152
4000	0,357	113	0,373	118	0,391	124	0,411	129	0,432	134	0,455	139	0,481	146	0,510	155	0,543	165
5000	0,470	126	0,491	129	0,515	133	0,540	138	0,566	144	0,594	150	0,627	157	0,665	166	0,708	177
6000	0,595	134	0,620	139	0,648	144	0,678	149	0,710	154	0,744	160	0,784	168	0,831	177	0,885	187
7000	0,729	145	0,759	149	0,792	153	0,827	159	0,864	167	0,904	175	0,952	183	1,008	190	1,072	198
8000	0,874	157	0,908	162	0,945	167	0,986	173	1,031	177	1,079	184	1,135	192	1,198	204	1,270	212
9000	1,031	166	1,070	170	1,112	175	1,158	181	1,208	189	1,263	199	1,327	208	1,402	218	1,488	226
10000	1,197	179	1,240	184	1,287	190	1,339	196	1,397	203	1,462	210	1,535	220	1,618	231	1,714	244
11000	1,376	192	1,424	198	1,477	203	1,535	208	1,600	213	1,672	223	1,755	235	1,849	249	1,958	263
12000	1,568	205	1,622	210	1,680	216	1,743	222	1,813	230	1,889	239	1,990	252	2,098	265	2,221	280
13000	1,773	219	1,832	224	1,896	230	1,965	239	2,045	247	2,137	257	2,242	270	2,363	285	2,501	302
14000	1,992	235	2,056	240	2,126	243	2,204	257	2,292	266	2,394	274	2,512	286	2,648	301	2,803	319
15000	2,227	252	2,296	259	2,374	267	2,461	276	2,558	286	2,668	300	2,798	315	2,949	333	3,122	351
16000	2,479	270	2,555	279	2,641	287	2,737	296	2,845	306	2,968	320	3,113	341	3,281	360	3,473	380
17000	2,749	288	2,834	300	2,923	308	3,033	318	3,151	331	3,285	347	3,440	364	3,622	380	3,833	397
18000	3,042	311	3,134	323	3,236	335	3,351	346	3,482	367	3,632	389	3,804	384	4,002	408	4,230	425
19000	3,353	336	3,457	344	3,571	354	3,697	367	3,839	388	4,001	398	4,188	418	4,405	440	4,655	464
20000	3,689		3,801		3,925		4,064		4,221		4,399		4,606		4,845		5,119	

Tabelle 10b. Sekundäre Funktion E.

617

$\frac{v_0}{\xi}$	280	Diff.	270	Diff.	260	Diff.	250	Diff.	240	Diff.	230	Diff.	220	Diff.	210	Diff.	200	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,061	61	0,065	65	0,070	70	0,075	75	0,081	81	0,088	88	0,096	96	0,105	105	0,115	115
1000	0,128	139	0,137	150	0,148	163	0,161	175	0,176	190	0,193	206	0,211	224	0,230	244	0,251	266
2000	0,267	152	0,287	163	0,310	174	0,336	185	0,366	199	0,399	215	0,435	234	0,474	256	0,517	280
3000	0,419	161	0,450	173	0,484	187	0,521	204	0,565	220	0,614	238	0,669	257	0,730	278	0,797	305
4000	0,580	176	0,623	186	0,671	198	0,725	212	0,785	228	0,852	246	0,926	266	1,008	289	1,102	317
5000	0,756	190	0,809	204	0,869	218	0,937	231	1,013	245	1,098	262	1,192	285	1,297	315	1,419	349
6000	0,946	198	1,013	211	1,087	225	1,168	242	1,258	263	1,360	284	1,474	307	1,612	330	1,768	352
7000	1,144	208	1,224	220	1,312	244	1,410	260	1,520	278	1,644	298	1,784	320	1,942	354	2,120	385
8000	1,352	223	1,444	250	1,556	259	1,670	280	1,798	298	1,942	328	2,114	345	2,296	377	2,505	417
9000	1,585	238	1,694	261	1,815	287	1,950	286	2,096	314	2,270	337	2,459	372	2,673	413	2,922	454
10000	1,823	259	1,945	277	2,082	297	2,236	320	2,410	346	2,607	375	2,831	407	3,086	442	3,376	480
11000	2,082	279	2,222	298	2,379	321	2,556	344	2,756	365	2,982	394	3,239	433	3,528	468	3,856	505
12000	2,361	296	2,520	313	2,700	331	2,901	351	3,121	385	3,376	415	3,671	443	3,990	490	4,351	543
13000	2,657	321	2,833	341	3,031	363	3,251	388	3,506	416	3,791	448	4,114	484	4,480	524	4,894	569
14000	2,978	340	3,174	364	3,394	389	3,639	415	3,922	444	4,239	477	4,598	515	5,004	559	5,463	609
15000	3,318	373	3,538	395	3,783	420	4,054	448	4,366	478	4,716	510	5,113	545	5,563	588	6,072	638
16000	3,690	384	3,933	414	4,203	449	4,502	484	4,844	514	5,226	543	5,658	576	6,149	613	6,710	669
17000	4,074	417	4,347	440	4,652	467	4,986	499	5,358	537	5,769	574	6,234	603	6,761	676	7,379	733
18000	4,491	450	4,787	477	5,119	506	5,485	537	5,895	570	6,343	603	6,844	636	7,411	676	8,067	733
19000	4,941	488	5,264	512	5,625	537	6,022	565	6,465	598	6,946	638	7,480	676	8,087	713	8,802	761
20000	5,429		5,776		6,162		6,587		7,063		7,584		8,156		8,799		9,563	


$\frac{v_0}{\xi}$	190	Diff.	180	Diff.	170	Diff.	160	Diff.	150	Diff.	140	Diff.	130	Diff.	120	Diff.	110	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,127	127	0,142	142	0,161	161	0,184	184	0,21	21	0,25	25	0,29	29	0,33	33	0,39	39
1000	0,274	147	0,300	158	0,334	173	0,381	197	0,45	24	0,53	28	0,61	32	0,71	38	0,83	44
2000	0,566	202	0,623	223	0,693	239	0,792	411	0,93	48	1,09	56	1,26	65	1,45	74	1,70	87
3000	0,874	306	0,966	343	1,078	385	1,225	435	1,44	51	1,68	59	1,94	68	2,25	80	2,64	94
4000	1,212	338	1,342	377	1,500	428	1,692	367	1,96	52	2,28	60	2,66	72	3,10	85	3,62	98
5000	1,565	363	1,742	400	1,957	457	2,195	508	2,54	58	2,93	65	3,40	74	3,97	87	4,66	104
6000	1,951	386	2,170	428	2,444	487	2,782	537	3,14	60	3,61	68	4,19	79	4,90	93	5,76	110
7000	2,353	402	2,616	448	2,964	520	3,302	570	3,79	65	4,33	72	5,02	83	5,88	96	6,95	119
8000	2,777	426	3,104	488	3,506	573	3,906	604	4,45	71	5,09	81	5,89	96	6,91	108	8,25	128
9000	3,243	448	3,620	516	4,079	573	4,545	675	5,16	75	5,90	87	6,85	100	8,07	125	9,67	138
10000	3,731	468	4,162	549	4,680	601	5,220	675	5,91	75	6,77	87	7,88	108	9,32	125	11,19	158
11000	4,256	505	4,729	587	5,316	634	5,931	711	6,70	79	7,66	89	8,93	108	10,61	139	12,80	161
12000	4,788	523	5,321	598	5,970	658	6,678	747	7,57	87	8,66	100	10,09	116	11,99	139	14,49	169
13000	5,384	566	5,984	649	6,672	702	7,461	783	8,50	98	9,76	110	11,38	128	13,50	151	16,27	178
14000	6,008	619	6,644	674	7,406	784	8,280	819	9,46	96	10,92	116	12,77	130	15,12	162	18,14	187
15000	6,663	660	7,357	713	8,175	869	9,135	856	10,47	101	12,11	119	14,20	143	16,83	171	20,10	196
16000	7,356	693	8,114	757	9,031	903	10,077	943	11,57	110	13,39	128	15,70	150	18,59	178	22,17	207
17000	8,091	735	8,932	818	9,952	981	11,109	1033	12,77	120	14,76	137	17,28	156	20,44	185	24,36	219
18000	8,853	763	9,803	871	10,964	1018	12,234	1125	14,06	123	16,26	150	19,01	173	22,45	201	26,70	234
19000	9,670	817	10,741	933	12,070	1109	13,455	1221	15,47	141	17,82	156	20,79	176	24,53	208	29,20	250
20000	10,513	843	11,724	963	13,276	1206	14,775	1320	16,95	148	19,45	163	22,65	186	26,74	221	31,94	274

$\frac{v_0}{\xi}$	100	Diff.	90	Diff.	80	Diff.	70	Diff.	60	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,0	
500	0,48	48	0,60	60	0,74	74	0,90	90	1,1	11
1000	1,00	52	1,24	64	1,57	88	2,00	110	2,6	15
2000	2,05	105	2,55	131	3,24	167	4,16	216	5,4	28
3000	3,17	112	3,92	137	4,99	175	6,49	233	8,5	31
		113		146		193		253		34
4000	4,30		5,38		6,92		9,02		11,9	
5000	5,51	121	6,92	154	8,97	205	11,79	277	15,6	37
6000	6,82	131	8,62	170	11,24	227	14,80	301	19,5	39
7000	8,37	155	10,46	184	13,62	238	17,90	310	23,6	41
8000	10,05	168	12,51	205	16,03	241	21,04	314	28,0	44
		175		214		258		326		46
9000	11,80		14,65		18,61		24,30		32,6	
10000	13,65	185	16,92	227	21,30	269	27,64	334	37,4	48
11000	15,62	197	19,30	238	24,12	282	31,08	344	42,4	50
12000	17,72	210	21,84	254	27,15	303	34,90	352	47,7	53
13000	19,86	214	24,49	265	30,45	330	39,08	413	53,8	56
		222		278		357		441		60
14000	22,08		27,27		34,02		43,44		59,3	
15000	24,36	228	30,11	284	37,85	383	48,08	464	65,8	65
16000	26,77	241	33,00	289	41,57	372	53,18	510	—	—
17000	29,34	257	36,13	313	45,53	396	58,39	531	—	—
18000	32,06	272	39,43	330	49,76	423	63,78	589	—	—
		303		372		462		660		—
19000	35,09		43,15		54,38		70,38		—	—
20000	38,52	345	47,86	421	59,46	508	—	—	—	—

Tabelle 10c. Sekundäre Funktion N; vgl. Bd. I, § 30.

$\frac{v_0}{\xi}$	1200	Diff.	1180	Diff.	1160	Diff.	1140	Diff.	1120	Diff.	1100	Diff.	1080	Diff.
0	0,000007		0,000007		0,000007		0,000007		0,000008		0,000008		0,000008	
500	0,000007	0	0,000007	0	0,000007	0	0,000007	0	0,000008	0	0,000008	0	0,000009	1
1000	0,000008	0	0,000008	0	0,000008	0	0,000008	0	0,000009	0	0,000009	0	0,000009	1
2000	0,000008	0	0,000008	0	0,000009	0	0,000009	0	0,000009	0	0,000009	0	0,000010	1
3000	0,000008	0	0,000009	0	0,000009	0	0,000009	0	0,000009	0	0,000010	0	0,000010	1
4000	0,000009	0	0,000009	0	0,000010	0	0,000010	0	0,000010	0	0,000010	0	0,000011	1
5000	0,000009	0	0,000010	0	0,000010	0	0,000011	0	0,000011	0	0,000011	0	0,000012	1
6000	0,000010	1	0,000010	1	0,000011	1	0,000011	1	0,000012	1	0,000012	1	0,000013	1
7000	0,000011	1	0,000011	1	0,000012	1	0,000012	1	0,000013	1	0,000013	1	0,000014	1
8000	0,000012	1	0,000013	1	0,000013	1	0,000014	1	0,000015	1	0,000015	1	0,000015	2
9000	0,000013	1	0,000014	1	0,000014	1	0,000015	1	0,000016	1	0,000016	1	0,000017	2
10000	0,000015	2	0,000015	2	0,000016	2	0,000017	2	0,000017	2	0,000018	2	0,000019	2
11000	0,000017	2	0,000017	2	0,000018	2	0,000019	2	0,000019	2	0,000020	2	0,000021	2
12000	0,000018	2	0,000019	2	0,000020	2	0,000021	2	0,000021	2	0,000023	2	0,000024	2
13000	0,000020	2	0,000021	2	0,000022	2	0,000023	2	0,000024	2	0,000025	2	0,000026	2
14000	0,000022	2	0,000023	2	0,000024	2	0,000025	2	0,000026	2	0,000028	2	0,000029	2
15000	0,000025	3	0,000026	3	0,000027	3	0,000028	3	0,000029	3	0,000031	3	0,000032	3
16000	0,000028	3	0,000029	3	0,000030	3	0,000031	3	0,000032	3	0,000034	3	0,000035	3
17000	0,000031	3	0,000032	3	0,000033	3	0,000034	3	0,000036	3	0,000037	3	0,000039	3
18000	0,000034	3	0,000035	3	0,000036	3	0,000038	3	0,000039	3	0,000041	3	0,000042	3
19000	0,000037	3	0,000038	3	0,000040	3	0,000041	3	0,000043	3	0,000044	3	0,000046	3
20000	0,000040	3	0,000042	3	0,000043	3	0,000045	3	0,000047	3	0,000048	3	0,000049	3

Tabelle 10c. Sekundäre Funktion N.

	1060	Diff.	1040	Diff.	1020	Diff.	1000	Diff.	980	Diff.	960	Diff.	940	Diff.
0	0,000009		0,000009		0,000010		0,000010		0,000011		0,000011		0,000011	
500	0,000010	1	0,000010	1	0,000010	0	0,000011	1	0,000011	0	0,000011	0	0,000012	1
1000	0,000010	0	0,000010	0	0,000010	0	0,000011	0	0,000011	0	0,000011	0	0,000012	0
2000	0,000010	0	0,000011	1	0,000011	1	0,000012	1	0,000012	1	0,000012	1	0,000013	1
3000	0,000010	1	0,000011	0	0,000011	0	0,000012	1	0,000012	0	0,000013	1	0,000013	0
4000	0,000011		0,000012		0,000012		0,000013		0,000013		0,000014		0,000015	
5000	0,000012	1	0,000013	1	0,000013	1	0,000014	1	0,000014	1	0,000015	1	0,000016	1
6000	0,000013	1	0,000014	1	0,000014	1	0,000015	1	0,000016	1	0,000017	1	0,000018	1
7000	0,000015	1	0,000015	1	0,000016	1	0,000017	1	0,000018	1	0,000019	1	0,000020	1
8000	0,000016	1	0,000017	1	0,000018	1	0,000019	1	0,000020	1	0,000021	1	0,000022	1
9000	0,000018		0,000019		0,000020		0,000021		0,000022		0,000023		0,000024	
10000	0,000020	1	0,000021	1	0,000022	1	0,000023	1	0,000024	1	0,000025	1	0,000026	1
11000	0,000022	1	0,000023	1	0,000025	1	0,000026	1	0,000027	1	0,000028	1	0,000029	1
12000	0,000025	1	0,000026	1	0,000027	1	0,000029	1	0,000030	1	0,000031	1	0,000032	1
13000	0,000028	1	0,000029	1	0,000030	1	0,000031	1	0,000033	1	0,000034	1	0,000036	1
14000	0,000031		0,000032		0,000033		0,000034		0,000036		0,000037		0,000039	
15000	0,000034	1	0,000035	1	0,000036	1	0,000038	1	0,000039	1	0,000041	1	0,000043	1
16000	0,000037	1	0,000038	1	0,000040	1	0,000041	1	0,000043	1	0,000045	1	0,000046	1
17000	0,000040	1	0,000042	1	0,000043	1	0,000045	1	0,000047	1	0,000049	1	0,000050	1
18000	0,000044	1	0,000045	1	0,000047	1	0,000049	1	0,000051	1	0,000053	1	0,000054	1
19000	0,000047		0,000049		0,000051		0,000053		0,000055		0,000057		0,000058	
20000	0,000051	1	0,000053	1	0,000055	1	0,000057	1	0,000059	1	0,000061	1	0,000062	1


	920	Diff.	900	Diff.	880	Diff.	860	Diff.	840	Diff.	820	Diff.	800	Diff.
0	0,000011		0,000012		0,000012		0,000013		0,000013		0,000014		0,000014	
500	0,000012	1	0,000013	1	0,000013	1	0,000014	1	0,000014	1	0,000015	1	0,000015	1
1000	0,000012	0	0,000013	0	0,000013	0	0,000014	0	0,000014	0	0,000015	0	0,000016	0
2000	0,000013	1	0,000014	1	0,000014	1	0,000015	1	0,000016	1	0,000017	1	0,000018	1
3000	0,000014	1	0,000015	1	0,000015	1	0,000016	1	0,000017	1	0,000018	1	0,000019	1
4000	0,000015		0,000016		0,000017		0,000018		0,000019		0,000020		0,000021	
5000	0,000017	1	0,000018	1	0,000019	1	0,000020	1	0,000021	1	0,000022	1	0,000023	1
6000	0,000019	1	0,000020	1	0,000021	1	0,000022	1	0,000023	1	0,000024	1	0,000025	1
7000	0,000021	1	0,000022	1	0,000023	1	0,000024	1	0,000025	1	0,000026	1	0,000027	1
8000	0,000023	1	0,000024	1	0,000025	1	0,000026	1	0,000028	1	0,000029	1	0,000030	1
9000	0,000025		0,000026		0,000028		0,000029		0,000031		0,000032		0,000034	
10000	0,000028	1	0,000029	1	0,000031	1	0,000032	1	0,000034	1	0,000035	1	0,000037	1
11000	0,000031	1	0,000032	1	0,000034	1	0,000035	1	0,000037	1	0,000039	1	0,000040	1
12000	0,000034	1	0,000035	1	0,000037	1	0,000039	1	0,000041	1	0,000043	1	0,000044	1
13000	0,000037	1	0,000039	1	0,000041	1	0,000042	1	0,000044	1	0,000046	1	0,000048	1
14000	0,000041		0,000042		0,000045		0,000046		0,000048		0,000050		0,000052	
15000	0,000045	1	0,000046	1	0,000048	1	0,000050	1	0,000052	1	0,000054	1	0,000056	1
16000	0,000048	1	0,000050	1	0,000052	1	0,000054	1	0,000056	1	0,000058	1	0,000060	1
17000	0,000052	1	0,000054	1	0,000056	1	0,000058	1	0,000060	1	0,000063	1	0,000065	1
18000	0,000056	1	0,000058	1	0,000060	1	0,000062	1	0,000065	1	0,000067	1	0,000070	1
19000	0,000060		0,000062		0,000065		0,000067		0,000069		0,000072		0,000075	
20000	0,000064	1	0,000067	1	0,000069	1	0,000072	1	0,000074	1	0,000077	1	0,000080	1

Tabelle 10c. Sekundäre Funktion  $N$ .

$\downarrow \frac{v_0}{\epsilon}$	790	Diff.	780	Diff.	770	Diff.	760	Diff.	750	Diff.	740	Diff.	730	Diff.
5	0,000015	1	0,000015	1	0,000016	1	0,000016	1	0,000017	1	0,000018	1	0,000018	1
500	0,000016	1	0,000016	1	0,000017	1	0,000017	1	0,000018	1	0,000019	1	0,000019	1
1000	0,000017	1	0,000017	1	0,000018	1	0,000018	1	0,000019	1	0,000020	1	0,000020	1
2000	0,000019	1	0,000019	1	0,000020	1	0,000020	1	0,000021	1	0,000022	1	0,000022	1
3000	0,000020	1	0,000021	1	0,000022	1	0,000022	1	0,000023	1	0,000024	1	0,000024	1
4000	0,000022	2	0,000023	2	0,000024	2	0,000024	2	0,000025	2	0,000026	2	0,000026	2
5000	0,000024	2	0,000025	2	0,000026	2	0,000026	2	0,000027	2	0,000028	2	0,000028	2
6000	0,000026	2	0,000027	2	0,000028	2	0,000028	2	0,000029	2	0,000030	2	0,000031	2
7000	0,000028	3	0,000029	3	0,000031	3	0,000031	3	0,000032	3	0,000033	3	0,000034	3
8000	0,000031	4	0,000032	4	0,000034	4	0,000034	4	0,000035	4	0,000036	4	0,000037	4
9000	0,000035	4	0,000036	4	0,000038	4	0,000038	4	0,000039	4	0,000040	4	0,000041	4
10000	0,000039	4	0,000040	4	0,000042	4	0,000042	4	0,000043	4	0,000044	4	0,000045	4
11000	0,000042	4	0,000043	4	0,000045	4	0,000045	4	0,000046	4	0,000048	4	0,000049	4
12000	0,000046	4	0,000047	4	0,000049	4	0,000049	4	0,000050	4	0,000052	4	0,000053	4
13000	0,000050	4	0,000051	4	0,000053	4	0,000053	4	0,000054	4	0,000056	4	0,000057	4
14000	0,000054	4	0,000055	4	0,000057	4	0,000057	4	0,000058	4	0,000060	4	0,000061	4
15000	0,000058	4	0,000059	4	0,000061	4	0,000061	4	0,000062	4	0,000064	4	0,000065	4
16000	0,000062	5	0,000063	5	0,000066	5	0,000066	5	0,000067	5	0,000069	5	0,000070	5
17000	0,000067	5	0,000068	5	0,000071	5	0,000071	5	0,000072	5	0,000074	5	0,000075	5
18000	0,000072	5	0,000073	5	0,000076	5	0,000076	5	0,000077	5	0,000079	5	0,000080	5
19000	0,000077	5	0,000078	5	0,000081	5	0,000081	5	0,000082	5	0,000084	5	0,000085	5
20000	0,000082	5	0,000083	5	0,000086	5	0,000086	5	0,000087	5	0,000089	5	0,000090	5

$\downarrow \frac{v_0}{\epsilon}$	720	Diff.	710	Diff.	700	Diff.	690	Diff.	680	Diff.	670	Diff.	660	Diff.
0	0,000019	1	0,000020	1	0,000020	1	0,000021	1	0,000022	1	0,000023	1	0,000024	1
500	0,000020	1	0,000021	1	0,000021	1	0,000022	1	0,000023	1	0,000024	1	0,000025	1
1000	0,000021	1	0,000022	1	0,000022	1	0,000023	1	0,000024	1	0,000025	1	0,000026	1
2000	0,000023	2	0,000024	2	0,000024	2	0,000025	2	0,000026	2	0,000027	2	0,000028	2
3000	0,000025	2	0,000026	2	0,000026	2	0,000027	2	0,000028	2	0,000029	2	0,000030	2
4000	0,000027	2	0,000028	2	0,000028	2	0,000029	2	0,000030	2	0,000031	2	0,000032	2
5000	0,000029	2	0,000030	2	0,000031	2	0,000032	2	0,000033	2	0,000034	2	0,000035	2
6000	0,000032	3	0,000033	3	0,000034	3	0,000035	3	0,000036	3	0,000037	3	0,000038	3
7000	0,000035	3	0,000036	3	0,000037	3	0,000038	3	0,000039	3	0,000040	3	0,000042	3
8000	0,000038	4	0,000039	4	0,000040	4	0,000042	4	0,000043	4	0,000044	4	0,000046	4
9000	0,000042	4	0,000043	4	0,000044	4	0,000046	4	0,000047	4	0,000048	4	0,000050	4
10000	0,000046	4	0,000047	4	0,000048	4	0,000050	4	0,000051	4	0,000052	4	0,000054	4
11000	0,000050	4	0,000051	4	0,000052	4	0,000054	4	0,000055	4	0,000056	4	0,000058	4
12000	0,000054	4	0,000055	4	0,000056	4	0,000058	4	0,000059	4	0,000060	4	0,000062	4
13000	0,000058	4	0,000059	4	0,000060	4	0,000062	4	0,000063	4	0,000065	4	0,000067	4
14000	0,000062	5	0,000064	5	0,000065	5	0,000067	5	0,000068	5	0,000070	5	0,000072	5
15000	0,000067	5	0,000068	5	0,000070	5	0,000071	5	0,000073	5	0,000074	5	0,000076	5
16000	0,000072	5	0,000073	5	0,000075	5	0,000076	5	0,000078	5	0,000079	5	0,000081	5
17000	0,000077	5	0,000078	5	0,000080	5	0,000081	5	0,000083	5	0,000084	5	0,000086	5
18000	0,000082	5	0,000083	5	0,000085	5	0,000086	5	0,000088	5	0,000089	5	0,000091	5
19000	0,000087	5	0,000088	5	0,000090	5	0,000091	5	0,000093	5	0,000094	5	0,000096	5
20000	0,000092	5	0,000093	5	0,000095	5	0,000096	5	0,000098	5	0,000099	5	0,000101	5

Tabelle 10c. Sekundäre Funktion  $N$ .

621

$\downarrow \frac{v_0}{\xi}$	650	Diff.	640	Diff.	630	Diff.	620	Diff.	610	Diff.	600	Diff.	590	Diff.
0	0,000025		0,000026		0,000027		0,000027		0,000028		0,000029		0,000030	
500	0,000026	1	0,000027	1	0,000028	1	0,000028	1	0,000029	1	0,000030	1	0,000031	1
1000	0,000027	1	0,000028	1	0,000029	1	0,000029	1	0,000030	1	0,000031	1	0,000032	1
2000	0,000029	2	0,000030	2	0,000031	2	0,000032	2	0,000033	2	0,000034	2	0,000035	2
3000	0,000031	2	0,000032	2	0,000033	2	0,000034	2	0,000035	2	0,000036	2	0,000037	2
4000	0,000033	3	0,000034	3	0,000035	3	0,000036	3	0,000038	3	0,000039	3	0,000040	3
5000	0,000036	3	0,000037	3	0,000038	3	0,000039	3	0,000041	3	0,000042	3	0,000044	3
6000	0,000039	4	0,000041	4	0,000042	4	0,000043	4	0,000045	4	0,000046	4	0,000048	4
7000	0,000043	4	0,000045	4	0,000046	4	0,000047	4	0,000049	4	0,000050	4	0,000052	4
8000	0,000047	4	0,000049	4	0,000050	4	0,000051	4	0,000053	4	0,000054	4	0,000056	4
9000	0,000051	4	0,000053	4	0,000054	4	0,000055	4	0,000057	4	0,000058	4	0,000060	4
10000	0,000055	4	0,000057	4	0,000058	4	0,000059	4	0,000061	4	0,000062	4	0,000064	4
11000	0,000059	4	0,000061	4	0,000062	4	0,000063	4	0,000065	4	0,000066	4	0,000068	4
12000	0,000063	4	0,000065	4	0,000066	4	0,000068	4	0,000070	4	0,000071	4	0,000073	4
13000	0,000068	5	0,000070	5	0,000071	5	0,000073	5	0,000075	5	0,000076	5	0,000078	5
14000	0,000073	5	0,000075	5	0,000076	5	0,000078	5	0,000080	5	0,000081	5	0,000083	5
15000	0,000078	5	0,000079	5	0,000081	5	0,000082	5	0,000084	5	0,000086	5	0,000088	5
16000	0,000083	5	0,000084	5	0,000086	5	0,000087	5	0,000089	5	0,000091	5	0,000093	5
17000	0,000088	5	0,000089	5	0,000091	5	0,000092	5	0,000094	5	0,000096	5	0,000098	5
18000	0,000093	5	0,000094	5	0,000096	5	0,000097	5	0,000099	5	0,000101	5	0,000103	5
19000	0,000098	5	0,000099	5	0,000101	5	0,000103	5	0,000105	5	0,000107	5	0,000109	5
20000	0,000103	5	0,000105	5	0,000107	5	0,000109	5	0,000111	5	0,000113	5	0,000115	5

$\downarrow \frac{v_0}{\xi}$	580	Diff.	570	Diff.	560	Diff.	550	Diff.	540	Diff.	530	Diff.	520	Diff.
0	0,000031		0,000032		0,000033		0,000034		0,000035		0,000036		0,000037	
500	0,000032	1	0,000033	1	0,000034	1	0,000035	1	0,000036	1	0,000037	1	0,000038	1
1000	0,000033	1	0,000034	1	0,000035	1	0,000036	1	0,000037	1	0,000038	1	0,000039	1
2000	0,000036	2	0,000037	2	0,000038	2	0,000039	2	0,000041	2	0,000042	2	0,000043	2
3000	0,000038	2	0,000040	2	0,000041	2	0,000042	2	0,000044	2	0,000045	2	0,000047	2
4000	0,000041	3	0,000043	3	0,000045	3	0,000046	3	0,000048	3	0,000049	3	0,000051	3
5000	0,000045	3	0,000047	3	0,000049	3	0,000050	3	0,000052	3	0,000053	3	0,000055	3
6000	0,000049	4	0,000051	4	0,000053	4	0,000054	4	0,000056	4	0,000058	4	0,000059	4
7000	0,000053	4	0,000055	4	0,000057	4	0,000058	4	0,000060	4	0,000062	4	0,000064	4
8000	0,000057	4	0,000059	4	0,000061	4	0,000062	4	0,000064	4	0,000066	4	0,000068	4
9000	0,000062	4	0,000064	4	0,000066	4	0,000067	4	0,000069	4	0,000071	4	0,000073	4
10000	0,000066	4	0,000068	4	0,000070	4	0,000071	4	0,000073	4	0,000075	4	0,000077	4
11000	0,000070	4	0,000072	4	0,000074	4	0,000076	4	0,000078	4	0,000080	4	0,000082	4
12000	0,000075	4	0,000077	4	0,000079	4	0,000081	4	0,000083	4	0,000085	4	0,000087	4
13000	0,000080	5	0,000082	5	0,000084	5	0,000086	5	0,000088	5	0,000090	5	0,000092	5
14000	0,000085	5	0,000087	5	0,000089	5	0,000091	5	0,000093	5	0,000095	5	0,000097	5
15000	0,000090	5	0,000092	5	0,000094	5	0,000096	5	0,000098	5	0,000100	5	0,000102	5
16000	0,000095	5	0,000097	5	0,000099	5	0,000101	5	0,000103	5	0,000105	5	0,000107	5
17000	0,000100	5	0,000102	5	0,000104	5	0,000106	5	0,000108	5	0,000110	5	0,000113	5
18000	0,000105	5	0,000107	5	0,000109	5	0,000111	5	0,000114	5	0,000116	5	0,000119	5
19000	0,000111	5	0,000113	5	0,000115	5	0,000117	5	0,000120	5	0,000122	5	0,000125	5
20000	0,000117	5	0,000119	5	0,000121	5	0,000123	5	0,000126	5	0,000128	5	0,000131	5

$\frac{v_0}{\xi}$	510	Diff.	500	Diff.	490	Diff.	480	Diff.	470	Diff.	460	Diff.	450	Diff.
0	0,000038	1	0,000039	1	0,000040	1	0,000041	2	0,000043	2	0,000045	2	0,000047	2
500	0,000039	1	0,000040	1	0,000041	2	0,000043	2	0,000045	2	0,000047	2	0,000049	2
1000	0,000040	1	0,000041	1	0,000043	2	0,000045	2	0,000047	2	0,000049	2	0,000051	2
2000	0,000044	4	0,000045	4	0,000047	4	0,000049	4	0,000051	4	0,000053	4	0,000055	4
3000	0,000048	4	0,000050	4	0,000051	4	0,000053	4	0,000055	4	0,000057	4	0,000059	4
4000	0,000052	4	0,000054	4	0,000056	4	0,000058	4	0,000060	4	0,000062	4	0,000064	4
5000	0,000056	4	0,000058	4	0,000060	4	0,000062	4	0,000064	4	0,000067	4	0,000069	4
6000	0,000061	5	0,000063	5	0,000065	5	0,000067	5	0,000069	5	0,000072	5	0,000074	5
7000	0,000066	5	0,000068	5	0,000070	5	0,000072	5	0,000074	5	0,000077	5	0,000079	5
8000	0,000070	4	0,000072	4	0,000074	4	0,000076	4	0,000079	5	0,000081	4	0,000083	4
9000	0,000075	5	0,000077	5	0,000079	5	0,000081	5	0,000084	5	0,000086	5	0,000088	5
10000	0,000079	4	0,000082	5	0,000084	5	0,000086	5	0,000089	5	0,000091	5	0,000093	5
11000	0,000084	5	0,000087	5	0,000089	5	0,000091	5	0,000094	5	0,000096	5	0,000098	5
12000	0,000089	5	0,000092	5	0,000094	5	0,000096	5	0,000099	5	0,000101	5	0,000103	5
13000	0,000094	5	0,000096	4	0,000099	5	0,000101	5	0,000104	5	0,000106	5	0,000108	5
14000	0,000099	5	0,000101	5	0,000104	5	0,000106	6	0,000109	5	0,000111	5	0,000114	5
15000	0,000104	5	0,000107	5	0,000109	5	0,000112	5	0,000114	5	0,000117	5	0,000120	5
16000	0,000110	6	0,000112	5	0,000115	5	0,000117	5	0,000120	5	0,000122	5	0,000125	5
17000	0,000115	6	0,000118	5	0,000120	5	0,000123	5	0,000125	5	0,000128	5	0,000131	5
18000	0,000121	6	0,000124	6	0,000126	6	0,000129	6	0,000131	7	0,000134	6	0,000137	6
19000	0,000127	6	0,000130	6	0,000132	7	0,000135	7	0,000138	7	0,000141	7	0,000144	7
20000	0,000133	6	0,000136	6	0,000139	7	0,000142	7	0,000145	7	0,000148	7	0,000151	7

$\frac{v_0}{\xi}$	440	Diff.	430	Diff.	420	Diff.	410	Diff.	400	Diff.	390	Diff.	380	Diff.
0	0,000049	2	0,000051	2	0,000052	2	0,000055	2	0,000058	2	0,000061	2	0,000065	2
500	0,000051	2	0,000053	2	0,000054	2	0,000057	2	0,000060	2	0,000063	2	0,000067	2
1000	0,000053	2	0,000055	2	0,000057	2	0,000060	2	0,000063	2	0,000066	2	0,000070	2
2000	0,000057	4	0,000059	4	0,000062	5	0,000065	5	0,000068	5	0,000071	5	0,000075	5
3000	0,000061	4	0,000064	5	0,000067	5	0,000070	5	0,000073	5	0,000077	5	0,000081	5
4000	0,000066	5	0,000069	5	0,000072	5	0,000075	5	0,000078	5	0,000082	5	0,000086	5
5000	0,000071	5	0,000074	5	0,000077	5	0,000080	5	0,000083	5	0,000087	5	0,000091	5
6000	0,000076	5	0,000079	5	0,000082	5	0,000085	5	0,000088	5	0,000092	5	0,000096	5
7000	0,000081	5	0,000084	5	0,000087	5	0,000090	5	0,000093	5	0,000097	5	0,000101	5
8000	0,000086	5	0,000089	5	0,000092	5	0,000095	5	0,000098	5	0,000102	5	0,000106	5
9000	0,000091	5	0,000094	5	0,000097	5	0,000100	5	0,000103	5	0,000107	5	0,000111	5
10000	0,000096	5	0,000099	5	0,000102	5	0,000105	5	0,000108	5	0,000112	5	0,000116	5
11000	0,000101	5	0,000104	5	0,000107	5	0,000110	5	0,000113	5	0,000117	5	0,000121	5
12000	0,000106	5	0,000109	5	0,000112	5	0,000116	6	0,000119	6	0,000123	6	0,000127	6
13000	0,000111	6	0,000114	6	0,000117	6	0,000121	6	0,000125	6	0,000129	6	0,000133	6
14000	0,000117	6	0,000120	6	0,000123	6	0,000127	6	0,000131	6	0,000135	6	0,000139	6
15000	0,000123	6	0,000126	6	0,000129	6	0,000133	6	0,000136	6	0,000140	6	0,000145	6
16000	0,000128	6	0,000132	6	0,000135	6	0,000139	6	0,000142	6	0,000146	6	0,000151	6
17000	0,000134	6	0,000138	6	0,000141	6	0,000145	6	0,000148	6	0,000152	6	0,000157	6
18000	0,000140	7	0,000144	7	0,000147	7	0,000151	7	0,000155	7	0,000159	7	0,000164	7
19000	0,000147	7	0,000151	7	0,000154	8	0,000158	8	0,000162	8	0,000167	8	0,000171	8
20000	0,000154	7	0,000158	7	0,000162	8	0,000166	8	0,000170	8	0,000175	8	0,000179	8



Tabelle 10c. Sekundäre Funktion  $N$ .

623

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	370	Diff.	360	Diff.	350	Diff.	340	Diff.	330	Diff.	320	Diff.	310	Diff.
0	0,000069		0,000073		0,000078		0,000083		0,000088		0,000093		0,000098	
500	0,000071	2	0,000075	2	0,000080	2	0,000085	2	0,000090	2	0,000095	2	0,000101	3
1000	0,000074	3	0,000078	3	0,000083	3	0,000088	3	0,000093	3	0,000098	3	0,000104	4
2000	0,000079	5	0,000083	5	0,000088	5	0,000093	5	0,000098	5	0,000104	5	0,000110	6
3000	0,000085	5	0,000089	5	0,000093	5	0,000098	5	0,000103	5	0,000109	5	0,000115	5
4000	0,000090	5	0,000094	5	0,000098	5	0,000103	5	0,000108	5	0,000114	5	0,000120	5
5000	0,000095	5	0,000099	5	0,000103	5	0,000108	5	0,000113	5	0,000119	5	0,000125	5
6000	0,000100	5	0,000104	5	0,000108	5	0,000113	5	0,000118	5	0,000124	5	0,000131	6
7000	0,000105	5	0,000109	5	0,000113	5	0,000118	5	0,000123	5	0,000129	5	0,000136	6
8000	0,000110	5	0,000114	5	0,000118	5	0,000123	5	0,000129	5	0,000135	5	0,000142	6
9000	0,000115	5	0,000119	5	0,000123	5	0,000128	5	0,000134	5	0,000141	5	0,000148	6
10000	0,000120	5	0,000124	5	0,000129	5	0,000133	5	0,000140	5	0,000147	5	0,000154	6
11000	0,000125	5	0,000129	5	0,000134	5	0,000139	5	0,000145	5	0,000152	5	0,000160	6
12000	0,000131	5	0,000135	5	0,000140	5	0,000145	5	0,000151	5	0,000158	5	0,000166	6
13000	0,000137	6	0,000141	6	0,000146	6	0,000151	6	0,000157	6	0,000164	6	0,000172	7
14000	0,000143	6	0,000147	6	0,000152	6	0,000157	7	0,000164	7	0,000171	7	0,000179	8
15000	0,000149	6	0,000153	7	0,000158	7	0,000164	7	0,000171	7	0,000178	7	0,000187	8
16000	0,000155	6	0,000159	7	0,000165	7	0,000171	7	0,000178	7	0,000185	7	0,000194	8
17000	0,000161	6	0,000167	7	0,000172	7	0,000178	7	0,000185	7	0,000193	8	0,000202	8
18000	0,000168	8	0,000174	8	0,000180	8	0,000186	8	0,000193	8	0,000201	9	0,000211	9
19000	0,000176	8	0,000182	8	0,000188	8	0,000194	9	0,000202	9	0,000210	10	0,000220	10
20000	0,000184		0,000190		0,000196		0,000203		0,000211		0,000220		0,000230	

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	300	Diff.	290	Diff.	280	Diff.	270	Diff.	260	Diff.	250	Diff.	240	Diff.
0	0,000106		0,000114		0,000123		0,000132		0,000143		0,000155		0,000169	
500	0,000108	2	0,000116	2	0,000125	2	0,000135	2	0,000146	2	0,000158	2	0,000172	3
1000	0,000111	3	0,000119	3	0,000128	3	0,000138	3	0,000149	3	0,000161	3	0,000175	4
2000	0,000117	5	0,000125	5	0,000134	5	0,000144	5	0,000156	5	0,000168	5	0,000182	6
3000	0,000122	5	0,000130	5	0,000139	5	0,000150	5	0,000162	5	0,000174	5	0,000189	7
4000	0,000127	5	0,000136	5	0,000145	5	0,000156	6	0,000168	6	0,000180	6	0,000196	7
5000	0,000132	5	0,000141	5	0,000151	5	0,000162	6	0,000174	6	0,000187	7	0,000203	7
6000	0,000138	6	0,000147	6	0,000157	6	0,000169	7	0,000181	7	0,000194	7	0,000210	8
7000	0,000144	6	0,000153	6	0,000164	7	0,000176	7	0,000189	7	0,000201	7	0,000218	8
8000	0,000150	6	0,000159	6	0,000170	6	0,000182	6	0,000195	7	0,000208	8	0,000226	8
9000	0,000156	6	0,000165	6	0,000176	6	0,000188	6	0,000202	7	0,000216	8	0,000234	8
10000	0,000162	6	0,000171	6	0,000182	6	0,000194	6	0,000209	7	0,000224	8	0,000242	8
11000	0,000168	7	0,000178	7	0,000189	7	0,000201	8	0,000216	8	0,000232	9	0,000250	9
12000	0,000175	7	0,000185	7	0,000196	7	0,000209	8	0,000224	8	0,000241	9	0,000259	9
13000	0,000182	7	0,000192	8	0,000204	8	0,000218	9	0,000233	9	0,000251	10	0,000269	10
14000	0,000189	8	0,000200	8	0,000212	9	0,000227	9	0,000243	10	0,000261	11	0,000280	11
15000	0,000197	8	0,000208	9	0,000221	9	0,000236	10	0,000253	10	0,000272	11	0,000292	12
16000	0,000205	8	0,000217	9	0,000230	10	0,000246	10	0,000263	11	0,000283	11	0,000304	12
17000	0,000213	9	0,000226	9	0,000240	10	0,000256	10	0,000274	11	0,000294	11	0,000316	12
18000	0,000222	10	0,000235	10	0,000250	10	0,000266	11	0,000285	11	0,000305	12	0,000328	12
19000	0,000232		0,000245		0,000260		0,000277		0,000296		0,000317		0,000340	
20000	0,000242		0,000256		0,000271		0,000289		0,000307		0,000329		0,000353	



$\downarrow \frac{v_0}{\epsilon}$	230	Diff.	220	Diff.	210	Diff.	200	Diff.	190	Diff.	180	Diff.
0	0,000184		0,000202		0,000222		0,000243		0,000266		0,000291	
500	0,000187	3	0,000205	3	0,000225	3	0,000247	4	0,000270	4	0,000296	5
1000	0,000191	4	0,000209	4	0,000229	4	0,000251	4	0,000275	5	0,000302	6
2000	0,000198	7	0,000216	7	0,000236	7	0,000259	8	0,000284	9	0,000313	11
3000	0,000205	7	0,000223	7	0,000244	8	0,000267	8	0,000293	9	0,000325	12
		7		7				9		10		13
4000	0,000212		0,000230		0,000252		0,000276		0,000303		0,000337	
5000	0,000219	7	0,000238	8	0,000260	8	0,000285	9	0,000314	11	0,000349	12
6000	0,000227	8	0,000246	9	0,000269	9	0,000295	10	0,000325	12	0,000362	13
7000	0,000235	8	0,000255	9	0,000278	9	0,000305	10	0,000337	12	0,000376	14
8000	0,000243	8	0,000264	9	0,000288	10	0,000316	11	0,000350	13	0,000390	14
		8		9		10		11		13		14
9000	0,000251		0,000273		0,000298		0,000327		0,000363		0,000404	
10000	0,000260	9	0,000282	9	0,000308	10	0,000339	12	0,000376	13	0,000418	14
11000	0,000269	9	0,000292	10	0,000319	11	0,000351	12	0,000389	13	0,000433	15
12000	0,000279	10	0,000303	11	0,000331	12	0,000364	13	0,000403	14	0,000448	15
13000	0,000290	11	0,000315	12	0,000344	13	0,000378	14	0,000417	14	0,000463	15
		12		13		13		14		14		15
14000	0,000302		0,000328		0,000357		0,000392		0,000431		0,000478	
15000	0,000314	12	0,000341	13	0,000370	13	0,000406	14	0,000445	14	0,000494	16
16000	0,000327	13	0,000354	13	0,000384	14	0,000420	14	0,000460	15	0,000510	17
17000	0,000340	13	0,000367	13	0,000398	14	0,000434	14	0,000476	16	0,000527	17
18000	0,000353	13	0,000380	14	0,000412	14	0,000449	15	0,000493	17	0,000546	19
		13		14		14		16		17		20
19000	0,000366		0,000394		0,000426		0,000464		0,000510		0,000566	
20000	0,000379	13	0,000408	14	0,000441	15	0,000480	16	0,000528	18	0,000587	21

$\downarrow \frac{v_0}{\epsilon}$	170	Diff.	160	Diff.	150	Diff.	140	Diff.	130	Diff.	120	Diff.
0	0,000322		0,000365		0,00043		0,00051		0,00060		0,00070	
500	0,000328	6	0,000372	7	0,00044	1	0,00052	1	0,00061	1	0,00071	1
1000	0,000335	7	0,000380	8	0,00045	1	0,00053	1	0,00062	1	0,00072	1
2000	0,000348	13	0,000396	16	0,00046	1	0,00054	1	0,00063	1	0,00073	1
3000	0,000362	14	0,000412	18	0,00048	2	0,00056	2	0,00065	2	0,00075	2
		14		18		1		1		1		2
4000	0,000376		0,000428		0,00049		0,00057		0,00066		0,00077	
5000	0,000391	15	0,000444	18	0,00051	2	0,00059	2	0,00068	2	0,00079	2
6000	0,000406	15	0,000461	17	0,00052	1	0,00060	1	0,00070	2	0,00082	3
7000	0,000422	16	0,000478	17	0,00054	2	0,00062	2	0,00072	2	0,00084	3
8000	0,000438	16	0,000496	18	0,00056	2	0,00064	2	0,00074	2	0,00086	3
		16		18		2		2		2		3
9000	0,000454		0,000514		0,00058		0,00066		0,00076		0,00089	
10000	0,000470	16	0,000532	18	0,00060	2	0,00068	2	0,00078	2	0,00093	4
11000	0,000486	16	0,000550	18	0,00062	2	0,00070	2	0,00081	3	0,00097	4
12000	0,000502	16	0,000568	18	0,00064	2	0,00072	2	0,00084	3	0,0101	4
13000	0,000518	16	0,000586	18	0,00066	2	0,00075	3	0,00088	4	0,0105	4
		16		18		2		3		3		4
14000	0,000534		0,000604		0,00068		0,00078		0,00091		0,0109	
15000	0,000550	16	0,000622	18	0,00070	2	0,00081	3	0,00095	4	0,0113	4
16000	0,000568	18	0,000642	20	0,00072	2	0,00084	3	0,00098	4	0,0117	4
17000	0,000588	20	0,000664	22	0,00075	3	0,00087	3	0,0102	4	0,0121	4
18000	0,000610	22	0,000689	25	0,00078	3	0,00090	3	0,0105	4	0,0125	4
		24		28		3		3		4		4
19000	0,000634		0,000717		0,00081		0,00093		0,0109		0,0129	
20000	0,000659	25	0,000747	30	0,00085	4	0,00097	4	0,0113	4	0,0134	5

Tabelle 10c. Sekundäre Funktion  $N$ . — Tabelle 10d. Sekundäre Funktion  $H$ . 625

$\frac{v_0}{v}$	110	Dif.	100	Dif.	90	Dif.	80	Dif.	70	Dif.	60	Dif.
0	0,00082	1	0,00097	1	0,00119	2	0,00151	2	0,00196	3	0,0024	1
500	0,00083	1	0,00098	1	0,00121	2	0,00153	3	0,00199	3	0,0025	1
1000	0,00084	2	0,00100	2	0,00123	3	0,00156	5	0,00202	6	0,0026	1
2000	0,00086	2	0,00103	3	0,00127	4	0,00161	5	0,00208	8	0,0027	1
3000	0,00088	2	0,00106	3	0,00131	4	0,00166	6	0,00216	9	0,0028	1
4000	0,00090	3	0,00109	3	0,00135	4	0,00172	7	0,00225	9	0,0029	1
5000	0,00093	3	0,00112	4	0,00139	5	0,00179	7	0,00234	9	0,0031	2
6000	0,00096	3	0,00116	4	0,00144	5	0,00186	7	0,00243	9	0,0033	1
7000	0,00099	3	0,00120	4	0,00149	6	0,00193	7	0,00252	9	0,0034	1
8000	0,00102	4	0,00124	5	0,00155	6	0,00200	7	0,00261	9	0,0035	1
9000	0,00106	4	0,00129	5	0,00161	6	0,00207	7	0,00270	9	0,0036	1
10000	0,00110	4	0,00134	5	0,00167	7	0,00214	7	0,00279	9	0,0037	1
11000	0,00114	5	0,00139	5	0,00174	7	0,00221	8	0,00288	9	0,0038	1
12000	0,00119	5	0,00145	6	0,00181	7	0,00229	8	0,00297	9	0,0039	1
13000	0,00124	5	0,00151	6	0,00188	7	0,00237	8	0,00306	9	0,0040	1
14000	0,00129	5	0,00157	6	0,00195	7	0,00245	8	0,00315	10	0,0041	1
15000	0,00134	5	0,00163	6	0,00202	7	0,00253	8	0,00325	11	0,0042	1
16000	0,00139	5	0,00169	6	0,00209	7	0,00261	8	0,00336	11		
17000	0,00144	5	0,00175	6	0,00216	7	0,00269	9	0,00347	11		
18000	0,00149	5	0,00181	6	0,00223	7	0,00278	9	0,00358	12		
19000	0,00154		0,00187		0,00230	7	0,00287		0,00370			
20000	0,00160	6	0,00193	6	0,00237	7	0,00297	10				

Tabelle 10d. Sekundäre Funktion  $H$ ; vgl. Bd. I, § 30.

$\frac{v_0}{v}$	1200	Dif.	1180	Dif.	1160	Dif.	1140	Dif.	1120	Dif.	1100	Dif.	1080	Dif.	1060	Dif.
0	0,00	43	0,00	43	0,00	44	0,00	44	0,00	45	0,00	45	0,00	46	0,00	47
500	0,43	44	0,43	45	0,44	45	0,44	46	0,45	46	0,45	46	0,46	47	0,47	50
1000	0,87	93	0,88	95	0,89	97	0,90	99	0,91	101	0,93	103	0,95	106	0,97	109
2000	1,80	105	1,83	106	1,86	108	1,89	110	1,92	111	1,96	115	2,01	118	2,06	120
3000	2,83	115	2,88	118	2,94	120	2,99	123	3,05	126	3,12	128	3,19	131	3,26	134
4000	3,98	129	4,06	131	4,14	134	4,22	137	4,31	140	4,40	144	4,50	147	4,60	150
5000	5,27	149	5,37	145	5,48	148	5,59	152	5,71	156	5,84	160	5,97	164	6,10	169
6000	6,69	159	6,82	163	6,96	167	7,11	171	7,27	174	7,44	177	7,61	181	7,79	186
7000	8,28	178	8,45	182	8,63	186	8,82	190	9,01	193	9,21	196	9,42	200	9,65	203
8000	10,06	201	10,27	206	10,49	211	10,72	216	10,97	221	11,23	226	11,50	231	11,78	236
9000	12,07	226	12,33	231	12,60	236	12,88	241	13,18	246	13,49	251	13,81	256	14,14	261
10000	14,33	252	14,64	257	14,96	262	15,29	267	15,64	271	16,00	276	16,37	280	16,75	285
11000	16,85	278	17,21	283	17,58	288	17,96	293	18,35	298	18,76	303	19,17	307	19,60	311
12000	19,63	304	20,04	308	20,46	312	20,89	316	21,33	320	21,78	325	22,24	330	22,71	335
13000	22,67	334	23,12	339	23,58	344	24,05	349	24,53	354	25,03	359	25,54	364	26,06	369
14000	25,91	366	26,41	371	26,92	376	27,44	381	27,97	386	28,52	391	29,08	396	29,65	378
15000	29,37	396	29,92	401	30,48	406	31,05	411	31,63	416	32,22	421	32,82	426	33,43	386
16000	33,03	426	33,62	431	34,22	436	34,83	441	35,46	446	36,10	451	36,75	456	37,41	396
17000	36,89	456	37,53	461	38,18	466	38,84	471	39,51	476	40,19	481	40,89	486	41,60	406
18000	40,97	486	41,66	491	42,36	496	43,07	501	43,79	506	44,52	511	45,26	516	46,01	416
19000	45,27	516	46,00	521	46,74	526	47,49	531	48,25	536	49,02	541	49,81	546	50,61	426
20000	49,76	546	50,53	551	51,31	556	52,10	561	52,91	566	53,74	571	54,58	576	55,43	436

$\frac{v_0}{\epsilon}$	1040	Diff.	1020	Diff.	1000	Diff.	980	Diff.	960	Diff.	940	Diff.	920	Diff.	900	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,48	48	0,50	50	0,51	51	0,52	52	0,53	53	0,54	54	0,56	56	0,57	57
1000	1,00	52	1,02	52	1,05	54	1,07	55	1,10	57	1,12	58	1,15	59	1,17	60
2000	2,11	111	2,16	114	2,21	116	2,26	119	2,31	121	2,36	124	2,42	127	2,47	130
3000	3,34	123	3,41	125	3,49	128	3,57	131	3,65	134	3,73	137	3,82	140	3,91	144
		137		140		143		146		149		153		157		162
4000	4,71		4,81	157	4,92	160	5,03	164	5,14	169	5,26	174	5,39	178	5,53	182
5000	6,24	158	6,38	177	6,52	182	6,67	187	6,83	191	7,00	195	7,17	201	7,35	207
6000	7,97	173	8,15	198	8,34	204	8,54	209	8,74	215	8,95	221	9,18	227	9,42	233
7000	9,99	192	10,13	217	10,28	223	10,63	233	10,89	239	11,16	245	11,45	250	11,75	256
8000	12,06	217	12,35	222	12,65	227	12,96	235	13,28	243	13,61	245	13,95	250	14,31	256
		243		247		252		258		264		270		276		282
9000	14,48		14,82	272	15,17	278	15,54	283	15,92	288	16,31	293	16,71	298	17,13	303
10000	17,14	266	17,54	295	17,95	301	18,37	306	18,80	311	19,24	316	19,69	321	20,16	326
11000	20,04	290	20,49	320	20,96	324	21,43	329	21,91	334	22,40	339	22,90	344	23,42	349
12000	23,19	315	23,69	330	24,20	334	24,72	339	25,25	344	25,79	349	26,34	354	26,91	359
13000	26,59	343	27,13	344	27,68	348	28,25	353	28,83	358	29,42	363	30,02	368	30,63	373
				367		372		378		380		385		390		395
14000	30,22		30,80	388	31,40	393	32,01	398	32,63	403	33,27	407	33,92	412	34,58	417
15000	34,05	388	34,68	403	35,33	408	35,99	413	36,66	418	37,34	423	38,04	428	38,75	433
16000	38,08	403	38,76	408	39,46	413	40,17	418	40,89	423	41,62	428	42,37	433	43,13	438
17000	42,32	424	43,05	429	43,80	434	44,56	439	45,33	444	46,11	449	46,91	454	47,72	459
18000	46,77	445	47,55	445	48,35	450	49,16	455	49,98	460	50,81	465	51,66	470	52,52	475
		466		471		476		481		486		491		496		500
19000	51,43		52,26	491	53,11	496	53,97	501	54,84	506	55,72	511	56,61	516	57,52	521
20000	56,29	486	57,17		58,07		58,98		59,90		60,83		61,77		62,73	

$\frac{v_0}{\epsilon}$	880	Diff.	860	Diff.	840	Diff.	820	Diff.	800	Diff.	790	Diff.	780	Diff.	770	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,58	58	0,60	60	0,61	61	0,62	62	0,64	64	0,64	64	0,65	65	0,66	66
1000	1,20	62	1,23	63	1,25	64	1,28	66	1,31	67	1,33	69	1,35	70	1,37	71
2000	2,53	138	2,59	136	2,65	140	2,72	144	2,79	148	2,83	150	2,87	152	2,91	154
3000	4,01	148	4,12	153	4,23	158	4,34	162	4,46	167	4,52	169	4,58	171	4,64	173
		167		171		176		181		186		189		192		195
4000	5,68		5,83	192	5,99	198	6,15	204	6,32	210	6,41	212	6,50	215	6,59	218
5000	7,55	187	7,76	218	7,97	224	8,19	230	8,42	236	8,53	239	8,65	241	8,77	244
6000	9,67	212	9,94	218	10,21	224	10,49	230	10,78	236	10,92	239	11,06	241	11,21	244
7000	12,06	239	12,38	244	12,71	250	13,05	256	13,40	262	13,57	265	13,74	268	13,92	271
8000	14,68	262	15,07	269	15,46	275	15,86	281	16,27	287	16,47	290	16,67	293	16,88	296
		288		293		299		305		311		314		317		320
9000	17,56		18,00	315	18,45	321	18,91	327	19,38	332	19,61	335	19,84	338	20,08	341
10000	20,85	309	21,15	315	21,66	321	22,18	327	22,70	332	22,96	335	23,22	338	23,49	341
11000	23,96	331	24,51	336	25,07	341	25,64	346	26,22	352	26,51	355	26,80	358	27,10	361
12000	27,49	353	28,09	338	28,70	343	29,32	348	29,95	353	30,26	357	30,58	358	30,90	360
13000	31,25	376	31,89	380	32,54	384	33,21	389	33,89	394	34,23	397	34,57	399	34,92	402
		400		404		408		413		418		418		421		423
14000	35,29		35,93	427	36,62	432	37,33	436	38,05	441	38,41	443	38,78	445	39,15	447
15000	39,47	422	40,20	448	40,94	453	41,69	458	42,46	463	42,84	468	43,23	470	43,62	473
16000	43,90	444	44,68	470	45,47	476	46,28	482	47,11	487	47,52	490	47,93	493	48,35	496
17000	48,54	464	49,38	491	50,23	496	51,10	501	51,98	507	52,42	510	52,86	514	53,30	518
18000	53,40	486	54,29	510	55,19	516	56,11	521	57,05	527	57,52	531	58,00	534	58,48	538
		505		510		516		521		527		531		534		538
19000	58,45		59,39	531	60,35	536	61,32	543	62,32	550	62,83	553	63,84	556	64,85	560
20000	63,71	526	64,70		65,71		66,75		67,82		68,36		68,90		69,45	

Tabelle 10d. Sekundäre Funktion H.

627

$\frac{v}{v_0}$	760	Diff.	750	Diff.	740	Diff.	730	Diff.	720	Diff.	710	Diff.	700	Diff.	690	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,67	67	0,68	68	0,69	69	0,70	70	0,71	71	0,72	72	0,73	73	0,74	74
1000	1,39	72	1,40	72	1,42	73	1,44	74	1,46	75	1,48	76	1,50	77	1,52	78
2000	2,95	156	2,99	159	3,03	161	3,07	163	3,12	166	3,17	169	3,21	171	3,26	174
3000	4,71	176	4,78	179	4,85	183	4,92	185	4,99	187	5,07	190	5,14	193	5,22	196
		198		200		203		206		210		213		217		220
4000	6,69		6,78	285	6,88	288	6,98	291	7,09	294	7,20	297	7,31	240	7,42	243
5000	8,90	221	9,03	250	9,16	253	9,29	256	9,43	259	9,57	261	9,71	264	9,85	267
6000	11,37	247	11,53	277	11,69	280	11,85	283	12,02	285	12,18	289	12,35	291	12,52	294
7000	14,11	274	14,30	301	14,49	304	14,68	307	14,87	310	15,07	313	15,26	316	15,46	319
8000	17,09	298	17,31	326	17,53	329	17,75	332	17,97	335	18,20	338	18,42	341	18,65	345
		323		326		329		332		335		338		341		345
9000	20,32		20,57	347	20,82	350	21,07	353	21,32	356	21,57	359	21,83	361	22,08	364
10000	23,76	344	24,04	366	24,32	369	24,60	371	24,88	374	25,16	377	25,44	380	25,72	383
11000	27,40	363	27,70	386	28,01	388	28,31	392	28,62	394	28,93	397	29,24	400	29,55	403
12000	31,23	404	31,56	406	31,89	409	32,23	411	32,56	414	32,90	417	33,24	420	33,58	423
13000	35,27	425	35,62	428	35,98	430	36,34	433	36,71	435	37,07	439	37,44	441	37,81	444
		425		428		430		433		435		439		441		444
14000	39,52		39,90	452	40,28	455	40,67	457	41,06	459	41,46	461	41,85	464	42,25	467
15000	44,02	476	44,42	478	44,83	480	45,24	483	45,65	486	46,07	488	46,49	491	46,92	493
16000	48,77	498	49,20	501	49,63	504	50,07	507	50,51	510	50,95	514	51,40	517	51,85	520
17000	53,75	521	54,21	524	54,67	528	55,14	531	55,61	534	56,09	537	56,57	540	57,05	543
18000	58,96	543	59,45	545	59,95	548	60,45	551	60,95	554	61,46	557	61,97	561	62,48	565
		543		545		548		551		554		557		561		565
19000	64,38		64,90	565	65,43	568	65,96	571	66,49	575	67,03	578	67,58	581	68,13	584
20000	70,00		70,55		70,11		71,67		72,24		72,81		73,39		73,97	

$\frac{v}{v_0}$	680	Diff.	670	Diff.	660	Diff.	650	Diff.	640	Diff.	630	Diff.	620	Diff.	610	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,75	75	0,76	76	0,77	77	0,78	78	0,79	79	0,81	81	0,82	82	0,83	83
1000	1,54	79	1,56	80	1,59	82	1,61	83	1,64	85	1,67	86	1,70	88	1,73	90
2000	3,31	177	3,36	180	3,41	183	3,46	185	3,52	188	3,58	191	3,64	194	3,70	197
3000	5,30	199	5,38	202	5,46	205	5,54	208	5,63	211	5,72	214	5,82	218	5,92	222
		223		226		229		233		236		240		243		247
4000	7,53		7,64	249	7,75	252	7,87	255	7,99	259	8,12	263	8,25	267	8,39	271
5000	9,99	246	10,13	274	10,27	278	10,42	281	10,58	284	10,75	287	10,92	290	11,10	293
6000	12,69	297	12,87	299	13,05	302	13,23	306	13,42	311	13,62	314	13,82	319	14,03	323
7000	15,66	323	15,86	325	16,07	327	16,28	330	16,50	333	16,73	336	16,96	338	17,20	341
8000	18,88	346	19,11	349	19,34	352	19,58	355	19,83	357	20,08	360	20,34	363	20,61	364
		346		349		352		355		357		360		363		364
9000	22,34		22,60	369	22,86	372	23,13	374	23,40	377	23,68	379	23,96	383	24,25	385
10000	26,00	386	26,29	389	26,58	392	26,87	395	27,17	401	27,47	404	27,78	407	28,10	409
11000	29,36	406	30,18	409	30,50	412	30,82	415	31,15	418	31,48	422	31,82	425	32,17	428
12000	33,92	426	34,27	429	34,62	432	34,97	435	35,33	438	35,70	442	36,07	445	36,45	449
13000	38,18	447	38,56	450	38,94	453	39,32	457	39,71	460	40,11	463	40,52	466	40,94	469
		447		450		453		457		460		463		466		469
14000	42,65		43,06	476	43,47	478	43,89	479	44,31	483	44,74	486	45,18	489	45,63	492
15000	47,35	496	47,79	499	48,23	502	48,68	506	49,14	508	49,60	512	50,05	515	50,55	518
16000	52,31	523	52,78	526	53,25	528	53,73	531	54,22	534	54,72	536	55,22	539	55,73	542
17000	57,54	548	58,03	549	58,53	553	59,04	556	59,56	558	60,08	562	60,61	565	61,15	568
18000	63,00	568	63,52	572	64,05	575	64,59	578	65,14	581	65,70	584	66,26	587	66,83	590
		568		572		575		578		581		584		587		590
19000	68,68		69,24	591	69,80	595	70,37	599	70,95	603	71,54	606	72,13	609	72,73	613
20000	74,56		75,15		75,75		76,36		76,97		77,59		78,22		78,86	

40\*

$\frac{v_0}{\epsilon}$	600	Diff.	590	Diff.	580	Diff.	570	Diff.	560	Diff.	550	Diff.	540	Diff.	530	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,85	85	0,86	86	0,88	88	0,89	89	0,91	91	0,93	93	0,95	95	0,97	97
1000	1,76	91	1,79	93	1,83	95	1,86	97	1,90	99	1,94	101	1,98	103	2,01	104
2000	3,77	201	3,84	205	3,91	208	3,98	212	4,06	216	4,14	220	4,21	223	4,29	228
3000	6,03	226	6,13	229	6,24	233	6,36	238	6,47	241	6,59	245	6,70	249	6,82	253
		250		255		259		262		265		270		274		278
4000	8,53		8,68		8,83		8,98		9,13		9,29		9,44		9,60	
5000	11,28	275	11,46	278	11,65	282	11,84	286	12,03	290	12,23	294	12,43	299	12,63	303
6000	14,25	297	14,47	301	14,70	305	14,93	309	15,16	313	15,40	317	15,64	321	15,88	325
7000	17,45	320	17,71	324	17,97	327	18,24	331	18,51	335	18,78	338	19,06	342	19,33	346
8000	20,89	344	21,17	346	21,46	349	21,76	352	22,06	355	22,37	359	22,67	361	22,98	365
		366		369		372		375		378		380		384		387
9000	24,55		24,86		25,18		25,51		25,84		26,17		26,51		26,85	
10000	28,43	388	28,77	391	29,12	394	29,48	397	29,84	400	30,20	403	30,57	406	30,94	409
11000	32,53	410	32,90	413	33,28	416	33,67	419	34,06	422	34,45	425	34,85	428	35,25	431
12000	36,84	431	37,24	434	37,65	437	38,07	440	38,49	443	38,92	447	39,35	450	39,78	453
13000	41,36	452	41,79	455	42,23	458	42,68	461	43,13	464	43,59	467	44,05	470	44,52	474
		473		477		480		483		487		490		494		497
14000	46,09		46,56		47,03		47,51		48,00		48,49		48,99		49,49	
15000	51,04	495	51,54	498	52,05	502	52,57	506	53,09	509	53,62	513	54,16	517	54,70	521
16000	56,25	521	56,78	524	57,32	527	57,87	530	58,43	534	59,00	538	59,58	542	60,16	546
17000	61,70	545	62,27	549	62,85	553	63,44	557	64,04	561	64,64	564	65,25	567	65,87	571
18000	67,41	571	68,01	574	68,62	577	69,24	580	69,87	583	70,51	587	71,16	591	71,82	595
		594		597		601		605		609		612		616		620
19000	73,35		73,98		74,63		75,29		75,96		76,63		77,32		78,02	
20000	79,51	618	80,18	620	80,86	623	81,56	627	82,27	631	82,98	635	83,71	639	84,45	643

$\frac{v_0}{\epsilon}$	520	Diff.	510	Diff.	500	Diff.	490	Diff.	480	Diff.	470	Diff.	460	Diff.	450	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,99	99	1,01	101	1,03	103	1,05	105	1,08	108	1,10	110	1,12	112	1,15	115
1000	2,05	106	2,09	108	2,13	110	2,17	112	2,21	113	2,25	115	2,30	118	2,35	120
2000	4,37	232	4,45	236	4,53	240	4,61	244	4,69	248	4,77	252	4,86	256	4,95	260
3000	6,94	257	7,06	261	7,18	265	7,31	270	7,42	273	7,55	278	7,68	282	7,82	287
		282		287		291		295		301		305		310		314
4000	9,76		9,93		10,09		10,26		10,43		10,60		10,78		10,96	
5000	12,83	307	13,04	311	13,25	316	13,46	320	13,67	324	13,88	328	14,10	332	14,32	336
6000	16,12	339	16,36	343	16,61	346	16,86	350	17,11	354	17,37	358	17,63	362	17,89	366
7000	19,61	369	19,39	371	20,17	375	20,46	378	20,75	382	21,05	386	21,35	390	21,65	394
8000	23,29	390	23,60	393	23,92	396	24,24	399	24,57	403	24,91	406	25,25	409	25,60	413
9000	27,19		27,53		27,88		28,23		28,59		28,96		29,34		29,73	
10000	31,31	412	31,68	415	32,06	418	32,44	421	32,83	424	33,23	427	33,64	430	34,07	434
11000	35,65	434	36,05	437	36,46	440	36,87	443	37,30	447	37,74	451	38,19	455	38,65	458
12000	40,21	456	40,65	460	41,09	463	41,54	467	42,01	471	42,49	475	42,98	479	43,48	483
13000	44,99	478	45,47	482	45,95	486	46,44	490	46,95	494	47,47	498	48,00	502	48,55	507
		501		505		509		513		517		521		526		531
14000	50,00		50,52		51,04		51,57		52,12		52,68		53,26		53,86	
15000	55,25	525	55,81	529	56,37	533	56,94	537	57,53	541	58,14	545	58,77	551	59,42	556
16000	60,75	550	61,35	554	61,95	558	62,57	563	63,20	567	63,85	571	64,53	576	65,23	581
17000	66,50	575	67,14	579	67,78	583	68,44	587	69,12	592	69,82	597	70,54	601	71,29	606
18000	72,49	594	73,18	604	73,87	609	74,58	614	75,30	618	76,04	623	76,81	627	77,61	632
		624		628		633		637		642		647		652		657
19000	78,73		79,46		80,20		80,95		81,72		82,51		83,33		84,18	
20000	85,21	648	85,98	652	86,77	657	87,57	662	88,39	667	89,23	672	90,10	677	91,01	682

Tabelle 10d. Sekundäre Funktion H.

629

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	440	Diff.	430	Diff.	420	Diff.	410	Diff.	400	Diff.	390	Diff.	380	Diff.	370	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	1,17	117	1,20	120	1,23	123	1,26	126	1,29	129	1,32	132	1,35	135	1,39	139
1000	2,40	123	2,45	125	2,51	128	2,57	131	2,63	134	2,69	137	2,76	141	2,83	144
2000	5,05	265	5,15	270	5,26	275	5,37	280	5,49	286	5,61	292	5,74	298	5,87	304
3000	7,96	291	8,11	296	8,26	300	8,42	305	8,59	310	8,76	315	8,94	320	9,13	326
		318		322		327		331		335		340		345		350
4000	11,14		11,33		11,53		11,73		11,94		12,16		12,39		12,63	
5000	14,55	341	14,78	345	15,02	349	15,27	354	15,53	359	15,80	364	16,08	369	16,37	374
6000	18,16	361	18,43	365	18,71	369	19,01	374	19,32	379	19,64	384	19,97	389	20,31	394
7000	21,96	380	22,28	385	22,61	390	22,95	394	23,30	398	23,67	403	24,06	409	24,46	415
8000	25,95	399	26,31	403	26,68	407	27,07	412	27,47	417	27,89	422	28,34	428	28,81	435
		418		422		426		430		436		442		448		455
9000	30,13		30,53		30,94		31,37		31,83		32,31		32,82		33,36	
10000	34,50	437	34,94	441	35,40	446	35,88	451	36,39	456	36,93	462	37,50	468	38,11	475
11000	39,12	462	39,61	467	40,11	471	40,64	476	41,20	481	41,79	486	42,42	492	43,09	498
12000	43,99	487	44,52	491	45,07	496	45,65	501	46,26	506	46,91	512	47,60	518	48,35	524
13000	49,12	513	49,70	518	50,30	523	50,94	529	51,61	535	52,32	541	53,06	546	53,84	551
		536		542		549		555		561		567		573		580
14000	54,48		55,12		55,79		56,49		57,22		57,99		58,79		59,64	
15000	60,09	561	60,79	567	61,52	573	62,28	579	63,08	586	63,91	593	64,79	599	65,69	606
16000	65,95	586	66,70	591	67,49	597	68,32	604	69,18	610	70,08	617	71,02	624	72,01	633
17000	72,07	612	72,88	618	73,72	625	74,61	632	75,54	639	76,51	646	77,53	653	78,60	660
18000	78,44	637	79,30	643	80,20	649	81,15	654	82,15	661	83,20	669	84,30	677	85,46	686
		663		670		676		682		688		695		703		713
19000	85,07		86,00		86,96		87,97		89,03		90,15		91,33		92,58	
20000	91,96	689	92,94	694	93,96	700	95,03	706	96,16	713	97,35	720	98,61	728	99,95	737

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	360	Diff.	350	Diff.	340	Diff.	330	Diff.	320	Diff.	310	Diff.	300	Diff.	290	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	1,42	142	1,46	146	1,50	150	1,54	154	1,59	159	1,64	164	1,69	169	1,75	175
1000	2,90	148	2,98	152	3,06	156	3,15	161	3,24	165	3,34	170	3,44	175	3,55	180
2000	6,01	311	6,15	317	6,30	324	6,47	332	6,65	341	6,85	351	7,06	363	7,28	378
3000	9,33	332	9,53	338	9,75	345	10,00	353	10,27	362	10,57	372	10,89	383	11,23	395
		355		361		368		375		384		394		405		417
4000	12,88		13,14		13,43		13,75		14,11		14,51		14,94		15,40	
5000	16,87	379	16,99	385	17,34	391	17,73	398	18,17	406	18,66	415	19,20	426	19,79	439
6000	20,67	400	21,08	407	21,48	414	21,95	422	22,47	430	23,05	439	23,69	449	24,40	461
7000	24,89	422	25,35	429	25,84	436	26,39	444	27,00	453	27,68	463	28,43	474	29,26	486
8000	29,31	443	29,85	450	30,43	459	31,06	467	31,76	476	32,54	486	33,41	496	34,37	511
		468		470		477		485		496		507		519		533
9000	33,94		34,55		35,20		35,91		36,71		37,61		38,60		39,70	
10000	38,76	482	39,45	490	40,18	498	40,97	506	41,87	516	42,88	527	44,00	539	45,24	554
11000	43,80	504	44,56	511	45,37	519	46,26	528	47,25	538	48,36	548	49,60	560	50,99	575
12000	49,10	530	49,93	537	50,81	544	51,79	553	52,87	563	54,09	573	55,44	584	56,97	598
13000	54,68	558	55,57	564	56,52	571	57,59	580	58,76	589	60,08	599	61,55	611	63,20	625
		585		590		596		607		617		627		639		652
14000	60,53		61,47		62,51		63,66		64,93		66,35		67,94		69,72	
15000	66,66	613	67,69	623	68,79	633	70,03	637	71,39	646	72,91	656	74,63	669	76,57	685
16000	73,06	640	74,17	648	75,37	656	76,69	666	78,15	676	79,79	688	81,64	701	83,75	718
17000	79,78	667	80,93	676	82,22	686	83,65	696	85,22	707	86,99	719	88,99	735	91,28	753
18000	86,68	695	87,98	706	89,37	715	90,91	726	92,61	739	94,53	754	96,70	771	99,18	790
		722		733		746		767		771		787		807		829
19000	93,90		95,31		96,83		98,48		100,32		102,40		104,77		107,47	
20000	101,38	748	102,91	760	104,55	773	106,35	787	108,34	802	110,60	820	113,21	844	116,16	869

$\downarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	280	Diff.	270	Diff.	260	Diff.	250	Diff.	240	Diff.	230	Diff.	220	Diff.	210	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	1,81	181	1,87	187	1,94	194	2,01	201	2,09	209	2,18	218	2,28	228	2,39	239
1000	3,67	186	3,80	193	3,95	201	4,12	211	4,30	221	4,49	231	4,70	242	4,92	253
2000	7,52	385	7,79	399	8,10	415	8,45	433	8,82	452	9,21	472	9,62	492	10,06	514
3000	11,60	408	12,01	422	12,47	437	12,99	454	13,54	472	14,13	492	14,76	514	15,43	537
		430		445		460		475		493		513		535		559
4000	15,90		16,46		17,07		17,74		18,47		19,26		20,11		21,02	
5000	20,43	453	21,13	467	21,90	483	22,74	500	23,65	518	24,63	537	25,70	559	26,84	582
6000	25,18	475	26,03	490	26,96	506	27,97	523	29,06	541	30,24	561	31,52	582	32,90	606
7000	30,17	499	31,17	514	32,27	531	33,46	549	34,74	568	36,12	588	37,61	609	39,23	633
8000	35,42	525	36,56	539	37,82	555	39,19	573	40,68	594	42,28	616	44,00	639	45,86	663
		548		564		582		602		623		645		669		695
9000	40,90		42,20		43,64		45,21		46,91		48,73		50,69		52,81	
10000	46,60	570	48,09	589	49,72	608	51,49	633	53,40	649	55,46	673	57,69	700	60,09	729
11000	52,52	592	54,20	611	56,03	631	58,02	653	60,15	675	62,47	701	64,99	730	67,69	760
12000	58,66	614	60,53	633	62,57	654	64,79	677	67,17	702	69,76	729	72,58	759	75,61	792
13000	65,04	638	67,10	657	69,35	678	71,81	702	74,45	728	77,34	758	80,47	789	83,83	822
		668		685		706		729		757		786		818		853
14000	71,72		73,95		76,41		79,10		82,02		85,20		88,65		92,36	
15000	78,74	702	81,15	720	83,81	740	86,73	763	89,92	790	93,38	818	97,16	851	101,24	888
16000	86,11	737	88,72	757	91,59	778	94,74	801	98,19	827	101,94	858	106,05	889	110,50	926
17000	93,84	773	96,67	795	99,78	819	103,19	845	106,90	871	110,96	903	115,41	936	120,24	974
18000	101,96	812	105,03	836	108,41	863	112,11	892	116,11	921	120,49	953	125,29	988	130,51	1027
		853		880		910		942		976		1019		1051		1092
19000	110,49		113,83		117,51		121,53		125,87		130,61		135,80		141,43	
20000	119,46	897	123,10	927	127,10	959	131,47	994	136,22	1035	141,38	1077	147,02	1122	153,10	1167

$\downarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	200	Diff.	190	Diff.	180	Diff.	170	Diff.	160	Diff.	150	Diff.	140	Diff.	130	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	2,51	251	2,64	264	2,78	278	2,94	294	3,13	313	3,35	335	3,61	361	3,91	391
1000	5,16	265	5,41	277	5,69	291	6,01	307	6,37	324	6,79	344	7,29	368	7,87	396
2000	10,54	538	11,06	565	11,63	594	12,27	626	13,01	664	13,88	709	14,91	762	16,11	834
3000	16,15	561	16,93	587	17,80	617	18,79	652	19,93	692	21,27	739	22,86	792	24,72	861
		585		613		642		678		720		770		829		897
4000	22,00		23,06		24,22		25,57		27,13		28,97		31,15		33,69	
5000	28,07	607	29,40	634	30,91	669	32,64	707	34,63	750	36,99	802	39,78	863	43,04	936
6000	34,39	632	36,01	661	37,89	698	40,02	738	42,47	784	45,37	838	48,79	901	52,79	975
7000	41,00	661	42,94	693	45,13	724	47,70	768	50,66	819	54,14	877	58,21	949	62,97	1018
8000	47,88	688	50,11	717	52,70	757	55,71	801	59,20	854	63,30	916	68,06	985	73,61	1064
		723		754		792		838		892		957		1030		1112
9000	55,11		57,65		60,62		64,09		68,12		72,87		78,36		84,73	
10000	62,68	757	65,57	792	68,94	832	72,88	879	77,48	936	82,89	1002	89,13	1077	96,35	1162
11000	70,59	791	73,86	829	77,64	870	82,13	925	87,32	984	93,40	1051	100,40	1127	108,48	1213
12000	78,85	826	82,51	865	86,73	909	91,78	965	97,61	1029	104,40	1100	112,19	1179	121,16	1268
13000	87,45	863	91,52	901	96,23	950	101,85	1007	108,34	1073	115,88	1140	124,50	1231	134,39	1333
		898		938		991		1048		1116		1194		1281		1378
14000	96,38		100,90		106,14		112,33		119,50		127,82		137,31		148,17	
15000	105,67	929	110,66	976	116,46	1032	123,23	1090	131,11	1161	140,23	1241	150,62	1331	162,49	1432
16000	115,35	968	120,83	1017	127,19	1073	134,57	1134	143,17	1206	153,11	1288	164,43	1381	177,37	1498
17000	125,51	1016	131,49	1066	138,40	1121	146,41	1184	155,74	1257	166,51	1340	178,79	1436	192,32	1545
18000	136,23	1072	142,70	1121	150,18	1178	158,83	1245	168,90	1311	180,51	1400	193,75	1496	208,88	1606
		1137		1187		1245		1311		1386		1471		1567		1678
19000	147,60		154,57		162,63		171,94		182,76		195,22		209,42		225,66	
20000	159,74	1214	167,23	1266	175,85	1322	185,85	1391	197,43	1467	210,75	1553	225,92	1650	243,27	1761



Tabelle 10d. Sekundäre Funktion H. — Tabelle 10e. Sekundäre Funktion L. 631

$\downarrow \frac{\rightarrow v_0}{\xi}$	120	Diff.	110	Diff.	100	Diff.	90	Diff.	80	Diff.	70	Diff.	60	Diff.
0	0,00	485	0,00	464	0,00	509	0,00	563	0,00	637	0,00	712	0,00	836
500	4,25	439	4,64	468	5,09	516	5,62	576	6,27	651	7,12	758	8,36	857
1000	8,54	896	9,32	980	10,25	1078	11,38	1193	12,78	1328	14,64	1516	16,93	1767
2000	17,50	937	19,12	1026	21,03	1130	23,81	1250	26,06	1389	29,80	1516	34,60	1680
3000	26,87	978	29,38	1072	32,33	1182	35,81	1307	39,95	1451	45,65	1641	53,20	1861
4000	36,65	1019	40,10	1117	44,15	1230	48,88	1323	54,45	1516	62,06	1722	73,01	2077
5000	46,84	1061	51,27	1160	56,45	1275	62,50	1414	69,62	1581	79,28	1791	93,78	2141
6000	57,45	1104	62,87	1205	69,20	1323	76,64	1468	85,43	1641	97,19	1897	115,19	2206
7000	68,49	1151	74,92	1253	82,43	1373	91,30	1521	101,84	1699	116,16	2019	137,25	2271
8000	80,00	1204	87,45	1307	96,16	1429	106,51	1581	118,83	1758	136,35	2089	159,96	2333
9000	92,04	1258	100,52	1367	110,45	1491	122,32	1648	136,41	1820	157,34	2160	183,59	2463
10000	104,62	1312	114,19	1428	125,36	1558	138,78	1718	154,61	1911	178,94	2232	208,22	2597
11000	117,74	1369	128,47	1489	140,94	1629	155,96	1797	173,72	2015	201,26	2294	234,19	2778
12000	131,43	1428	143,36	1552	157,23	1703	173,93	1883	193,87	2130	224,20	2408	261,97	2920
13000	145,71	1483	158,88	1617	174,26	1777	192,76	1976	215,17	2252	243,22	2496	291,17	3016
14000	160,59	1549	175,05	1685	192,03	1853	212,52	2073	237,69	2376	273,20	2623	321,33	3108
15000	176,08	1612	191,90	1758	210,56	1933	233,25	2171	261,45	2493	299,43	2895	352,35	3184
16000	192,20	1676	209,48	1833	229,89	2018	254,96	2270	286,38	2604	328,38	2956	384,19	
17000	208,96	1740	227,81	1909	250,07	2110	277,66	2372	312,42	2716	357,90	3046		
18000	226,36	1812	246,90	1986	271,17	2208	301,38	2476	339,58	2830	388,36	3180		
19000	244,48	1896	266,76	2068	293,25	2313	326,14	2583	367,38	2945	419,66			
20000	263,44		287,44		316,38		351,97		397,33					

Tabelle 10e. Sekundäre Funktion L; vgl. § 80.

$\downarrow \frac{\rightarrow v_0}{\xi}$	1200	Diff.	1180	Diff.	1160	Diff.	1140	Diff.	1120	Diff.	1100	Diff.	1080	Diff.	1060	Diff.
0	0,000	6	0,000	6	0,000	7	0,000	7	0,000	7	0,000	8	0,000	8	0,000	9
500	0,006	8	0,006	8	0,007	8	0,007	9	0,007	10	0,008	10	0,008	10	0,009	10
1000	0,014	18	0,014	19	0,015	19	0,016	20	0,017	21	0,018	21	0,018	22	0,019	23
2000	0,032	22	0,033	23	0,034	24	0,036	24	0,038	24	0,039	28	0,040	28	0,042	28
3000	0,054	26	0,056	26	0,058	26	0,060	28	0,062	30	0,065	31	0,067	33	0,070	34
4000	0,080	30	0,082	32	0,084	35	0,088	36	0,092	37	0,096	39	0,100	41	0,104	43
5000	0,110	39	0,114	40	0,119	43	0,124	44	0,129	47	0,135	49	0,141	51	0,147	54
6000	0,149	50	0,154	52	0,161	54	0,168	57	0,176	60	0,184	63	0,192	67	0,201	70
7000	0,199	63	0,206	66	0,215	70	0,225	73	0,236	75	0,247	81	0,259	86	0,271	89
8000	0,261	78	0,272	84	0,285	88	0,298	93	0,312	98	0,328	108	0,344	105	0,360	111
9000	0,340	108	0,356	107	0,373	112	0,391	117	0,410	122	0,430	126	0,450	131	0,471	136
10000	0,442	136	0,463	137	0,485	138	0,508	142	0,532	147	0,556	153	0,581	158	0,607	165
11000	0,568	153	0,594	157	0,621	162	0,650	167	0,679	174	0,708	181	0,739	187	0,772	193
12000	0,721	180	0,751	185	0,783	190	0,817	196	0,853	202	0,889	208	0,926	215	0,965	222
13000	0,901	207	0,938	212	0,973	218	1,013	223	1,055	229	1,097	236	1,141	244	1,187	251
14000	1,108	234	1,143	240	1,191	246	1,238	252	1,284	257	1,333	264	1,383	271	1,438	279
15000	1,342	264	1,388	268	1,437	274	1,488	280	1,541	287	1,597	294	1,656	301	1,717	308
16000	1,604	294	1,656	299	1,711	304	1,768	311	1,828	319	1,891	326	1,957	333	2,025	338
17000	1,898	327	1,955	332	2,015	338	2,079	345	2,147	353	2,217	361	2,289	368	2,368	375
18000	2,225	363	2,287	369	2,353	377	2,424	385	2,500	393	2,578	401	2,657	409	2,738	417
19000	2,587	400	2,656	409	2,730	418	2,809	427	2,893	436	2,979	446	3,066	457	3,155	466
20000	2,987		3,065		3,148		3,236		3,329		3,425		3,523		3,621	



$\frac{v_0}{\varepsilon}$	1040	Diff.	1020	Diff.	1000	Diff.	980	Diff.	960	Diff.	940	Diff.	920	Diff.	900	Diff.
0	0,000	9	0,000	9	0,000	10	0,000	10	0,000	11	0,000	11	0,000	12	0,000	12
500	0,009	11	0,009	12	0,010	12	0,010	13	0,011	13	0,011	14	0,012	14	0,012	15
1000	0,020	24	0,021	25	0,022	26	0,023	27	0,024	28	0,025	29	0,026	31	0,027	32
2000	0,044	39	0,046	39	0,048	38	0,050	38	0,052	35	0,054	37	0,057	38	0,059	40
3000	0,073	36	0,076	38	0,080	39	0,083	42	0,087	44	0,091	47	0,095	50	0,099	54
4000	0,109	45	0,114	48	0,119	51	0,125	53	0,131	56	0,138	59	0,145	62	0,153	65
5000	0,154	57	0,162	61	0,170	65	0,178	69	0,187	72	0,197	76	0,207	81	0,218	85
6000	0,211	73	0,223	76	0,235	81	0,247	86	0,259	91	0,273	96	0,288	101	0,303	106
7000	0,284	93	0,299	97	0,316	101	0,333	106	0,350	113	0,369	118	0,389	124	0,409	130
8000	0,377	116	0,396	121	0,417	126	0,439	132	0,462	139	0,487	144	0,513	150	0,539	156
9000	0,493	142	0,517	148	0,543	154	0,571	160	0,601	166	0,631	172	0,663	178	0,695	184
10000	0,635	171	0,665	177	0,697	183	0,731	189	0,767	195	0,803	201	0,841	207	0,879	213
11000	0,806	200	0,842	206	0,880	212	0,920	218	0,962	224	1,004	230	1,048	236	1,092	243
12000	1,006	228	1,043	235	1,092	241	1,138	247	1,186	253	1,234	259	1,284	265	1,335	272
13000	1,234	258	1,283	264	1,333	270	1,385	276	1,439	282	1,493	288	1,549	294	1,607	301
14000	1,492	286	1,547	293	1,603	299	1,661	305	1,721	311	1,781	318	1,843	325	1,908	331
15000	1,778	315	1,840	322	1,902	329	1,966	335	2,032	341	2,099	348	2,168	356	2,239	363
16000	2,093	345	2,162	353	2,231	361	2,301	369	2,373	377	2,447	386	2,524	395	2,604	405
17000	2,438	383	2,515	391	2,592	400	2,670	408	2,750	417	2,833	427	2,919	438	3,009	449
18000	2,821	425	2,906	434	2,992	444	3,078	456	3,167	467	3,260	477	3,357	487	3,458	497
19000	3,246	475	3,340	484	3,436	494	3,534	505	3,634	517	3,737	529	3,844	540	3,955	550
20000	3,721		3,824		3,930		4,039		4,151		4,266		4,384		4,505	

$\frac{v_0}{\varepsilon}$	880	Diff.	860	Diff.	840	Diff.	820	Diff.	800	Diff.	790	Diff.	780	Diff.	770	Diff.
0	0,000	13	0,000	13	0,000	13	0,000	14	0,000	15	0,000	16	0,000	16	0,000	17
500	0,013	15	0,013	16	0,013	17	0,014	18	0,015	19	0,016	19	0,016	20	0,017	20
1000	0,028	38	0,029	38	0,030	38	0,032	40	0,034	42	0,036	43	0,038	44	0,039	45
2000	0,061	43	0,064	45	0,068	47	0,072	50	0,076	53	0,078	55	0,080	57	0,082	59
3000	0,104	56	0,109	59	0,115	62	0,122	64	0,129	69	0,138	71	0,147	73	0,141	75
4000	0,160	69	0,168	73	0,177	77	0,186	82	0,198	86	0,204	89	0,210	92	0,216	95
5000	0,229	90	0,241	94	0,254	98	0,268	103	0,284	109	0,293	112	0,302	115	0,311	118
6000	0,319	110	0,335	116	0,352	123	0,371	130	0,393	138	0,405	139	0,417	142	0,429	145
7000	0,429	136	0,451	141	0,475	147	0,501	154	0,529	162	0,544	165	0,559	168	0,574	172
8000	0,565	163	0,592	170	0,622	177	0,655	183	0,691	189	0,709	193	0,727	197	0,746	200
9000	0,727	191	0,762	198	0,799	206	0,838	213	0,880	219	0,902	222	0,924	225	0,946	229
10000	0,918	220	0,960	227	1,005	234	1,051	241	1,099	247	1,124	250	1,149	253	1,175	257
11000	1,138	250	1,187	257	1,239	265	1,292	270	1,346	276	1,374	280	1,403	283	1,432	287
12000	1,388	279	1,444	286	1,502	293	1,562	299	1,622	306	1,654	308	1,686	312	1,719	315
13000	1,667	309	1,730	315	1,795	323	1,861	329	1,927	334	1,962	339	1,998	344	2,034	349
14000	1,976	337	2,045	345	2,117	353	2,190	363	2,265	374	2,301	379	2,342	383	2,383	387
15000	2,313	374	2,390	383	2,470	393	2,553	403	2,635	416	2,680	420	2,725	424	2,770	429
16000	2,687	415	2,773	426	2,863	437	2,956	447	3,051	459	3,100	464	3,149	470	3,199	475
17000	3,102	460	3,199	471	3,299	482	3,403	494	3,510	506	3,564	512	3,619	518	3,674	524
18000	3,562	506	3,670	519	3,781	531	3,897	543	4,016	554	4,076	561	4,137	568	4,198	575
19000	4,070	560	4,189	571	4,312	583	4,439	596	4,570	609	4,637	616	4,705	623	4,773	630
20000	4,630		4,760		4,895		5,035		5,179		5,253		5,328		5,403	

Tabelle 10c. Sekundäre Funktion L.

$\frac{v_0}{\varepsilon}$	760	Dif.	750	Dif.	740	Dif.	730	Dif.	720	Dif.	710	Dif.	700	Dif.	690	Dif.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,017	17	0,018	18	0,018	18	0,019	19	0,019	19	0,019	19	0,020	20	0,020	20
1000	0,038	21	0,039	21	0,040	22	0,041	23	0,042	23	0,043	24	0,044	24	0,045	25
2000	0,084	46	0,087	48	0,090	50	0,093	52	0,096	54	0,099	56	0,102	58	0,105	60
3000	0,145	81	0,150	63	0,155	65	0,160	67	0,165	69	0,170	71	0,175	73	0,180	75
		78		80		82		84		86		88		90		95
4000	0,223		0,230		0,237		0,244		0,251		0,259		0,267		0,275	
5000	0,320	97	0,329	99	0,339	102	0,349	105	0,359	108	0,369	110	0,380	113	0,392	117
6000	0,441	121	0,453	124	0,466	127	0,479	130	0,492	133	0,505	136	0,519	139	0,534	143
7000	0,589	148	0,604	151	0,620	154	0,636	157	0,652	160	0,669	164	0,687	168	0,706	172
8000	0,765	176	0,784	180	0,803	183	0,823	187	0,843	191	0,864	195	0,885	198	0,907	201
		204		208		213		217		221		224		227		230
9000	0,969		0,992		1,016		1,040		1,064		1,088		1,112		1,137	
10000	1,201	232	1,228	236	1,255	239	1,283	243	1,311	247	1,339	251	1,367	255	1,395	258
11000	1,462	261	1,492	264	1,523	268	1,554	271	1,585	274	1,617	278	1,649	281	1,681	286
12000	1,752	290	1,785	293	1,819	296	1,853	299	1,888	303	1,924	307	1,960	311	1,997	316
13000	2,071	319	2,108	323	2,145	326	2,183	330	2,222	334	2,262	338	2,302	342	2,343	346
		353		357		368		368		370		374		380		387
14000	2,424		2,465		2,507		2,549		2,592		2,636		2,682		2,730	
15000	2,815	391	2,861	396	2,908	401	2,956	407	3,005	413	3,055	419	3,107	425	3,161	431
16000	3,250	435	3,302	441	3,355	447	3,409	453	3,464	459	3,520	465	3,578	471	3,638	477
17000	3,730	490	3,788	496	3,848	493	3,909	500	3,971	507	4,034	514	4,098	520	4,163	526
18000	4,260	530	4,324	536	4,390	542	4,457	548	4,526	555	4,596	562	4,667	569	4,739	576
		583		588		594		601		607		613		619		626
19000	4,842		4,912		4,984		5,058		5,133		5,209		5,286		5,365	
20000	5,479	637	5,556	644	5,634	650	5,714	656	5,795	662	5,877	668	5,961	675	6,047	682

$\frac{v_0}{\varepsilon}$	680	Dif.	670	Dif.	660	Dif.	650	Dif.	640	Dif.	630	Dif.	620	Dif.	610	Dif.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,021	21	0,022	22	0,023	23	0,024	24	0,025	25	0,025	25	0,026	26	0,027	27
1000	0,047	26	0,049	27	0,051	28	0,053	29	0,055	30	0,057	32	0,059	33	0,061	34
2000	0,108	61	0,112	63	0,116	65	0,120	67	0,124	69	0,128	71	0,132	73	0,136	75
3000	0,186	78	0,192	80	0,198	82	0,205	85	0,212	88	0,219	91	0,226	94	0,233	97
		97		100		108		106		109		112		115		119
4000	0,283		0,292		0,301		0,311		0,321		0,331		0,341		0,352	
5000	0,404	121	0,416	124	0,429	128	0,442	131	0,455	134	0,469	138	0,483	143	0,498	146
6000	0,550	146	0,566	150	0,583	154	0,600	158	0,617	162	0,635	166	0,653	170	0,672	174
7000	0,726	176	0,746	180	0,766	183	0,786	186	0,807	190	0,829	194	0,852	199	0,875	203
8000	0,930	204	0,953	207	0,977	211	1,001	215	1,026	219	1,052	223	1,079	227	1,107	232
		233		236		239		243		247		251		255		259
9000	1,163		1,189		1,216		1,244		1,273		1,303		1,334		1,366	
10000	1,424	261	1,454	265	1,485	269	1,517	273	1,550	277	1,584	281	1,619	285	1,655	289
11000	1,714	290	1,748	294	1,783	298	1,819	302	1,856	306	1,894	310	1,933	314	1,973	318
12000	2,034	320	2,072	324	2,111	328	2,151	332	2,192	336	2,234	340	2,278	345	2,324	351
13000	2,386	352	2,430	356	2,475	364	2,520	369	2,566	374	2,614	380	2,664	386	2,716	392
		393		399		405		411		417		423		429		434
14000	2,779		2,829		2,880		2,931		2,983		3,037		3,093		3,150	
15000	3,216	437	3,272	443	3,329	449	3,386	455	3,444	461	3,504	467	3,566	473	3,630	480
16000	3,699	483	3,761	489	3,824	495	3,887	501	3,951	507	4,017	513	4,085	519	4,155	525
17000	4,229	530	4,297	536	4,367	543	4,437	550	4,508	557	4,581	564	4,656	571	4,733	578
18000	4,812	563	4,886	569	4,962	575	5,040	583	5,119	611	5,199	618	5,281	625	5,365	632
		634		642		649		656		663		671		679		687
19000	5,446		5,528		5,611		5,696		5,782		5,870		5,960		6,052	
20000	6,135	689	6,225	697	6,317	706	6,410	714	6,505	723	6,601	732	6,699	739	6,799	747

$\downarrow \varepsilon \rightarrow v_0$	600	Dif.	590	Dif.	580	Dif.	570	Dif.	560	Dif.	550	Dif.	540	Dif.	530	Dif.
0	0,000	28	0,000	29	0,000	30	0,000	31	0,000	32	0,000	33	0,000	34	0,000	35
500	0,028	55	0,029	56	0,030	57	0,031	58	0,032	59	0,033	60	0,034	61	0,035	62
1000	0,063	78	0,065	81	0,067	84	0,069	87	0,071	90	0,074	93	0,077	96	0,080	100
2000	0,141	99	0,146	102	0,151	105	0,156	109	0,161	113	0,167	117	0,173	121	0,180	125
3000	0,240	123	0,248	126	0,256	130	0,265	135	0,274	140	0,284	144	0,294	148	0,305	152
4000	0,363	150	0,374	155	0,386	159	0,400	163	0,414	167	0,428	171	0,442	176	0,457	181
5000	0,513	179	0,529	183	0,545	188	0,563	192	0,581	196	0,599	200	0,618	204	0,638	208
6000	0,692	207	0,712	212	0,733	216	0,755	220	0,777	224	0,799	228	0,822	232	0,846	235
7000	0,899	236	0,924	240	0,949	244	0,975	248	1,001	252	1,027	256	1,054	260	1,081	265
8000	1,135	264	1,164	268	1,193	272	1,223	276	1,253	280	1,283	285	1,314	289	1,346	293
9000	1,399	293	1,432	297	1,465	301	1,499	305	1,533	309	1,568	313	1,603	318	1,639	323
10000	1,692	322	1,729	326	1,766	330	1,804	334	1,842	338	1,881	344	1,921	350	1,962	356
11000	2,014	337	2,055	343	2,096	349	2,138	354	2,181	359	2,225	365	2,271	371	2,318	377
12000	2,371	386	2,418	392	2,465	398	2,512	404	2,560	410	2,610	416	2,662	423	2,715	429
13000	2,769	439	2,822	445	2,875	452	2,928	460	2,982	468	3,038	475	3,096	481	3,156	488
14000	3,208	487	3,267	494	3,327	501	3,388	508	3,450	515	3,513	522	3,577	530	3,644	538
15000	3,695	532	3,761	540	3,828	548	3,896	556	3,965	564	4,035	572	4,107	580	4,182	588
16000	4,227	585	4,301	592	4,376	600	4,452	608	4,529	616	4,607	625	4,687	634	4,770	643
17000	4,812	639	4,893	646	4,976	655	5,060	661	5,145	670	5,232	679	5,321	689	5,413	699
18000	5,451	695	5,539	703	5,629	711	5,721	719	5,815	728	5,911	738	6,010	748	6,112	758
19000	6,146	755	6,242	763	6,340	771	6,440	780	6,543	789	6,649	798	6,758	807	6,870	817
20000	6,901		7,005		7,111		7,220		7,332		7,447		7,565		7,687	

$\downarrow \varepsilon \rightarrow v_0$	520	Dif.	510	Dif.	500	Dif.	490	Dif.	480	Dif.	470	Dif.	460	Dif.	450	Dif.
0	0,000	36	0,000	37	0,000	39	0,000	41	0,000	43	0,000	45	0,000	47	0,000	49
500	0,036	47	0,037	49	0,039	51	0,041	53	0,043	55	0,045	57	0,047	59	0,049	61
1000	0,083	104	0,086	108	0,090	112	0,094	116	0,098	120	0,102	124	0,106	129	0,110	134
2000	0,187	139	0,194	144	0,202	148	0,210	153	0,218	158	0,226	161	0,235	166	0,244	171
3000	0,316	157	0,328	161	0,340	165	0,352	170	0,364	175	0,377	180	0,391	185	0,405	190
4000	0,473	185	0,489	189	0,505	193	0,522	198	0,539	203	0,557	208	0,576	213	0,595	219
5000	0,658	212	0,678	216	0,698	221	0,720	226	0,742	231	0,765	236	0,789	241	0,814	247
6000	0,870	240	0,894	245	0,919	250	0,946	255	0,973	260	1,001	265	1,030	270	1,061	276
7000	1,110	269	1,139	273	1,169	278	1,201	283	1,233	288	1,266	294	1,300	300	1,337	306
8000	1,379	297	1,412	302	1,447	307	1,484	312	1,521	317	1,560	322	1,600	328	1,643	334
9000	1,676	326	1,714	332	1,754	339	1,796	345	1,838	351	1,882	357	1,928	364	1,977	372
10000	2,044	363	2,047	369	2,093	376	2,141	383	2,189	390	2,239	397	2,292	405	2,349	414
11000	2,366	404	2,416	411	2,469	419	2,524	427	2,579	435	2,636	443	2,697	451	2,763	459
12000	2,770	448	2,827	456	2,888	464	2,951	472	3,014	480	3,079	489	3,148	498	3,222	507
13000	3,218	496	3,283	504	3,352	512	3,423	521	3,494	530	3,568	539	3,646	548	3,729	557
14000	3,714	546	3,787	554	3,864	562	3,944	571	4,024	580	4,107	590	4,194	600	4,286	610
15000	4,260	597	4,341	606	4,426	615	4,515	624	4,604	634	4,697	644	4,794	654	4,896	664
16000	4,857	651	4,947	660	5,041	670	5,139	680	5,238	690	5,341	700	5,448	711	5,560	722
17000	5,508	709	5,607	718	5,711	728	5,819	737	5,928	747	6,041	758	6,159	770	6,282	783
18000	6,217	788	6,325	798	6,438	807	6,556	817	6,675	828	6,799	839	6,929	851	7,065	864
19000	6,985	828	7,103	840	7,226	852	7,354	864	7,484	876	7,620	888	7,764	902	7,915	918
20000	7,813		7,948		8,078		8,218		8,360		8,508		8,666		8,833	

Tabelle 10e. Sekundäre Funktion L.

635

$\frac{v_0}{\epsilon}$	440	Diff.	430	Diff.	420	Diff.	410	Diff.	400	Diff.	390	Diff.	380	Diff.	370	Diff.
0	0,000	51	0,000	53	0,000	55	0,000	58	0,000	61	0,000	64	0,000	68	0,000	72
500	0,051	63	0,053	66	0,055	69	0,058	72	0,061	75	0,064	78	0,068	82	0,072	86
1000	0,114	139	0,119	145	0,124	151	0,130	157	0,136	164	0,142	171	0,150	178	0,158	185
2000	0,258	167	0,264	173	0,275	179	0,287	185	0,300	192	0,313	199	0,328	206	0,343	213
3000	0,420	195	0,437	201	0,454	207	0,472	213	0,492	220	0,512	227	0,534	234	0,556	242
4000	0,615	225	0,638	231	0,661	237	0,685	243	0,712	249	0,739	256	0,768	263	0,798	271
5000	0,840	253	0,869	259	0,898	265	0,928	271	0,961	278	0,995	285	1,031	292	1,069	300
6000	1,093	282	1,128	288	1,163	294	1,199	300	1,239	307	1,280	314	1,323	321	1,369	329
7000	1,375	312	1,416	318	1,457	324	1,499	330	1,546	337	1,594	345	1,644	354	1,698	364
8000	1,687	341	1,784	349	1,781	357	1,829	365	1,883	374	1,939	384	1,998	395	2,062	407
9000	2,028	380	2,088	389	2,138	398	2,194	407	2,257	417	2,323	428	2,393	439	2,469	451
10000	2,408	423	2,472	432	2,536	441	2,601	451	2,674	463	2,751	474	2,832	486	2,920	499
11000	2,831	468	2,904	477	2,977	487	3,052	498	3,136	509	3,225	521	3,318	534	3,419	548
12000	3,299	516	3,381	526	3,464	537	3,550	547	3,645	560	3,746	572	3,852	585	3,967	599
13000	3,815	567	3,907	577	4,001	588	4,097	601	4,205	618	4,318	635	4,437	649	4,566	654
14000	4,382	620	4,484	631	4,598	643	4,698	655	4,817	667	4,943	680	5,076	694	5,220	709
15000	5,002	675	5,115	687	5,232	700	5,353	713	5,484	726	5,623	739	5,770	753	5,929	769
16000	5,677	734	5,802	747	5,932	760	6,066	773	6,210	787	6,362	802	6,523	818	6,698	836
17000	6,411	796	6,549	810	6,692	824	6,839	838	6,997	858	7,164	870	7,341	890	7,534	913
18000	7,207	866	7,359	882	7,516	898	7,677	914	7,850	932	8,034	952	8,231	975	8,447	1001
19000	8,073	935	8,241	953	8,414	972	8,591	992	8,782	1014	8,986	1038	9,206	1065	9,443	1095
20000	9,008		9,194		9,386		9,583		9,796		10,024		10,271		10,543	

$\frac{v_0}{\epsilon}$	360	Diff.	350	Diff.	340	Diff.	330	Diff.	320	Diff.	310	Diff.	300	Diff.	290	Diff.
0	0,000	76	0,000	80	0,000	85	0,000	90	0,000	96	0,000	102	0,000	109	0,000	117
500	0,076	90	0,080	94	0,085	99	0,090	104	0,096	110	0,102	116	0,109	123	0,117	131
1000	0,166	193	0,174	209	0,184	215	0,194	221	0,206	232	0,218	245	0,232	260	0,248	277
2000	0,359	221	0,376	230	0,395	240	0,415	251	0,438	263	0,463	276	0,492	291	0,525	306
3000	0,580	250	0,606	259	0,635	269	0,666	280	0,701	292	0,739	306	0,783	320	0,833	338
4000	0,830	279	0,865	288	0,904	297	0,946	307	0,993	319	1,044	334	1,103	352	1,171	373
5000	1,109	308	1,153	317	1,201	327	1,253	339	1,312	354	1,378	372	1,455	393	1,544	417
6000	1,417	338	1,470	349	1,528	362	1,592	377	1,666	394	1,750	414	1,848	437	1,961	463
7000	1,755	375	1,819	388	1,890	403	1,969	420	2,060	439	2,164	460	2,285	484	2,424	521
8000	2,130	420	2,207	434	2,293	449	2,389	466	2,499	485	2,624	507	2,769	532	2,945	560
9000	2,550	464	2,641	478	2,742	494	2,855	512	2,984	533	3,131	557	3,301	584	3,505	614
10000	3,014	513	3,119	528	3,236	544	3,367	562	3,517	583	3,688	607	3,885	635	4,119	667
11000	3,527	563	3,647	579	3,780	596	3,929	615	4,100	637	4,295	663	4,520	698	4,786	727
12000	4,090	614	4,226	630	4,376	648	4,544	668	4,737	691	4,958	718	5,213	749	5,513	785
13000	4,704	670	4,856	687	5,024	706	5,212	727	5,428	751	5,676	779	5,962	812	6,298	851
14000	5,374	725	5,543	743	5,730	764	5,939	783	6,179	816	6,455	849	6,774	888	7,149	934
15000	6,099	785	6,286	810	6,494	835	6,727	863	6,995	896	7,304	933	7,662	978	8,083	1030
16000	6,887	857	7,096	881	7,329	908	7,590	939	7,890	985	8,237	1017	8,640	1066	9,113	1122
17000	7,744	939	7,977	963	8,237	1000	8,529	1035	8,875	1074	9,254	1118	9,706	1169	10,235	1228
18000	8,683	1030	8,945	1062	9,237	1097	9,564	1135	9,949	1177	10,372	1224	10,875	1277	11,463	1338
19000	9,713	1128	10,007	1164	10,334	1203	10,699	1245	11,126	1291	11,596	1342	12,152	1399	12,801	1463
20000	10,841		11,171		11,537		11,944		12,417		12,938		13,551		14,264	

$\downarrow \frac{v}{v_0}$	280	Dif.	270	Dif.	260	Dif.	250	Dif.	240	Dif.	230	Dif.	220	Dif.	210	Dif.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,126	136	0,136	136	0,147	147	0,159	159	0,172	172	0,187	187	0,204	204	0,223	223
1000	0,266	140	0,286	150	0,308	161	0,333	174	0,361	189	0,393	206	0,429	225	0,469	246
2000	0,562	296	0,603	317	0,648	340	0,699	368	0,757	396	0,824	431	0,900	471	0,985	516
3000	0,890	328	0,954	351	1,025	377	1,105	406	1,196	439	1,300	476	1,418	518	1,550	565
		360		386		416		450		488		530		576		626
4000	1,250		1,340		1,441		1,555		1,684		1,830		1,994		2,176	
5000	1,648	396	1,767	427	1,901	460	2,052	497	2,222	538	2,413	583	2,626	632	2,861	685
6000	2,092	444	2,241	474	2,408	507	2,596	544	2,807	585	3,043	630	3,305	679	3,595	734
7000	2,584	492	2,765	524	2,967	559	3,193	597	3,445	638	3,726	683	4,039	734	4,388	798
8000	3,125	541	3,339	574	3,578	611	3,844	651	4,140	695	4,470	744	4,839	800	5,253	865
		592		628		668		712		760		813		873		943
9000	3,717		3,967		4,246		4,556		4,900		5,283		5,712		6,196	
10000	4,365	648	4,653	686	4,974	728	5,330	774	5,725	825	6,166	883	6,663	941	7,228	1002
11000	5,068	708	5,396	743	5,762	788	6,169	839	6,622	897	7,130	964	7,705	1032	8,361	1103
12000	5,833	768	6,204	808	6,619	857	7,082	913	7,599	977	8,181	1051	8,842	1127	9,598	1237
13000	6,660	827	7,080	876	7,551	932	8,078	996	8,668	1069	9,333	1159	10,088	1246	10,951	1363
		897		951		1013		1064		1125		1187		1261		1473
14000	7,557		8,031		8,564		9,162		9,833		10,590		11,449		12,429	
15000	8,544	867	9,079	1048	9,673	1114	10,356	1194	11,112	1379	11,963	1378	12,926	1477	14,022	1598
16000	9,633	1089	10,234	1158	10,906	1228	11,664	1396	12,508	1596	13,456	1498	14,527	1601	15,746	1724
17000	10,818	1186	11,489	1265	12,238	1352	13,080	1416	14,017	1599	15,069	1613	16,259	1733	17,518	1773
18000	12,113	1295	12,859	1370	13,691	1453	14,624	1544	15,662	1645	16,828	1759	18,149	1890	19,562	2044
		1407		1484		1571		1670		1783		1913		2064		2241
19000	13,520	1535	14,343	1617	15,262	1711	16,294	1819	17,445	1943	18,741	2088	20,213	2259	21,808	2446
20000	15,055		15,960		16,973		18,113		19,388		20,827		22,465		24,249	

$\downarrow \frac{v}{v_0}$	200	Dif.	190	Dif.	180	Dif.	170	Dif.	160	Dif.	150	Dif.	140	Dif.	130	Dif.
0	0,000		0,000		0,000		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,245	245	0,271	271	0,302	302	0,34	34	0,38	38	0,43	43	0,49	49	0,57	47
1000	0,515	270	0,569	298	0,633	331	0,70	36	0,79	41	0,90	47	1,04	55	1,22	55
2000	1,082	567	1,194	625	1,325	692	1,47	77	1,66	87	1,89	99	2,18	114	2,54	123
3000	1,700	618	1,872	678	2,072	747	2,31	84	2,61	96	2,97	108	3,42	124	3,97	143
		682		745		816		91		103		116		136		157
4000	2,382		2,617		2,888		3,22		3,64		4,15		4,78		5,54	
5000	3,126	744	3,427	810	3,772	884	4,21	99	4,75	111	5,42	127	6,24	146	7,24	170
6000	3,924	798	4,301	874	4,738	966	5,30	109	5,98	123	6,82	140	7,84	160	9,09	185
7000	4,787	868	5,249	948	5,790	1059	6,48	118	7,32	134	8,35	153	9,59	175	11,11	202
8000	5,729	942	6,284	1035	6,938	1148	7,76	128	8,76	144	9,99	169	11,48	189	13,31	220
		1027		1129		1253		140		159		182		210		244
9000	6,756		7,413		8,191		9,16		10,35		11,81		13,58		15,75	
10000	7,885	1129	8,658	1245	9,574	1383	10,70	154	12,09	174	13,79	195	15,85	227	18,37	262
11000	9,125	1240	10,024	1366	11,088	1514	12,38	168	13,98	188	15,94	215	18,32	247	21,24	295
12000	10,478	1358	11,512	1488	12,733	1645	14,22	184	16,04	208	18,27	238	20,99	267	24,84	311
13000	11,954	1476	13,130	1618	14,516	1783	16,20	198	18,26	222	20,79	272	23,89	298	27,72	338
		1609		1755		1917		214		243		278		318		37
14000	13,563		14,885		16,433		18,34		20,68		23,55		27,07		31,42	
15000	15,288	1725	16,765	1880	18,502	2069	20,66	233	23,31	263	26,55	300	30,52	345	35,42	400
16000	17,157	1869	18,811	2046	20,769	2267	23,21	255	26,20	289	29,85	330	34,31	379	39,81	439
17000	19,198	2041	21,060	2249	23,268	2497	26,02	281	29,38	318	33,47	361	38,45	414	44,58	477
18000	21,427	2239	23,515	2450	26,000	2734	29,08	306	32,83	345	37,38	391	42,91	448	49,72	514
		2450		2698		2993		324		375		424		483		567
19000	23,877		26,213		28,993		32,42		36,58		41,62		47,74		55,29	
20000	26,552	2675	28,161	2948	32,268	3275	36,09	367	40,70	412	46,27	465	53,02	528	61,35	608

Tabelle 10e. Sekundäre Funktion  $L$ ; Tabelle 10f. Sekundäre Funktion  $M$ . 637

$\downarrow \frac{v_0}{\xi}$	120	Diff.	110	Diff.	100	Diff.	90	Diff.	80	Diff.	70	Diff.	60	Diff.
0	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
500	0,67	67	0,80	80	0,97	97	1,19	119	1,49	149	1,95	195	2,67	267
1000	1,44	154	1,71	181	2,06	216	2,52	265	3,17	348	4,15	450	5,66	599
2000	2,98	167	3,52	199	4,22	243	5,17	304	6,65	378	8,65	508	11,87	631
3000	4,65	183	5,51	217	6,65	268	8,21	326	10,43	413	13,68	584	18,47	708
4000	6,48	201	7,68	241	9,28	293	11,47	362	14,56	455	19,02	582	25,50	758
5000	8,49	217	10,09	259	12,21	315	15,09	391	19,11	496	24,84	645	33,08	851
6000	10,66	237	12,68	283	15,36	344	19,00	426	24,07	538	31,27	694	41,59	915
7000	13,08	259	15,51	309	18,80	375	23,26	465	29,45	591	38,21	771	50,74	1081
8000	15,62	286	18,60	339	22,55	408	27,91	502	35,86	637	45,92	839	61,05	1147
9000	18,48	309	21,99	364	26,63	434	32,93	542	41,73	690	54,31	919	72,52	1269
10000	21,57	338	25,63	396	30,97	482	38,35	590	48,63	754	63,50	989	85,21	1337
11000	24,90	364	29,59	433	35,79	523	44,25	645	56,17	818	73,89	1072	98,58	1451
12000	28,54	398	33,92	473	41,02	569	50,70	698	64,35	880	84,11	1156	113,09	1543
13000	32,52	434	38,65	514	46,71	618	57,68	761	73,15	957	95,67	1261	128,52	1724
14000	36,86	469	43,79	558	52,89	676	65,29	836	82,72	1058	108,28	1374	145,76	1836
15000	41,55	515	49,37	614	59,65	745	73,65	921	93,80	1161	122,02	1494	164,11	1965
16000	46,70	567	55,51	683	67,10	807	82,86	1005	104,91	1279	136,96	1661	183,76	
17000	52,27	609	62,14	720	75,17	881	92,91	1102	117,70	1404	153,57	1824		
18000	58,29	654	69,34	785	83,98	984	103,93	1208	131,74	1537	171,81	1978		
19000	64,83	708	77,19	847	93,62	1040	116,01	1308	147,11	1664	191,59			
20000	71,91		85,66		104,02		129,09		163,75					

Tabelle 10f. Sekundäre Funktion  $M$ ; vgl. § 30.

$\downarrow \frac{v_0}{\xi}$	1200	Diff.	1180	Diff.	1160	Diff.	1140	Diff.	1120	Diff.	1100	Diff.	1080	Diff.	1060	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,002	2	0,002	2	0,003	3	0,003	3	0,003	3	0,003	3	0,004	4	0,004	4
1000	0,006	4	0,006	4	0,007	4	0,008	5	0,008	5	0,008	5	0,009	5	0,009	5
2000	0,016	10	0,017	11	0,018	11	0,019	11	0,020	12	0,020	12	0,021	12	0,022	13
3000	0,029	13	0,030	13	0,031	13	0,033	14	0,034	14	0,035	15	0,037	15	0,039	17
4000	0,045	16	0,046	16	0,047	16	0,050	17	0,052	18	0,054	19	0,057	20	0,060	21
5000	0,065	20	0,067	21	0,069	22	0,073	23	0,076	24	0,079	25	0,083	26	0,087	27
6000	0,089	24	0,092	25	0,096	27	0,102	29	0,106	30	0,111	32	0,117	34	0,123	36
7000	0,122	33	0,127	35	0,133	37	0,141	39	0,147	41	0,154	43	0,162	45	0,170	47
8000	0,166	44	0,173	46	0,181	48	0,192	51	0,201	54	0,211	57	0,222	60	0,233	63
9000	0,223	57	0,233	60	0,244	63	0,258	66	0,270	69	0,283	72	0,297	75	0,311	78
10000	0,300	77	0,313	80	0,327	83	0,344	86	0,359	89	0,375	92	0,392	95	0,409	98
11000	0,392	92	0,409	96	0,427	100	0,448	104	0,467	108	0,487	112	0,508	116	0,529	120
12000	0,503	111	0,524	115	0,546	119	0,571	123	0,594	127	0,618	131	0,643	135	0,668	139
13000	0,637	134	0,662	138	0,688	142	0,717	146	0,744	150	0,772	154	0,801	158	0,830	162
14000	0,789	158	0,818	156	0,848	160	0,881	164	0,912	168	0,944	172	0,977	176	1,010	180
15000	0,963	174	0,996	178	1,030	182	1,067	186	1,102	190	1,138	194	1,175	198	1,212	202
16000	1,159	196	1,195	199	1,232	202	1,272	205	1,311	209	1,351	213	1,392	217	1,433	221
17000	1,377	218	1,416	221	1,456	224	1,499	227	1,542	231	1,586	235	1,631	239	1,677	244
18000	1,617	240	1,660	244	1,705	249	1,753	254	1,801	259	1,850	264	1,900	269	1,951	274
19000	1,884	267	1,931	271	1,981	276	2,034	281	2,087	286	2,142	292	2,198	298	2,256	306
20000	2,182	298	2,234	303	2,289	308	2,348	314	2,407	320	2,469	327	2,532	334	2,597	341

Tabelle 10f. Sekundäre Funktion  $M$ .

$\downarrow \frac{v_0}{\xi}$	1040	Diff.	1020	Diff.	1000	Diff.	980	Diff.	960	Diff.	940	Diff.	920	Diff.	900	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,004	4	0,004	4	0,005	5	0,005	5	0,005	5	0,005	5	0,006	6	0,006	6
1000	0,010	6	0,010	6	0,012	7	0,012	7	0,013	8	0,013	8	0,014	8	0,015	9
2000	0,023	13	0,024	14	0,026	14	0,027	15	0,028	15	0,029	16	0,031	17	0,033	18
3000	0,040	17	0,042	18	0,044	18	0,046	19	0,048	20	0,050	21	0,053	22	0,056	23
		22		23		24		25		27		29		31		32
4000	0,062	23	0,065	30	0,068	32	0,071	34	0,075	36	0,079	38	0,084	40	0,088	42
5000	0,090	38	0,095	40	0,100	49	0,105	45	0,111	48	0,117	51	0,124	54	0,130	57
6000	0,128	58	0,135	53	0,142	56	0,150	59	0,159	62	0,168	65	0,178	68	0,187	71
7000	0,178	66	0,188	69	0,198	72	0,209	75	0,221	78	0,233	81	0,246	85	0,258	89
8000	0,244	81	0,257	84	0,270	88	0,284	92	0,299	96	0,314	100	0,331	104	0,347	108
9000	0,325		0,341		0,358		0,376		0,395		0,414		0,435		0,455	
10000	0,426	101	0,446	105	0,467	109	0,489	113	0,512	117	0,535	121	0,560	125	0,584	129
11000	0,550	124	0,574	128	0,599	132	0,625	136	0,652	140	0,679	144	0,708	148	0,736	152
12000	0,693	143	0,721	147	0,750	151	0,780	155	0,811	159	0,842	163	0,875	167	0,907	171
13000	0,859	168	0,891	170	0,924	174	0,958	178	0,993	182	1,028	186	1,065	190	1,101	194
		184		188		192		196		200		204		208		212
14000	1,043		1,079		1,116		1,154		1,193		1,232		1,273		1,313	
15000	1,249	206	1,289	210	1,330	214	1,372	218	1,415	222	1,458	226	1,503	230	1,547	234
16000	1,474	235	1,518	239	1,565	243	1,611	247	1,659	251	1,707	255	1,757	259	1,806	263
17000	1,723	249	1,772	254	1,824	259	1,876	265	1,928	269	1,981	274	2,036	279	2,091	285
18000	2,002	279	2,056	284	2,113	289	2,170	294	2,228	300	2,287	306	2,349	313	2,411	319
		312		319		326		333		340		347		355		363
19000	2,314		2,375		2,439		2,508		2,568		2,634		2,704		2,774	
20000	2,662	348	2,730	355	2,801	362	2,872	369	2,944	376	3,018	384	3,096	392	3,174	400

$\downarrow \frac{v_0}{\xi}$	880	Diff.	860	Diff.	840	Diff.	820	Diff.	800	Diff.	790	Diff.	780	Diff.	770	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,006	6	0,006	6	0,007	7	0,007	7	0,007	7	0,007	7	0,007	7	0,008	8
1000	0,015	9	0,015	9	0,016	9	0,017	10	0,017	10	0,017	10	0,018	11	0,019	11
2000	0,034	19	0,035	20	0,037	21	0,039	22	0,040	23	0,041	24	0,042	24	0,043	24
3000	0,058	24	0,060	25	0,064	27	0,068	29	0,071	31	0,073	32	0,075	33	0,077	34
		34		36		38		40		43		45		45		46
4000	0,092		0,096		0,102		0,108		0,114		0,117		0,120		0,123	
5000	0,136	44	0,142	46	0,150	48	0,159	51	0,168	54	0,173	56	0,178	58	0,183	60
6000	0,196	60	0,205	63	0,216	66	0,228	69	0,240	72	0,247	74	0,254	76	0,261	78
7000	0,270	74	0,283	78	0,298	82	0,314	86	0,330	90	0,339	92	0,348	94	0,357	96
8000	0,363	98	0,380	97	0,399	101	0,419	105	0,439	109	0,450	111	0,461	113	0,472	115
		112		116		120		124		128		130		132		134
9000	0,475		0,496		0,519		0,543		0,567		0,580		0,593		0,606	
10000	0,608	133	0,633	137	0,660	141	0,688	145	0,716	149	0,731	151	0,746	153	0,761	155
11000	0,764	156	0,793	160	0,824	164	0,856	168	0,888	172	0,905	174	0,925	176	0,939	178
12000	0,939	175	0,972	179	1,007	183	1,043	187	1,079	191	1,098	193	1,120	195	1,136	197
13000	1,137	196	1,174	202	1,213	206	1,255	212	1,295	216	1,316	218	1,340	220	1,358	222
		216		220		224		228		232		235		236		242
14000	1,353		1,394		1,437		1,483		1,527		1,551		1,576		1,600	
15000	1,591	238	1,636	242	1,683	246	1,733	250	1,781	254	1,808	257	1,835	259	1,862	262
16000	1,856	265	1,907	271	1,961	276	2,018	285	2,073	289	2,103	292	2,134	295	2,165	298
17000	2,148	293	2,206	299	2,267	306	2,331	312	2,394	321	2,428	325	2,463	329	2,498	333
18000	2,475	327	2,540	334	2,608	341	2,680	349	2,751	357	2,789	361	2,828	365	2,867	369
		371		379		387		395		403		407		411		415
19000	2,846		2,919		2,995		3,075		3,154		3,196		3,239		3,282	
20000	3,254	408	3,335	415	3,419	424	3,507	432	3,594	440	3,640	444	3,687	448	3,734	452



Tabelle 10f. Sekundäre Funktion  $M$ .

639

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	760	Diff.	750	Diff.	740	Diff.	730	Diff.	720	Diff.	710	Diff.	700	Diff.	690	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,008	8	0,008	8	0,009	9	0,009	9	0,009	9	0,009	9	0,009	9	0,009	9
1000	0,019	11	0,019	11	0,020	12	0,021	12	0,021	12	0,021	12	0,021	12	0,022	13
2000	0,044	25	0,045	26	0,047	27	0,049	28	0,050	29	0,051	30	0,052	31	0,054	32
3000	0,079	35	0,081	36	0,084	37	0,088	39	0,091	41	0,094	43	0,096	44	0,099	45
		47		48		49		50		52		54		56		58
4000	0,126	62	0,129	64	0,133	66	0,138	68	0,143	70	0,148	72	0,152	74	0,157	76
5000	0,188	80	0,193	82	0,199	84	0,206	86	0,213	88	0,220	90	0,226	92	0,233	94
6000	0,268	98	0,275	100	0,283	102	0,292	104	0,301	106	0,310	108	0,318	110	0,327	112
7000	0,366	117	0,375	119	0,385	121	0,396	123	0,407	125	0,418	127	0,428	129	0,439	131
8000	0,483	136	0,494	139	0,506	141	0,519	143	0,532	145	0,545	148	0,557	150	0,570	152
9000	0,619		0,633		0,647		0,662		0,677		0,693		0,707		0,722	
10000	0,776	157	0,793	160	0,809	162	0,826	164	0,843	166	0,862	169	0,878	171	0,895	173
11000	0,956	180	0,975	182	0,993	184	1,012	186	1,031	188	1,052	190	1,070	192	1,089	194
12000	1,155	199	1,176	201	1,196	203	1,217	205	1,238	207	1,261	209	1,281	211	1,302	213
13000	1,379	224	1,402	226	1,424	228	1,447	230	1,470	232	1,495	234	1,517	236	1,540	238
		246		248		251		253		255		258		261		264
14000	1,625		1,650		1,675		1,700		1,725		1,750		1,775		1,801	
15000	1,889	264	1,917	267	1,945	270	1,973	273	2,002	277	2,032	282	2,063	288	2,095	294
16000	2,196	307	2,227	310	2,258	313	2,290	317	2,323	321	2,357	325	2,392	329	2,427	332
17000	2,533	337	2,568	341	2,603	345	2,639	349	2,676	353	2,714	357	2,753	361	2,793	366
18000	2,906	373	2,945	377	2,985	382	3,026	387	3,068	392	3,111	397	3,155	402	3,199	406
		419		423		427		430		433		436		439		443
19000	3,325		3,368		3,412		3,456		3,501		3,547		3,594		3,642	
20000	3,781	456	3,828	460	3,876	464	3,925	469	3,975	474	4,026	479	4,078	484	4,131	489

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	680	Diff.	670	Diff.	660	Diff.	650	Diff.	640	Diff.	630	Diff.	620	Diff.	610	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,010	10	0,010	10	0,011	11	0,011	11	0,012	12	0,012	12	0,013	13	0,013	13
1000	0,023	15	0,024	14	0,025	15	0,026	15	0,027	16	0,028	16	0,030	17	0,031	18
2000	0,056	33	0,058	34	0,060	35	0,062	36	0,064	37	0,066	38	0,069	39	0,071	40
3000	0,102	46	0,105	47	0,108	48	0,111	49	0,115	51	0,119	53	0,124	55	0,128	57
		60		62		64		66		68		70		72		74
4000	0,162		0,167		0,172		0,177		0,183		0,189		0,196		0,202	
5000	0,240	78	0,247	80	0,254	82	0,261	84	0,269	86	0,277	88	0,286	90	0,294	92
6000	0,336	96	0,345	98	0,354	100	0,363	102	0,373	104	0,383	106	0,394	108	0,404	110
7000	0,450	114	0,461	116	0,472	118	0,483	120	0,495	122	0,507	124	0,520	126	0,532	128
8000	0,583	133	0,596	135	0,609	137	0,622	139	0,636	141	0,650	143	0,665	145	0,679	147
		155		157		159		162		164		166		169		171
9000	0,738		0,753		0,768		0,784		0,800		0,816		0,834		0,850	
10000	0,914	176	0,931	178	0,948	180	0,967	183	0,985	185	1,003	187	1,024	190	1,042	192
11000	1,110	196	1,129	198	1,148	200	1,169	202	1,189	204	1,209	206	1,232	208	1,252	210
12000	1,325	215	1,346	217	1,367	219	1,390	221	1,412	223	1,434	225	1,460	228	1,483	231
13000	1,565	240	1,588	242	1,611	244	1,636	246	1,661	249	1,686	252	1,716	255	1,743	258
		263		268		274		278		283		289		291		297
14000	1,828		1,856		1,885		1,914		1,944		1,975		2,007		2,040	
15000	2,127	299	2,160	304	2,193	308	2,226	312	2,260	316	2,295	320	2,331	324	2,368	328
16000	2,463	336	2,500	340	2,537	344	2,575	349	2,613	353	2,652	357	2,692	361	2,733	365
17000	2,833	370	2,874	374	2,915	378	2,957	383	3,000	387	3,044	392	3,089	397	3,135	402
18000	3,244	411	3,289	415	3,335	420	3,381	424	3,428	428	3,476	433	3,525	436	3,575	440
		447		452		457		463		469		475		480		485
19000	3,691		3,741		3,792		3,844		3,897		3,951		4,005		4,060	
20000	4,185	494	4,240	499	4,296	504	4,353	509	4,410	513	4,468	517	4,527	522	4,587	527



Tabelle 10f. Sekundäre Funktion  $M$ .

$\frac{v_0}{\epsilon}$	600	Diff.	590	Diff.	580	Diff.	570	Diff.	560	Diff.	550	Diff.	540	Diff.	530	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,014	14	0,014	14	0,015	15	0,015	15	0,016	16	0,016	16	0,017	17	0,017	17
1000	0,032	18	0,033	19	0,034	19	0,035	20	0,037	21	0,038	22	0,040	23	0,041	24
2000	0,073	41	0,076	43	0,079	45	0,082	47	0,086	49	0,089	51	0,093	53	0,096	55
3000	0,132	59	0,137	61	0,142	63	0,147	65	0,153	67	0,158	69	0,164	71	0,169	73
		76		78		80		83		84		86		88		90
4000	0,208		0,215		0,222		0,229		0,237		0,244		0,252		0,259	
5000	0,302	94	0,311	96	0,320	98	0,329	100	0,339	102	0,348	104	0,358	106	0,368	108
6000	0,414	112	0,425	114	0,436	116	0,447	118	0,459	120	0,470	122	0,483	124	0,495	126
7000	0,544	130	0,557	132	0,570	134	0,583	136	0,599	138	0,612	140	0,627	142	0,641	144
8000	0,694	150	0,709	152	0,724	154	0,740	157	0,759	160	0,775	163	0,792	165	0,809	168
		173		176		178		181		183		185		187		190
9000	0,867		0,885		0,902		0,921		0,942		0,960		0,979		0,999	
10000	1,061	194	1,082	197	1,101	199	1,123	202	1,146	204	1,167	207	1,188	209	1,211	212
11000	1,274	213	1,297	215	1,318	217	1,342	219	1,367	221	1,390	223	1,414	225	1,439	228
12000	1,509	235	1,535	238	1,560	242	1,589	247	1,618	251	1,644	254	1,672	258	1,700	261
13000	1,773	264	1,803	268	1,832	272	1,865	276	1,898	280	1,928	284	1,960	288	1,992	292
		301		305		311		313		316		322		327		332
14000	2,074		2,108		2,143		2,178		2,214		2,250		2,287		2,324	
15000	2,406	332	2,445	337	2,485	342	2,526	348	2,567	353	2,608	358	2,650	363	2,693	369
16000	2,775	369	2,818	373	2,862	377	2,907	381	2,953	386	3,000	392	3,047	397	3,095	402
17000	3,182	407	3,230	412	3,279	417	3,329	423	3,380	427	3,432	432	3,484	437	3,537	443
18000	3,627	445	3,680	450	3,734	455	3,789	460	3,845	465	3,902	470	3,959	475	4,021	484
		488		493		498		503		509		515		521		527
19000	4,115		4,173		4,232		4,292		4,354		4,417		4,480		4,548	
20000	4,648	533	4,710	537	4,773	541	4,838	546	4,905	551	4,974	557	5,043	563	5,118	570

$\frac{v_0}{\epsilon}$	520	Diff.	510	Diff.	500	Diff.	490	Diff.	480	Diff.	470	Diff.	460	Diff.	450	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,018	18	0,019	19	0,020	20	0,021	21	0,022	22	0,023	23	0,024	24	0,025	25
1000	0,043	25	0,045	26	0,047	27	0,049	28	0,051	29	0,053	30	0,055	31	0,057	32
2000	0,101	58	0,106	61	0,111	64	0,116	67	0,121	70	0,126	73	0,131	76	0,136	79
3000	0,176	75	0,183	77	0,190	79	0,197	81	0,204	83	0,211	85	0,219	88	0,227	91
		99		96		98		101		104		107		110		113
4000	0,268		0,278		0,288		0,298		0,308		0,318		0,329		0,340	
5000	0,379	111	0,392	114	0,405	117	0,418	120	0,431	123	0,444	126	0,458	129	0,472	133
6000	0,509	130	0,525	133	0,541	136	0,557	139	0,573	142	0,589	145	0,606	148	0,623	151
7000	0,657	148	0,675	150	0,693	153	0,711	156	0,729	159	0,747	162	0,766	165	0,786	168
8000	0,827	170	0,848	173	0,868	175	0,889	178	0,909	180	0,930	183	0,952	186	0,975	189
		193		195		197		200		202		205		208		211
9000	1,019		1,043		1,065		1,089		1,111		1,135		1,160		1,186	
10000	1,233	214	1,260	217	1,284	219	1,311	222	1,335	224	1,362	227	1,390	230	1,420	234
11000	1,464	231	1,493	233	1,519	235	1,549	238	1,577	242	1,608	246	1,641	251	1,677	257
12000	1,729	265	1,762	269	1,792	273	1,827	278	1,860	283	1,897	289	1,936	295	1,978	301
13000	2,026	297	2,063	301	2,101	309	2,140	313	2,180	320	2,222	325	2,266	330	2,312	334
		336		339		343		349		356		363		370		377
14000	2,362		2,402		2,444		2,489		2,536		2,585		2,636		2,689	
15000	2,737	375	2,782	380	2,829	385	2,878	389	2,930	394	2,984	399	3,041	405	3,101	412
16000	3,144	407	3,194	412	3,247	418	3,303	425	3,362	432	3,424	440	3,489	448	3,556	455
17000	3,591	447	3,647	453	3,706	459	3,769	466	3,835	473	3,904	480	3,976	487	4,051	495
18000	4,082	491	4,145	498	4,211	505	4,281	512	4,354	519	4,430	526	4,509	533	4,591	540
		534		543		550		558		566		574		582		590
19000	4,616		4,687		4,761		4,839		4,920		5,004		5,091		5,181	
20000	5,193	577	5,271	584	5,352	591	5,437	598	5,525	605	5,617	613	5,713	622	5,814	633

Tabelle 10f. Sekundäre Funktion  $M$ .

641

$\downarrow \frac{v}{v_0}$	440	Diff.	430	Diff.	420	Diff.	410	Diff.	400	Diff.	390	Diff.	380	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,026	26	0,027	27	0,028	28	0,030	30	0,032	32	0,034	34	0,036	36
1000	0,059	33	0,061	34	0,065	37	0,069	39	0,073	41	0,077	43	0,081	45
2000	0,141	82	0,146	85	0,153	88	0,160	91	0,167	94	0,174	97	0,181	100
3000	0,235	94	0,243	97	0,253	100	0,263	103	0,273	106	0,283	109	0,293	112
		116		119		122		125		128		131		134
4000	0,351		0,362	138	0,375	141	0,388	144	0,401	147	0,414	150	0,427	153
5000	0,486	135	0,500	157	0,516	160	0,532	163	0,548	166	0,564	169	0,580	172
6000	0,640	154	0,657	169	0,676	172	0,695	175	0,714	179	0,733	183	0,752	188
7000	0,806	166	0,826	185	0,848	198	0,870	202	0,893	206	0,916	211	0,940	216
8000	0,998	192	1,021	217	1,046	220	1,072	224	1,099	228	1,127	233	1,156	239
		214		217		220		224		228		233		239
9000	1,212		1,238	243	1,266	248	1,296	254	1,327	260	1,360	267	1,395	275
10000	1,450	238	1,481	243	1,514	250	1,550	254	1,587	260	1,627	267	1,670	275
11000	1,714	264	1,753	313	1,794	319	1,838	326	1,884	333	1,933	340	1,985	348
12000	2,021	307	2,066	347	2,113	355	2,164	363	2,217	370	2,273	379	2,333	388
13000	2,361	340	2,413	390	2,468	396	2,526	403	2,587	409	2,652	416	2,721	424
		384		390		396		403		409		416		424
14000	2,745		2,803	435	2,864	432	2,928	439	2,996	446	3,068	454	3,145	463
15000	3,163	418	3,228	471	3,296	478	3,367	487	3,442	495	3,522	502	3,608	509
16000	3,626	463	3,699	511	3,775	519	3,854	527	3,937	536	4,024	544	4,117	554
17000	4,129	508	4,210	554	4,294	561	4,381	569	4,472	578	4,568	589	4,671	598
18000	4,676	547	4,764	607	4,855	617	4,950	628	5,050	641	5,157	656	5,273	673
		598		607		617		628		641		656		673
19000	5,274		5,371	660	5,472	675	5,578	690	5,691	706	5,813	722	5,946	739
20000	5,920	646	6,031	660	6,147	675	6,268	690	6,397	706	6,535	722	6,685	739

$\downarrow \frac{v}{v_0}$	370	Diff.	360	Diff.	350	Diff.	340	Diff.	330	Diff.	320	Diff.	310	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,038	38	0,040	40	0,042	42	0,044	44	0,047	47	0,050	50	0,053	53
1000	0,085	47	0,089	49	0,093	51	0,097	53	0,102	55	0,108	58	0,114	61
2000	0,188	103	0,195	106	0,202	109	0,210	113	0,219	117	0,230	122	0,243	129
3000	0,304	116	0,315	120	0,327	125	0,340	130	0,355	136	0,373	143	0,394	151
		138		142		147		152		158		164		170
4000	0,442		0,457	161	0,474	166	0,492	171	0,513	176	0,537	182	0,564	189
5000	0,599	157	0,618	179	0,640	185	0,663	188	0,689	194	0,719	202	0,753	211
6000	0,774	175	0,797	198	0,823	204	0,851	213	0,883	221	0,921	233	0,964	244
7000	0,967	193	0,995	227	1,027	234	1,063	243	1,104	253	1,153	263	1,208	278
8000	1,188	221	1,222	254	1,261	263	1,306	274	1,357	286	1,418	299	1,486	314
		246		254		263		274		286		299		314
9000	1,434		1,476	293	1,524	303	1,580	315	1,643	328	1,717	342	1,800	356
10000	1,718	284	1,769	343	1,827	349	1,895	351	1,971	361	2,059	372	2,158	386
11000	2,042	334	2,102	377	2,169	388	2,246	398	2,332	399	2,431	411	2,543	425
12000	2,399	357	2,469	406	2,546	418	2,634	428	2,731	438	2,842	452	2,968	469
13000	2,795	396	2,875	443	2,962	455	3,062	465	3,169	481	3,294	495	3,437	510
		433		443		455		465		481		495		510
14000	3,228		3,318	484	3,417	496	3,527	509	3,650	524	3,789	541	3,947	561
15000	3,701	475	3,802	527	3,913	539	4,036	554	4,174	572	4,330	594	4,508	620
16000	4,218	517	4,329	578	4,452	598	4,590	610	4,746	630	4,924	654	5,128	683
17000	4,783	565	4,907	636	5,045	657	5,200	681	5,376	707	5,578	734	5,811	763
18000	5,401	618	5,543	711	5,702	733	5,881	757	6,083	783	6,312	811	6,573	842
		691		711		733		757		783		811		842
19000	6,092		6,254	781	6,435	806	6,638	837	6,866	869	7,123	908	7,415	937
20000	6,851	759	7,035	781	7,243	806	7,475	837	7,735	869	8,026	908	8,352	937

$\frac{v_0}{\epsilon}$	300	Diff.	290	Diff.	280	Diff.	270	Diff.	260	Diff.	250	Diff.	240	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
500	0,057	57	0,061	61	0,066	66	0,071	71	0,077	77	0,084	84	0,091	91
1000	0,121	64	0,129	68	0,138	72	0,148	77	0,159	82	0,172	88	0,186	95
2000	0,258	187	0,275	146	0,294	166	0,315	167	0,338	179	0,364	192	0,393	207
3000	0,418	160	0,445	170	0,475	181	0,508	193	0,544	206	0,585	221	0,631	238
		177		185		195		208		224		243		265
4000	0,595		0,630	209	0,670	223	0,716	239	0,768	258	0,828	280	0,896	305
5000	0,793	198	0,839	236	0,893	252	0,955	270	1,026	290	1,108	312	1,201	336
6000	1,015	222	1,075	274	1,145	292	1,225	312	1,316	334	1,420	358	1,537	384
7000	1,273	258	1,349	310	1,437	329	1,537	350	1,650	373	1,778	398	1,921	425
8000	1,566	330	1,659	348	1,766	367	1,887	388	2,023	411	2,176	436	2,346	463
9000	1,896		2,007	394	2,133	414	2,275	436	2,434	460	2,612	486	2,809	514
10000	2,271	375	2,401	418	2,547	438	2,711	461	2,894	487	3,098	516	3,323	548
11000	2,671	400	2,819	462	2,985	485	3,172	511	3,381	540	3,614	572	3,871	607
12000	3,113	442	3,281	508	3,470	534	3,683	568	3,921	599	4,186	635	4,478	680
13000	3,601	527	3,789	547	4,004	575	4,249	608	4,520	648	4,821	695	5,158	749
14000	4,128		4,386	615	4,579	649	4,857	684	5,168	737	5,516	783	5,907	839
15000	4,713	585	4,951	680	5,228	712	5,541	760	5,895	808	6,299	860	6,746	918
16000	5,362	649	5,631	759	5,940	800	6,301	841	6,703	883	7,159	932	7,664	995
17000	6,080	713	6,390	829	6,740	878	7,142	930	7,586	986	8,091	1045	8,659	1108
18000	6,873	876	7,219	913	7,618	953	8,072	1001	8,572	1085	9,136	1133	9,767	1213
19000	7,749		8,182	1003	8,571	1042	9,073	1105	9,637	1174	10,269	1254	10,980	1444
20000	8,719	970	9,135		9,613		10,178		10,811		11,523		12,425	

$\frac{v_0}{\epsilon}$	230	Diff.	220	Diff.	210	Diff.	200	Diff.	190	Diff.	180	Diff.	170	Diff.
0	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,000		0,00	
500	0,099	99	0,108	108	0,118	118	0,130	130	0,144	144	0,160	160	0,18	18
1000	0,202	103	0,220	112	0,240	122	0,264	134	0,293	149	0,329	169	0,37	19
2000	0,426	224	0,464	244	0,508	268	0,560	296	0,622	329	0,696	387	0,78	41
3000	0,684	258	0,745	281	0,815	307	0,897	337	0,993	371	1,105	409	1,23	45
		290		318		349		383		420		460		50
4000	0,974		1,063	364	1,164	398	1,280	435	1,413	475	1,565	518	1,73	55
5000	1,307	333	1,427	389	1,562	417	1,715	446	1,888	476	2,073	507	2,28	60
6000	1,669	362	1,816	442	1,979	474	2,161	509	2,364	548	2,590	592	2,88	65
7000	2,080	411	2,258	485	2,453	519	2,670	558	2,912	605	3,182	664	3,53	72
8000	2,534	454	2,743	523	2,972	557	3,228	596	3,517	644	3,846	707	4,25	80
9000	3,026		3,266	577	3,529	616	3,824	668	4,161	734	4,553	829	5,05	94
10000	3,570	544	3,843	627	4,145	682	4,490	755	4,895	853	5,362	964	5,99	112
11000	4,164	584	4,470	692	4,827	750	5,245	826	5,748	937	6,346	1071	7,11	121
12000	4,810	646	5,162	812	5,577	899	6,071	990	6,685	1063	7,417	1148	8,32	130
13000	5,539	810	5,974	878	6,476	954	7,061	1088	7,748	1180	8,559	1230	9,62	134
14000	6,349		6,852	961	7,430	1029	8,099	1117	8,878	1224	9,789	1356	10,96	152
15000	7,247	898	7,813	961	8,459	1099	9,216	1177	10,102	1284	11,145	1510	12,43	170
16000	8,230	983	8,869	1056	9,597	1158	10,447	1231	11,455	1353	12,655	1679	14,18	189
17000	9,300	1070	10,025	1156	10,857	1260	11,819	1372	12,969	1514	14,334	1863	16,07	205
18000	10,485	1185	11,305	1280	12,251	1394	13,353	1539	14,662	1693	16,197	2065	18,12	223
		1310		1488		1563		1717		1881		2205		246
19000	11,795		12,733		13,816		15,075		16,543		18,252		20,35	
20000	13,348	1548	14,379	1646	15,550	1734	16,989	1914	18,648	2105	20,544	2292	22,81	

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	160	Diff.	150	Diff.	140	Diff.	130	Diff.	120	Diff.	110	Diff.
0	0,00	20	0,00	22	0,00	24	0,00	27	0,00	32	0,00	39
500	0,20	22	0,22	25	0,24	29	0,27	34	0,32	40	0,39	48
1000	0,42	46	0,47	52	0,53	59	0,61	68	0,72	79	0,87	92
2000	0,88	50	0,99	56	1,12	64	1,29	74	1,51	87	1,79	106
3000	1,38	55	1,55	62	1,76	71	2,03	82	2,38	96	2,84	115
4000	1,93	63	2,17	71	2,47	82	2,85	96	3,34	114	3,99	137
5000	2,56	66	2,88	78	3,29	94	3,81	112	4,48	131	5,36	158
6000	3,22	74	3,66	86	4,23	101	4,93	119	5,79	141	6,92	168
7000	3,96	82	4,52	94	5,24	109	6,02	127	7,20	149	8,60	177
8000	4,78	92	5,46	107	6,33	126	7,29	146	8,69	170	10,37	199
9000	5,70	106	6,53	121	7,58	139	8,75	160	10,39	184	12,36	213
10000	6,76	127	7,74	145	8,97	168	10,35	189	12,23	211	14,49	238
11000	8,03	136	9,19	150	10,65	178	12,24	192	14,34	221	16,87	260
12000	9,39	139	10,69	157	12,37	176	14,16	219	16,55	250	19,47	293
13000	10,78	155	12,26	183	14,13	206	16,35	225	19,05	271	22,40	320
14000	12,33	179	14,09	199	16,19	222	18,70	252	21,76	296	25,60	367
15000	14,12	193	16,08	220	18,41	251	21,22	289	24,72	339	29,27	407
16000	16,05	213	18,28	242	20,92	277	24,11	319	28,11	372	33,34	444
17000	18,18	230	20,70	262	23,69	296	27,30	341	31,83	401	37,78	486
18000	20,48	250	23,32	283	26,65	327	30,71	379	35,84	446	42,64	535
19000	22,98	276	26,15	317	29,92	365	34,50	420	40,30	487	47,99	578
20000	25,74		29,32		33,57		38,70		45,17		53,72	

$\downarrow \frac{v_0}{\varepsilon}$	100	Diff.	90	Diff.	80	Diff.	70	Diff.	60	Diff.
0	0,00	48	0,00	59	0,00	74	0,00	97	0,0	13
500	0,48	59	0,59	74	0,74	93	0,97	117	1,3	15
1000	1,07	108	1,33	130	1,67	167	2,14	231	2,8	34
2000	2,15	120	2,63	164	3,34	210	4,45	273	6,2	38
3000	3,45	141	4,27	178	5,44	223	7,18	287	9,8	38
4000	4,86	167	6,03	205	7,67	253	10,05	314	13,6	39
5000	6,53	188	8,08	228	10,20	277	13,19	336	17,5	41
6000	8,41	202	10,36	245	12,97	300	16,55	371	21,6	46
7000	10,48	214	12,81	265	15,97	340	20,28	459	26,2	66
8000	12,57	237	15,46	292	19,87	378	24,85	517	32,8	73
9000	14,94	251	18,33	306	23,15	394	30,02	543	40,1	80
10000	17,45	277	21,44	334	27,09	458	35,45	675	48,1	87
11000	20,22	313	24,78	388	31,67	511	42,20	685	56,8	95
12000	23,35	342	28,66	432	36,78	587	49,05	749	66,1	99
13000	26,77	390	32,98	491	42,65	635	56,54	836	76,0	106
14000	30,67	462	37,89	565	49,00	645	64,90	904	86,5	118
15000	35,29	504	43,54	632	55,45	789	73,94	984	98,3	
16000	40,33	550	49,86	692	63,34	883	83,78	1140		
17000	45,83	606	56,78	772	72,17	981	95,18	1285		
18000	51,92	661	64,50	856	81,98	1076	108,08	1518		
19000	58,53	697	72,86	887	92,73	1156	121,21			
20000	65,50		81,73		104,29					

Tabelle 11. Primäre Funktionen  $D(u)$ ,  $J(u)$ ,  $A(u)$ ,  $T(u)$  zu dem einheitlichen Luftwiderstandsgesetz von Siacci („Siacci III“).

$$\frac{x}{c'} = D(u) - D(v_0)$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot x \cdot \left( \frac{A(u) - A(v_0)}{D(u) - D(v_0)} - J(v_0) \right)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cdot \cos^2 \varphi} (J(u) - J(v_0))$$

$$t = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot (T(u) - T(v_0))$$

$$u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}$$

Dabei  $c' = \frac{1}{c\beta}$ ;  $c'f(v)$  = Verzögerung des Geschosses durch den Luftwiderstand; für  $f(v)$  vgl. Tabelle 6; für  $\beta$  vgl. Schluß von Tabelle 11 und Diagramm Nr. VI.

$$c = \frac{(2R)^2 \cdot \delta \cdot 1000 \cdot i \cdot 0,896}{P \cdot 1,206}; \quad 2R = \text{Kaliber in m}; \quad P = \text{Geschossgewicht in kg};$$

$\delta$  = Tagesluftgewicht in kg/l cbm;  $i$  soll = 1 sein für Ogivalgeschosse von 2 Kal. Abrundungsradius. Im übrigen vgl. Band I, § 27.

$D$	$J$	Diff.	$A$	Diff.	$T$	Diff.	$u$	Diff.
1000	0,10000		100,000		1,000		1500,0	
1010	0,10008	8	101,000	1,000	1,006	6	1497,0	3,0
1020	0,10017	9	102,001	1,001	1,012	6	1494,0	3,0
1030	0,10026	9	103,004	1,003	1,019	7	1491,0	3,0
1040	0,10035	9	104,007	1,003	1,025	6	1488,0	3,0
1050	0,10044	9	105,011	1,004	1,032	7	1485,0	3,0
		9		1,004		7		3,0
1060	0,10053	9	106,015	1,006	1,039	7	1482,0	3,0
1070	0,10062	9	107,021	1,007	1,046	7	1479,0	3,0
1080	0,10071	9	108,028	1,007	1,053	7	1476,0	3,0
1090	0,10080	9	109,035	1,009	1,060	7	1473,0	3,0
1100	0,10089	9	110,044	1,009	1,067	7	1470,0	3,0
		9		1,009		7		3,0
1110	0,10098	9	111,053		1,074		1467,0	
1120	0,10107	10	112,063	1,010	1,080	6	1464,0	3,0
1130	0,10117	9	113,074	1,011	1,087	7	1461,0	3,0
1140	0,10126	9	114,087	1,013	1,094	7	1458,0	3,0
1150	0,10135	10	115,100	1,013	1,101	7	1455,0	3,0
		10		1,014		7		3,0
1160	0,10145	9	116,114	1,015	1,108	7	1452,0	3,0
1170	0,10154	9	117,129	1,015	1,115	7	1449,0	3,0
1180	0,10163	9	118,144	1,017	1,122	7	1446,0	3,0
1190	0,10172	10	119,161	1,018	1,129	7	1443,0	3,0
1200	0,10182	9	120,179	1,019	1,136	7	1440,0	3,0
		9		1,019		7		2,9
1210	0,10191	10	121,198		1,143		1437,1	
1220	0,10201	9	122,218	1,020	1,150	7	1434,1	3,0
1230	0,10210	10	123,239	1,021	1,157	7	1431,1	3,0
1240	0,10220	9	124,260	1,021	1,164	7	1428,1	3,0
1250	0,10229	10	125,282	1,022	1,171	7	1425,2	2,9
		10		1,024		7		3,0
1260	0,10239	9	126,306		1,178		1422,2	
1270	0,10248	10	127,330	1,024	1,185	7	1419,2	3,0
1280	0,10258	10	128,355	1,025	1,192	7	1416,2	3,0
1290	0,10268	10	129,381	1,026	1,199	7	1413,2	3,0
1300	0,10278	10	130,409	1,028	1,206	7	1410,3	2,9
		10		1,028		7		3,0

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
1310	0,10288	10	181,437	1,030	1,213	7	1407,3	2,9
1320	0,10298	11	182,467	1,030	1,220	8	1404,4	3,0
1330	0,10309	10	183,497	1,031	1,228	7	1401,4	2,9
1340	0,10319	10	184,528	1,033	1,235	7	1398,5	3,0
1350	0,10329	10	185,561	1,033	1,242	7	1395,5	2,9
1360	0,10339	11	186,594	1,035	1,249	7	1392,6	3,0
1370	0,10350	10	187,629	1,035	1,256	8	1389,6	3,0
1380	0,10360	10	188,664	1,036	1,264	7	1386,6	2,9
1390	0,10370	10	189,700	1,038	1,271	7	1383,7	3,0
1400	0,10380	11	190,738	1,039	1,278	7	1380,7	2,9
1410	0,10391	10	191,777	1,039	1,285	8	1377,8	3,0
1420	0,10401	10	192,816	1,041	1,293	7	1374,8	2,9
1430	0,10411	11	193,857	1,041	1,300	8	1371,9	3,0
1440	0,10422	10	194,898	1,043	1,308	7	1368,9	2,9
1450	0,10432	11	195,941	1,044	1,315	7	1366,0	3,0
1460	0,10443	10	196,985	1,045	1,322	8	1363,0	2,9
1470	0,10453	11	198,030	1,046	1,330	7	1360,1	3,0
1480	0,10464	10	199,076	1,047	1,337	7	1357,1	2,9
1490	0,10474	10	200,123	1,047	1,344	7	1354,2	3,0
1500	0,10484	11	201,170	1,049	1,351	7	1351,2	2,9
1510	0,10495	11	202,219	1,050	1,358	8	1348,3	3,0
1520	0,10506	11	203,269	1,051	1,366	7	1345,3	2,9
1530	0,10517	10	204,320	1,053	1,373	8	1342,4	2,9
1540	0,10527	11	205,373	1,053	1,381	7	1339,5	3,0
1550	0,10538	11	206,426	1,054	1,388	8	1336,5	2,9
1560	0,10549	11	207,480	1,056	1,396	7	1333,6	2,9
1570	0,10560	12	208,536	1,057	1,403	8	1330,7	2,9
1580	0,10572	11	209,593	1,058	1,411	7	1327,8	2,9
1590	0,10583	11	210,651	1,059	1,418	8	1324,9	3,0
1600	0,10594	12	211,710	1,060	1,426	7	1321,9	2,9
1610	0,10606	11	212,770	1,061	1,433	7	1319,0	2,9
1620	0,10617	12	213,831	1,063	1,440	8	1316,1	2,9
1630	0,10629	11	214,893	1,063	1,448	8	1313,2	2,9
1640	0,10640	12	215,956	1,065	1,456	8	1310,3	3,0
1650	0,10652	11	217,021	1,065	1,464	7	1307,3	2,9
1660	0,10663	12	218,087	1,066	1,471	8	1304,4	2,9
1670	0,10675	11	219,153	1,068	1,479	8	1301,5	2,9
1680	0,10686	12	220,221	1,070	1,487	8	1298,6	2,9
1690	0,10698	11	221,291	1,070	1,495	8	1295,7	3,0
1700	0,10709	12	222,361	1,071	1,503	7	1292,7	2,9
1710	0,10721	12	223,432	1,073	1,510	8	1289,8	2,9
1720	0,10733	11	224,505	1,074	1,518	8	1286,9	2,9
1730	0,10744	12	225,579	1,075	1,526	8	1284,0	2,9
1740	0,10756	12	226,654	1,076	1,534	8	1281,1	2,9
1750	0,10768	12	227,730	1,077	1,542	8	1278,2	2,9
1760	0,10780	12	228,807	1,079	1,550	7	1275,3	2,9
1770	0,10792	12	229,886	1,080	1,557	8	1272,4	2,9
1780	0,10804	12	230,966	1,081	1,565	8	1269,5	2,9
1790	0,10816	12	232,047	1,083	1,573	7	1266,6	2,9
1800	0,10828	12	233,129	1,083	1,580	8	1263,8	2,9

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
1810	0,10841		184,212		1,588		1260,9	
1820	0,10853	12	185,297	1,085	1,596	8	1258,0	2,9
1830	0,10866	13	186,383	1,086	1,604	8	1255,1	2,9
1840	0,10878	13	187,470	1,087	1,612	8	1252,2	2,9
1850	0,10891	13	188,559	1,089	1,620	8	1249,3	2,9
		12		1,089		8		2,9
1860	0,10903		189,648		1,628		1246,4	
1870	0,10916	13	190,739	1,091	1,636	8	1243,5	2,9
1880	0,10928	12	191,831	1,092	1,644	8	1240,6	2,9
1890	0,10941	13	192,925	1,094	1,652	8	1237,7	2,9
1900	0,10954	13	194,020	1,095	1,660	8	1234,9	2,8
		13		1,096		8		2,9
1910	0,10967		195,116		1,668		1232,0	
1920	0,10980	13	196,213	1,097	1,676	8	1229,2	2,8
1930	0,10993	13	197,312	1,099	1,684	8	1226,3	2,9
1940	0,11006	13	198,412	1,100	1,693	9	1223,4	2,9
1950	0,11020	14	199,513	1,101	1,701	8	1220,5	2,9
		13		1,103		8		2,9
1960	0,11033		200,616		1,709		1217,6	
1970	0,11046	13	201,720	1,104	1,717	8	1214,8	2,8
1980	0,11059	13	202,825	1,106	1,726	9	1211,9	2,9
1990	0,11072	13	203,932	1,107	1,734	8	1209,0	2,9
2000	0,11086	14	205,040	1,108	1,743	9	1206,2	2,8
		14		1,110		8		2,9
2010	0,11100		206,150		1,751		1203,3	
2020	0,11113	13	207,260	1,110	1,759	8	1200,5	2,8
2030	0,11127	14	208,372	1,112	1,767	8	1197,6	2,9
2040	0,11141	14	209,485	1,113	1,775	8	1194,8	2,8
2050	0,11155	14	210,600	1,115	1,784	9	1192,0	2,8
		13		1,116		8		2,9
2060	0,11168		211,716		1,792		1189,1	
2070	0,11182	14	212,834	1,118	1,800	8	1186,3	2,8
2080	0,11196	14	213,953	1,119	1,809	9	1183,4	2,9
2090	0,11210	14	215,074	1,121	1,817	8	1180,6	2,8
2100	0,11224	14	216,196	1,122	1,826	9	1177,8	2,8
		14		1,123		9		2,9
2110	0,11238		217,319		1,835		1174,9	
2120	0,11253	15	218,443	1,124	1,844	9	1172,1	2,8
2130	0,11267	14	219,569	1,126	1,852	8	1169,3	2,8
2140	0,11282	15	220,696	1,127	1,861	9	1166,5	2,8
2150	0,11296	14	221,824	1,128	1,870	9	1163,7	2,8
		15		1,130		8		2,9
2160	0,11311		222,954		1,878		1160,8	
2170	0,11325	14	224,087	1,133	1,887	9	1158,0	2,8
2180	0,11340	15	225,221	1,134	1,895	8	1155,2	2,8
2190	0,11354	14	226,356	1,135	1,904	9	1152,4	2,8
2200	0,11369	15	227,492	1,136	1,912	8	1149,6	2,8
		15		1,137		9		2,8
2210	0,11384		228,629		1,921		1146,8	
2220	0,11399	15	229,767	1,138	1,930	9	1144,0	2,8
2230	0,11414	15	230,908	1,141	1,939	9	1141,1	2,9
2240	0,11429	15	232,050	1,142	1,948	9	1138,3	2,8
2250	0,11444	15	233,194	1,144	1,956	8	1135,5	2,8
		16		1,145		9		2,8
2260	0,11460		234,339		1,965		1132,7	
2270	0,11475	15	235,486	1,147	1,974	9	1129,9	2,8
2280	0,11490	15	236,634	1,148	1,983	8	1127,1	2,8
2290	0,11506	16	237,784	1,150	1,992	9	1124,3	2,8
2300	0,11521	15	238,936	1,152	2,000	8	1121,5	2,8
		16		1,153		9		2,8

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
2310	0,11537	15	240,089	1,154	2,009	9	1118,7	2,8
2320	0,11552	16	241,243	1,155	2,018	9	1115,9	2,7
2330	0,11568	15	242,398	1,157	2,027	9	1113,2	2,8
2340	0,11583	16	243,555	1,160	2,036	9	1110,4	2,8
2350	0,11599	16	244,715	1,161	2,045	9	1107,6	2,8
2360	0,11615	16	245,876	1,162	2,054	9	1104,8	2,8
2370	0,11631	16	247,038	1,163	2,063	9	1102,0	2,8
2380	0,11647	17	248,201	1,165	2,072	9	1099,2	2,8
2390	0,11664	16	249,366	2,168	2,081	10	1096,4	2,7
2400	0,11680	16	250,534	1,169	2,091	9	1093,7	2,8
2410	0,11696	16	251,703	1,171	2,100	9	1090,9	2,8
2420	0,11712	17	252,874	1,172	2,109	9	1088,1	2,7
2430	0,11729	16	254,046	1,174	2,118	10	1085,4	2,8
2440	0,11745	17	255,220	1,176	2,128	9	1082,6	2,8
2450	0,11762	17	256,395	1,177	2,137	9	1079,8	2,7
2460	0,11779	17	257,572	1,179	2,146	10	1077,1	2,8
2470	0,11796	18	258,751	1,181	2,156	9	1074,3	2,7
2480	0,11814	17	259,932	1,183	2,165	9	1071,6	2,8
2490	0,11831	18	261,114	1,183	2,174	9	1068,8	2,7
2500	0,11849	17	262,297	1,186	2,183	10	1066,1	2,7
2510	0,11866	18	263,483	1,188	2,193	9	1063,4	2,8
2520	0,11884	17	264,671	1,189	2,202	10	1060,6	2,7
2530	0,11901	18	265,860	1,191	2,212	9	1057,9	2,8
2540	0,11919	18	267,051	1,193	2,221	10	1055,1	2,7
2550	0,11937	17	268,244	1,194	2,231	9	1052,4	2,7
2560	0,11954	18	269,438	1,196	2,240	10	1049,7	2,8
2570	0,11972	18	270,634	1,199	2,250	9	1046,9	2,7
2580	0,11990	18	271,833	1,200	2,259	9	1044,2	2,8
2590	0,12008	18	273,033	1,202	2,269	9	1041,4	2,7
2600	0,12026	19	274,235	1,203	2,278	10	1038,7	2,7
2610	0,12045	18	275,438	1,206	2,288	10	1036,0	2,7
2620	0,12063	19	276,643	1,206	2,298	10	1033,3	2,7
2630	0,12082	19	277,851	1,209	2,308	9	1030,6	2,7
2640	0,12101	18	279,060	1,210	2,317	10	1027,9	2,8
2650	0,12119	19	280,270	1,214	2,327	10	1025,1	2,7
2660	0,12138	19	281,484	1,215	2,337	10	1022,4	2,7
2670	0,12157	19	282,699	1,216	2,347	10	1019,7	2,7
2680	0,12176	19	283,915	1,219	2,357	9	1017,0	2,7
2690	0,12195	18	285,134	1,220	2,366	10	1014,3	2,7
2700	0,12213	19	286,354	1,222	2,376	10	1011,6	2,7
2710	0,12232	19	287,576	1,224	2,386	10	1008,9	2,7
2720	0,12251	20	288,800	1,226	2,396	10	1006,2	2,7
2730	0,12271	19	290,026	1,228	2,406	10	1003,5	2,7
2740	0,12290	20	291,254	1,230	2,416	10	1000,8	2,6
2750	0,12310	20	292,484	1,233	2,426	10	998,2	2,7
2760	0,12330	20	293,717	1,234	2,436	10	995,5	2,7
2770	0,12350	19	294,951	1,236	2,446	10	992,8	2,7
2780	0,12369	20	296,187	1,238	2,456	10	990,1	2,7
2790	0,12389	20	297,425	1,240	2,466	10	987,4	2,7
2800	0,12409	21	298,665	1,242	2,476	11	984,7	2,6



<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
2810	0,12430	20	299,907	1,243	2,487	10	982,1	2,7
2820	0,12450	21	301,150	1,246	2,497	10	979,4	2,7
2830	0,12471	21	302,396	1,248	2,507	11	976,7	2,6
2840	0,12492	21	303,644	1,250	2,518	10	974,1	2,7
2850	0,12513	21	304,894	1,252	2,528	10	971,4	2,7
2860	0,12534	21	306,146	1,255	2,538	10	968,7	2,6
2870	0,12555	21	307,401	1,257	2,548	11	966,1	2,7
2880	0,12576	20	308,658	1,259	2,559	10	963,4	2,6
2890	0,12596	21	309,917	1,261	2,569	10	960,8	2,7
2900	0,12617	22	311,178	1,263	2,579	11	958,1	2,7
2910	0,12639	22	312,441	1,265	2,590	10	955,4	2,6
2920	0,12661	22	313,706	1,267	2,600	11	952,8	2,6
2930	0,12683	22	314,973	1,269	2,611	10	950,2	2,7
2940	0,12705	22	316,242	1,271	2,621	11	947,5	2,6
2950	0,12727	22	317,513	1,274	2,632	10	944,9	2,6
2960	0,12749	22	318,787	1,276	2,642	11	942,3	2,6
2970	0,12771	22	320,063	1,278	2,653	11	939,7	2,6
2980	0,12793	22	321,341	1,280	2,664	10	937,1	2,7
2990	0,12815	22	322,621	1,283	2,674	11	934,4	2,6
3000	0,12837	23	323,904	1,285	2,685	11	931,8	2,7
3010	0,12860	22	325,189	1,287	2,696	10	929,1	2,6
3020	0,12882	22	326,476	1,290	2,706	11	926,5	2,6
3030	0,12904	23	327,766	1,291	2,717	11	923,9	2,6
3040	0,12927	23	329,057	1,294	2,728	11	921,3	2,6
3050	0,12950	23	330,351	1,296	2,739	11	918,7	2,6
3060	0,12973	24	331,647	1,299	2,750	11	916,1	2,6
3070	0,12997	24	332,946	1,301	2,761	11	913,5	2,6
3080	0,13021	24	334,247	1,303	2,772	11	910,9	2,6
3090	0,13045	24	335,550	1,306	2,783	11	908,3	2,6
3100	0,13069	24	336,856	1,308	2,794	11	905,7	2,6
3110	0,13093	25	338,164	1,310	2,805	11	903,1	2,6
3120	0,13118	24	339,474	1,313	2,816	11	900,5	2,6
3130	0,13142	24	340,787	1,315	2,827	12	897,9	2,5
3140	0,13166	24	342,102	1,318	2,839	11	895,4	2,6
3150	0,13190	25	343,420	1,320	2,850	11	892,8	2,6
3160	0,13215	25	344,740	1,323	2,861	11	890,2	2,6
3170	0,13240	25	346,063	1,325	2,872	11	887,6	2,6
3180	0,13265	25	347,388	1,328	2,883	12	885,0	2,6
3190	0,13290	25	348,716	1,330	2,895	11	882,4	2,5
3200	0,13315	26	350,046	1,333	2,906	11	879,9	2,6
3210	0,13341	26	351,378	1,336	2,917	12	877,3	2,5
3220	0,13366	26	352,714	1,338	2,929	11	874,8	2,6
3230	0,13392	26	354,052	1,340	2,940	12	872,2	2,5
3240	0,13418	26	355,392	1,343	2,952	11	869,7	2,6
3250	0,13444	26	356,735	1,346	2,963	12	867,1	2,5
3260	0,13470	26	358,081	1,348	2,975	11	864,6	2,6
3270	0,13496	27	359,429	1,351	2,986	12	862,0	2,5
3280	0,13523	26	360,780	1,354	2,998	11	859,5	2,6
3290	0,13549	27	362,134	1,356	3,009	12	856,9	2,5
3300	0,13576	27	363,490	1,359	3,021	11	854,4	2,5

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
3310	0,13603	27	364,849	1,362	3,032	12	851,9	2,5
3320	0,13630	28	366,211	1,364	3,044	12	849,4	2,5
3330	0,13658	27	367,575	1,367	3,056	12	846,9	2,5
3340	0,13685	28	368,942	1,370	3,068	12	844,4	2,5
3350	0,13713	27	370,312	1,373	3,080	12	841,9	2,5
3360	0,13740	28	371,685	1,375	3,092	12	839,4	2,5
3370	0,13768	28	373,060	1,378	3,104	12	836,9	2,5
3380	0,13796	28	374,438	1,381	3,116	12	834,4	2,5
3390	0,13824	29	375,819	1,384	3,128	12	831,9	2,5
3400	0,13853	28	377,203	1,387	3,140	12	829,4	2,4
3410	0,13881	29	378,590	1,389	3,152	12	827,0	2,5
3420	0,13910	29	379,979	1,393	3,164	12	824,5	2,5
3430	0,13939	29	381,372	1,395	3,176	13	822,0	2,5
3440	0,13968	30	382,767	1,399	3,189	12	819,5	2,4
3450	0,13998	29	384,166	1,401	3,201	12	817,1	2,5
3460	0,14027	30	385,567	1,404	3,213	12	814,6	2,5
3470	0,14057	29	386,971	1,408	3,225	12	812,1	2,4
3480	0,14086	30	388,379	1,410	3,237	13	809,7	2,5
3490	0,14116	31	389,789	1,413	3,250	12	807,2	2,5
3500	0,14147	30	391,202	1,416	3,262	13	804,7	2,5
3510	0,14177	31	392,618	1,419	3,275	13	802,2	2,4
3520	0,14208	30	394,037	1,422	3,288	12	799,8	2,4
3530	0,14238	31	395,459	1,426	3,300	13	797,4	2,5
3540	0,14269	32	396,885	1,429	3,313	12	794,9	2,4
3550	0,14301	31	398,314	1,431	3,325	13	792,5	2,5
3560	0,14332	32	399,745	1,435	3,338	12	790,0	2,4
3570	0,14364	31	401,180	1,438	3,350	13	787,6	2,4
3580	0,14395	32	402,618	1,441	3,363	13	785,2	2,5
3590	0,14427	32	404,059	1,444	3,376	13	782,7	2,4
3600	0,14459	32	405,503	1,447	3,389	13	780,3	2,4
3610	0,14491	33	406,950	1,451	3,402	13	777,9	2,4
3620	0,14524	33	408,401	1,455	3,415	13	775,5	2,4
3630	0,14557	33	409,856	1,457	3,428	13	773,1	2,4
3640	0,14590	34	411,313	1,461	3,441	13	770,7	2,4
3650	0,14624	33	412,774	1,464	3,454	13	768,3	2,4
3660	0,14657	33	414,238	1,467	3,467	13	765,9	2,4
3670	0,14690	33	415,705	1,470	3,480	13	763,5	2,4
3680	0,14723	34	417,175	1,474	3,493	13	761,1	2,4
3690	0,14757	34	418,649	1,478	3,506	13	758,7	2,4
3700	0,14791	33	420,127	1,481	3,519	13	756,3	2,4
3710	0,14824	34	421,608	1,484	3,532	13	753,9	2,4
3720	0,14858	35	423,092	1,487	3,545	13	751,5	2,3
3730	0,14893	35	424,579	1,491	3,558	14	749,2	2,4
3740	0,14928	36	426,070	1,495	3,572	13	746,8	2,3
3750	0,14964	35	427,565	1,498	3,585	13	744,5	2,4
3760	0,14999	36	429,063	1,501	3,598	14	742,1	2,3
3770	0,15035	36	430,564	1,506	3,612	13	739,8	2,4
3780	0,15071	37	432,070	1,509	3,625	14	737,4	2,3
3790	0,15108	37	433,579	1,513	3,639	14	735,1	2,4
3800	0,15145	37	435,091	1,516	3,653	13	732,7	2,3

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

		Diff.		Diff.	$T$	Diff.		Diff.
3810	0,15182	37	436,607	1,520 1,524 1,528 1,531 1,535	3,666	14	780,4	2,4 2,3 2,4 2,3 2,4
3820	0,15219		438,127		3,680		728,0	
3830	0,15257		439,651		3,694		725,7	
3840	0,15294		441,179		3,708		723,3	
3850	0,15331		442,710		3,722		721,0	
3860	0,15369	38	444,245	1,539 1,543 1,546 1,551 1,554	3,736	14	718,6	2,3 2,3 2,3 2,3 2,3
3870	0,15407		445,784		3,750		716,3	
3880	0,15445		447,327		3,764		714,0	
3890	0,15484		448,873		3,778		711,7	
3900	0,15523		450,424		3,792		709,4	
3910	0,15562	40	451,978	1,558 1,562 1,566 1,570 1,575	3,806	14	707,1	2,4 2,3 2,3 2,2 2,3
3920	0,15601		453,536		3,820		704,7	
3930	0,15641		455,098		3,835		702,4	
3940	0,15680		456,664		3,849		700,1	
3950	0,15720		458,234		3,863		697,9	
3960	0,15760	41	459,809	1,578 1,582 1,587 1,590 1,594	3,878	14	695,6	2,3 2,2 2,3 2,2 2,3
3970	0,15801		461,387		3,892		693,3	
3980	0,15843		462,969		3,906		691,1	
3990	0,15884		464,556		3,920		688,8	
4000	0,15925		466,146		3,935		686,6	
4010	0,15967	42	467,740	1,599 1,603 1,607 1,612 1,616	3,949	15	684,3	2,2 2,2 2,3 2,2 2,2
4020	0,16009		469,339		3,964		682,1	
4030	0,16051		470,942		3,979		679,9	
4040	0,16094		472,549		3,993		677,6	
4050	0,16137		474,161		4,008		675,4	
4060	0,16180	44	475,777	1,620 1,625 1,629 1,633 1,638	4,023	15	673,2	2,2 2,2 2,3 2,2 2,2
4070	0,16224		477,397		4,038		671,0	
4080	0,16267		479,022		4,053		668,8	
4090	0,16311		480,651		4,068		666,5	
4100	0,16355		482,284		4,083		664,3	
4110	0,16399	45	483,922	1,641 1,647 1,651 1,656 1,660	4,098	15	662,1	2,1 2,2 2,2 2,2 2,2
4120	0,16444		485,563		4,113		660,0	
4130	0,16489		487,210		4,129		657,8	
4140	0,16535		488,861		4,144		655,6	
4150	0,16581		490,517		4,159		653,4	
4160	0,16628	46	492,177	1,666 1,669 1,674 1,679 1,684	4,174	16	651,2	2,2 2,2 2,2 2,1 2,2
4170	0,16674		493,843		4,190		649,0	
4180	0,16721		495,512		4,205		646,8	
4190	0,16768		497,186		4,220		644,6	
4200	0,16815		498,865		4,235		642,5	
4210	0,16863	48	500,549	1,689 1,693 1,699 1,703 1,708	4,252	15	640,3	2,1 2,2 2,1 2,1 2,1
4220	0,16911		502,238		4,267		638,2	
4230	0,16960		503,931		4,283		636,0	
4240	0,17009		505,630		4,299		633,9	
4250	0,17058		507,333		4,315		631,8	
4260	0,17108	49	509,041	1,713 1,719 1,723 1,728 1,733	4,331	16	629,7	2,2 2,1 2,1 2,1 2,1
4270	0,17157		510,754		4,347		627,5	
4280	0,17207		512,473		4,363		625,4	
4290	0,17257		514,196		4,379		623,3	
4300	0,17307		515,924		4,395		621,2	

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Sjaeci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
4310	0,17358	51	517,657	1,789	4,412	16	619,1	2,1
4320	0,17409	52	519,396	1,743	4,428	16	617,0	2,1
4330	0,17461	52	521,139	1,749	4,444	16	614,9	2,1
4340	0,17513	52	522,888	1,754	4,460	16	612,8	2,0
4350	0,17565	53	524,642	1,759	4,476	16	610,8	2,1
4360	0,17618	53	526,401	1,764	4,492	17	608,7	2,1
4370	0,17671	53	528,165	1,770	4,509	16	606,6	2,1
4380	0,17724	54	529,935	1,776	4,525	17	604,5	2,1
4390	0,17778	54	531,711	1,780	4,542	16	602,4	2,0
4400	0,17832	55	533,491	1,785	4,558	17	600,4	2,1
4410	0,17887	55	535,276	1,792	4,575	17	598,3	2,0
4420	0,17942	56	537,068	1,797	4,592	17	596,3	2,0
4430	0,17998	56	538,865	1,803	4,609	17	594,3	2,1
4440	0,18054	56	540,667	1,809	4,626	17	592,2	2,0
4450	0,18110	56	542,476	1,813	4,643	17	590,2	2,1
4460	0,18166	57	544,289	1,820	4,660	17	588,1	2,0
4470	0,18223	57	546,109	1,825	4,677	17	586,1	2,0
4480	0,18280	57	547,934	1,831	4,694	17	584,1	2,0
4490	0,18337	58	549,765	1,837	4,711	17	582,1	2,0
4500	0,18395	58	551,602	1,843	4,728	18	580,1	2,0
4510	0,18453	59	553,444	1,848	4,746	17	578,1	2,0
4520	0,18512	59	555,292	1,855	4,763	17	576,1	1,9
4530	0,18571	60	557,147	1,860	4,780	18	574,2	2,0
4540	0,18631	60	559,007	1,866	4,798	17	572,2	1,9
4550	0,18691	61	560,873	1,872	4,815	18	570,3	2,0
4560	0,18752	61	562,745	1,878	4,833	17	568,3	2,0
4570	0,18813	62	564,623	1,885	4,850	18	566,3	1,9
4580	0,18875	62	566,508	1,891	4,868	18	564,4	2,0
4590	0,18937	62	568,399	1,897	4,886	17	562,4	2,0
4600	0,18999	63	570,296	1,903	4,903	18	560,4	2,0
4610	0,19062	63	572,199	1,909	4,921	18	558,4	2,0
4620	0,19125	64	574,108	1,915	4,939	18	556,4	1,9
4630	0,19189	64	576,023	1,922	4,957	18	554,5	1,9
4640	0,19253	64	577,945	1,929	4,975	19	552,6	1,8
4650	0,19317	65	579,874	1,935	4,994	18	550,8	1,9
4660	0,19382	65	581,809	1,941	5,012	18	548,9	1,9
4670	0,19447	66	583,750	1,948	5,030	18	547,0	1,9
4680	0,19513	66	585,698	1,955	5,048	18	545,1	1,9
4690	0,19579	66	587,653	1,961	5,066	19	543,2	1,9
4700	0,19645	67	589,614	1,968	5,085	19	541,3	1,9
4710	0,19712	68	591,582	1,974	5,104	18	539,4	1,9
4720	0,19780	68	593,556	1,982	5,122	18	537,5	1,8
4730	0,19848	69	595,538	1,988	5,140	19	535,7	1,9
4740	0,19917	69	597,526	1,996	5,159	19	533,8	1,8
4750	0,19986	70	599,522	2,002	5,178	19	532,0	1,9
4760	0,20056	70	601,524	2,009	5,197	19	530,1	1,9
4770	0,20126	70	603,533	2,016	5,216	19	528,2	1,8
4780	0,20196	71	605,549	2,023	5,235	19	526,4	1,8
4790	0,20267	71	607,572	2,030	5,254	19	524,6	1,9
4800	0,20338	72	609,602	2,038	5,273	20	522,7	1,8

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
4810	0,20410	73	611,640	2,044	5,293	19	520,9	1,8
4820	0,20483	73	613,684	2,062	5,312	19	519,1	1,8
4830	0,20556	74	615,736	2,060	5,331	20	517,3	1,8
4840	0,20630	74	617,796	2,066	5,351	19	515,5	1,8
4850	0,20704	75	619,862	2,075	5,370	20	513,7	1,8
4860	0,20779	75	621,937	2,081	5,390	19	511,9	1,8
4870	0,20854	75	624,018	2,089	5,409	20	510,1	1,7
4880	0,20929	76	626,107	2,097	5,429	20	508,4	1,8
4890	0,21005	76	628,204	2,104	5,449	19	506,6	1,8
4900	0,21081	77	630,308	2,113	5,468	20	504,8	1,7
4910	0,21158	78	632,420	2,120	5,488	20	503,1	1,7
4920	0,21236	78	634,540	2,128	5,508	20	501,4	1,8
4930	0,21314	79	636,668	2,135	5,528	20	499,6	1,7
4940	0,21393	80	638,803	2,144	5,548	21	497,9	1,7
4950	0,21473	80	640,947	2,151	5,569	20	496,2	1,7
4960	0,21553	81	643,098	2,159	5,589	20	494,5	1,8
4970	0,21634	81	645,257	2,168	5,609	20	492,7	1,7
4980	0,21715	81	647,425	2,175	5,629	20	491,0	1,7
4990	0,21796	82	649,600	2,184	5,649	20	489,3	1,7
5000	0,21878	83	651,784	2,193	5,669	20	487,6	1,7
5010	0,21961	84	653,976	2,200	5,689	21	485,9	1,7
5020	0,22045	85	656,176	2,209	5,710	20	484,2	1,7
5030	0,22130	85	658,385	2,217	5,730	21	482,5	1,7
5040	0,22215	86	660,602	2,226	5,751	21	480,8	1,7
5050	0,22301	85	662,828	2,234	5,772	21	479,1	1,8
5060	0,22386	86	665,062	2,243	5,793	21	477,5	1,7
5070	0,22472	86	667,305	2,251	5,814	21	475,8	1,8
5080	0,22558	87	669,556	2,260	5,835	21	474,2	1,7
5090	0,22645	87	671,816	2,269	5,856	22	472,5	1,8
5100	0,22732	88	674,085	2,277	5,878	21	470,9	1,8
5110	0,22820	88	676,362	2,285	5,899	22	469,3	1,8
5120	0,22908	89	678,647	2,295	5,921	21	467,7	1,8
5130	0,22997	90	680,942	2,304	5,942	22	466,1	1,8
5140	0,23087	91	683,246	2,313	5,964	21	464,5	1,8
5150	0,23178	92	685,559	2,323	5,985	22	462,9	1,8
5160	0,23270	94	687,882	2,333	6,007	21	461,3	1,8
5170	0,23364	94	690,214	2,343	6,028	22	459,7	1,8
5180	0,23458	95	692,556	2,350	6,050	22	458,1	1,8
5190	0,23553	95	694,906	2,360	6,072	22	456,5	1,8
5200	0,23648	96	697,266	2,370	6,094	22	455,0	1,8
5210	0,23744	96	699,636	2,379	6,116	22	453,4	1,8
5220	0,23840	97	702,015	2,388	6,138	22	451,9	1,8
5230	0,23937	97	704,403	2,398	6,161	22	450,4	1,8
5240	0,24034	97	706,801	2,408	6,183	22	448,8	1,8
5250	0,24131	98	709,209	2,418	6,205	22	447,3	1,8
5260	0,24229	99	711,627	2,428	6,227	22	445,8	1,8
5270	0,24328	99	714,055	2,438	6,250	22	444,3	1,8
5280	0,24427	100	716,493	2,448	6,272	22	442,8	1,8
5290	0,24527	101	718,941	2,458	6,294	22	441,3	1,8
5300	0,24628	101	721,399	2,468	6,317	22	439,8	1,8

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

653

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
5310	0,24729	102	723,867	2,479	6,340	23	438,3	1,5
5320	0,24831	103	726,346	2,489	6,363	23	436,8	1,5
5330	0,24934	104	728,835	2,499	6,386	23	435,3	1,5
5340	0,25038	104	731,334	2,510	6,409	24	433,8	1,4
5350	0,25142	105	733,844	2,519	6,433	23	432,4	1,5
5360	0,25247	106	736,363	2,530	6,456	23	430,9	1,4
5370	0,25353	107	738,893	2,541	6,479	23	429,5	1,4
5380	0,25460	108	741,434	2,551	6,502	23	428,1	1,4
5390	0,25568	109	743,985	2,562	6,525	24	426,7	1,5
5400	0,25677	110	746,547	2,57	6,549	24	425,2	1,4
5410	0,25787	110	749,12	2,58	6,573	23	423,8	1,4
5420	0,25897	111	751,70	2,60	6,596	24	422,4	1,4
5430	0,26008	112	754,30	2,61	6,620	23	421,0	1,4
5440	0,26120	112	756,91	2,61	6,643	24	419,6	1,4
5450	0,26232	113	759,52	2,63	6,667	24	418,2	1,4
5460	0,26344	113	762,15	2,64	6,691	24	416,8	1,4
5470	0,26457	114	764,79	2,65	6,715	24	415,4	1,4
5480	0,26571	113	767,44	2,67	6,739	24	414,0	1,4
5490	0,26684	115	770,11	2,67	6,763	25	412,6	1,3
5500	0,26799	116	772,78	2,69	6,788	24	411,3	1,4
5510	0,26915	116	775,47	2,69	6,812	24	409,9	1,3
5520	0,27031	117	778,16	2,71	6,836	25	408,6	1,3
5530	0,27148	118	780,87	2,72	6,861	24	407,3	1,3
5540	0,27266	119	783,59	2,74	6,885	25	406,0	1,3
5550	0,27385	121	786,33	2,74	6,910	25	404,7	1,3
5560	0,27506	121	789,07	2,76	6,935	25	403,4	1,3
5570	0,27627	122	791,83	2,77	6,960	25	402,1	1,3
5580	0,27749	123	794,60	2,78	6,985	25	400,8	1,3
5590	0,27872	124	797,38	2,79	7,010	25	399,5	1,3
5600	0,27996	125	800,17	2,81	7,035	25	398,2	1,3
5610	0,28121	125	802,98	2,82	7,060	25	396,9	1,3
5620	0,28246	126	805,80	2,83	7,085	25	395,6	1,3
5630	0,28372	127	808,63	2,84	7,111	25	394,4	1,3
5640	0,28499	127	811,47	2,86	7,136	25	393,1	1,2
5650	0,28626	128	814,33	2,87	7,162	26	391,9	1,2
5660	0,28754	129	817,20	2,88	7,188	25	390,7	1,3
5670	0,28883	129	820,08	2,90	7,213	26	389,4	1,2
5680	0,29012	130	822,98	2,90	7,239	26	388,2	1,2
5690	0,29142	131	825,88	2,92	7,265	25	387,0	1,2
5700	0,29273	132	828,80	2,94	7,290	27	385,8	1,2
5710	0,29405	133	831,74	2,95	7,317	26	384,6	1,2
5720	0,29538	134	834,69	2,96	7,343	26	383,4	1,2
5730	0,29672	135	837,65	2,97	7,369	26	382,2	1,2
5740	0,29807	135	840,62	2,99	7,395	26	381,0	1,1
5750	0,29942	136	843,61	3,00	7,421	26	379,9	1,2
5760	0,30078	137	846,61	3,01	7,447	27	378,7	1,1
5770	0,30215	138	849,62	3,03	7,474	26	377,6	1,2
5780	0,30353	139	852,65	3,04	7,500	26	376,4	1,1
5790	0,30492	140	855,69	3,05	7,526	27	375,3	1,2
5800	0,30632	141	858,75	3,07	7,553	27	374,1	1,1

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
5810	0,30773		861,82		7,580		373,0	
5820	0,30914	141	864,90	3,08	7,606	26	371,9	1,1
5830	0,31056	142	868,00	3,10	7,633	27	370,8	1,1
5840	0,31199	143	871,12	3,12	7,660	27	369,7	1,1
5850	0,31343	144	874,24	3,12	7,687	27	368,6	1,1
		145		3,14				
5860	0,31488		877,38		7,714		367,5	
5870	0,31634	146	880,53	3,15	7,741	27	366,4	1,1
5880	0,31781	147	883,70	3,17	7,769	28	365,3	1,1
5890	0,31928	147	886,89	3,18	7,796	27	364,2	1,1
5900	0,32076	148	890,09	3,20	7,824	28	363,2	1,0
		149		3,21		27		1,1
5910	0,32225		893,30		7,851		362,1	
5920	0,32375	150	896,53	3,23	7,878	27	361,1	1,0
5930	0,32526	151	899,78	3,25	7,906	28	360,0	1,1
5940	0,32678	152	903,04	3,26	7,934	28	359,0	1,0
5950	0,32831	153	906,31	3,27	7,962	28	358,0	1,0
		154		3,29				1,0
5960	0,32985		909,60		7,990		357,0	
5970	0,33139	154	912,91	3,31	8,018	28	356,0	1,0
5980	0,33294	155	916,23	3,32	8,046	28	355,0	1,0
5990	0,33450	156	919,57	3,34	8,075	29	354,1	0,9
6000	0,33606	156	922,92	3,35	8,104	29	353,1	1,0
		157		3,37		28		1,0
6010	0,33763		926,29		8,132		352,1	
6020	0,33922	159	929,67	3,38	8,161	29	351,1	1,0
6030	0,34081	159	933,07	3,40	8,189	28	350,2	0,9
6040	0,34242	161	936,49	3,42	8,218	29	349,2	1,0
6050	0,34403	161	939,92	3,43	8,247	29	348,2	1,0
		162		3,45		28		0,9
6060	0,34565		943,37		8,275		347,3	
6070	0,34728	163	946,84	3,47	8,304	29	346,4	0,9
6080	0,34892	164	950,32	3,48	8,333	29	345,5	0,9
6090	0,35057	165	953,81	3,49	8,362	29	344,6	0,9
6100	0,35223	166	957,33	3,52	8,391	29	343,7	0,9
		167		3,53		30		0,9
6110	0,35390		960,86		8,421		342,8	
6120	0,35557	167	964,41	3,55	8,450	29	341,9	0,9
6130	0,35725	168	967,97	3,56	8,479	29	341,0	0,9
6140	0,35894	169	971,55	3,58	8,509	30	340,1	0,9
6150	0,36064	170	975,15	3,60	8,538	29	339,2	0,9
		171		3,61		30		0,8
6160	0,36235		978,76		8,568		338,4	
6170	0,36407	172	982,39	3,63	8,597	29	337,5	0,9
6180	0,36580	173	986,04	3,65	8,627	30	336,6	0,9
6190	0,36753	173	989,71	3,67	8,657	30	335,8	0,8
6200	0,36927	174	993,40	3,69	8,686	29	335,0	0,8
		175		3,70		30		0,8
6210	0,37102		997,10		8,716		334,2	
6220	0,37278	176	1000,82	3,72	8,746	30	333,4	8
6230	0,37455	177	1004,55	3,73	8,776	30	332,6	8
6240	0,37633	178	1008,31	3,76	8,806	30	331,8	8
6250	0,37812	179	1012,08	3,77	8,837	31	331,0	8
		179		3,79		30		8
6260	0,37991		1015,87		8,867		330,2	
6270	0,38171	180	1019,68	3,81	8,897	30	329,4	8
6280	0,38352	181	1023,50	3,82	8,927	30	328,6	8
6290	0,38534	182	1027,35	3,85	8,957	30	327,9	7
6300	0,38717	183	1031,21	3,88	8,988	31	327,1	8
		184		3,88		30		8

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
6310	0,38901	185	1035,09		9,018		326,3	
6320	0,39086	186	1038,99	3,90	9,048	30	325,6	7
6330	0,39272	186	1042,91	3,92	9,079	31	324,8	8
6340	0,39458	186	1046,84	3,93	9,110	31	324,1	7
6350	0,39645	187	1050,80	3,96	9,141	31	323,3	8
		188		3,97		31		7
6360	0,39833		1054,77		9,172		322,6	
6370	0,40022	189	1058,77	4,00	9,203	31	321,9	7
6380	0,40212	190	1062,78	4,01	9,234	31	321,2	7
6390	0,40402	190	1066,81	4,03	9,266	32	320,5	7
6400	0,40593	191	1070,86	4,05	9,297	31	319,8	7
		192		4,07		31		7
6410	0,40785		1074,93		9,328		319,1	
6420	0,40978	193	1079,02	4,09	9,359	31	318,5	6
6430	0,41172	194	1083,12	4,10	9,391	32	317,8	7
6440	0,41367	195	1087,25	4,13	9,422	31	317,1	7
6450	0,41562	195	1091,40	4,15	9,454	32	316,4	7
		196		4,16		31		6
6460	0,41758		1095,56		9,485		315,8	
6470	0,41955	197	1099,75	4,19	9,517	32	315,1	7
6480	0,42153	198	1103,95	4,20	9,549	32	314,5	6
6490	0,42352	199	1108,18	4,23	9,581	32	313,8	7
6500	0,42552	200	1112,42	4,24	9,613	32	313,1	7
		201		4,27		32		6
6510	0,42753		1116,69		9,645		312,5	
6520	0,42955	202	1120,97	4,28	9,677	32	311,9	6
6530	0,43157	203	1125,28	4,31	9,710	33	311,2	7
6540	0,43360	203	1129,61	4,33	9,742	32	310,6	6
6550	0,43564	204	1133,95	4,34	9,774	32	310,0	6
		204		4,37		32		6
6560	0,43768		1138,32				309,4	
6570	0,43973	205	1142,71	4,39	9,839	32	308,8	6
6580	0,44179	206	1147,11	4,40	9,871	32	308,3	6
6590	0,44386	207	1151,54	4,43	9,903	32	307,7	6
6600	0,44593	207	1155,99	4,45	9,936	33	307,1	6
		208		4,47				6
6610	0,44801		1160,46		9,968		306,5	
6620	0,45010	209	1164,95	4,49	10,001		305,9	6
6630	0,45220	210	1169,46	4,51	10,034		305,4	5
6640	0,45431	211	1173,99	4,53	10,066		304,8	6
6650	0,45642	211	1178,55	4,56	10,099		304,2	6
		212		4,57				5
6660	0,45854		1183,12		10,132		303,7	
6670	0,46067	213	1187,72	4,60	10,165		303,1	6
6680	0,46281	214	1192,34	4,62	10,198	33	302,5	6
6690	0,46496	215	1196,98	4,64	10,231	33	302,0	5
6700	0,46712	216	1201,64	4,66	10,265	34	301,5	5
		216		4,68		33		5
6710	0,46928		1206,32		10,298		301,0	
6720	0,47145	217	1211,02	4,70	10,331	33	300,5	5
6730	0,47363	218	1215,75	4,73	10,364	33	299,9	6
6740	0,47582	219	1220,49	4,74	10,398	34	299,4	5
6750	0,47801	219	1225,26	4,77	10,431	33	298,9	5
		220		4,79		34		5
6760	0,48021		1230,05		10,465		298,4	
6770	0,48241	220	1234,87	4,82	10,498	33	297,9	5
6780	0,48462	221	1239,70	4,83	10,532	34	297,4	5
6790	0,48684	222	1244,56	4,86	10,565	33	296,9	5
6800	0,48906	223	1249,44	4,88	10,599	34	296,4	5
				4,90		34		5



<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
6810	0,49129		1254,34		10,633		295,9	
6820	0,49354		1259,27	4,93	10,667	34	295,5	4
6830	0,49579		1264,21	4,94	10,701	34	295,0	5
6840	0,49805	226	1269,18	4,97	10,734	33	294,5	5
6850	0,50031		1274,17	4,99	10,768	34	294,0	5
		227		5,02		34		5
6860	0,50258		1279,19		10,802		293,5	
6870	0,50486		1284,22	5,03	10,836	34	293,1	4
6880	0,50715		1289,28	5,06	10,870	34	292,6	5
6890	0,50945	230	1294,36	5,08	10,904	34	292,2	4
6900	0,51175	230	1299,47	5,11	10,939	35	291,7	5
		231		5,13		34		4
6910	0,51406		1304,60		10,973		291,3	
6920	0,51638	232	1309,75	5,15	11,007	34	290,8	5
6930	0,51870	232	1314,93	5,18	11,042	35	290,4	4
6940	0,52103	233	1320,13	5,20	11,076	34	289,9	5
6950	0,52337	234	1325,35	5,22	11,111	35	289,5	4
		235		5,25		34		5
6960	0,52572		1330,60		11,145		289,0	
6970	0,52807	235	1335,87	5,27	11,180	35	288,6	4
6980	0,53043	236	1341,16	5,29	11,215	35	288,2	4
6990	0,53279	236	1346,47	5,31	11,250	35	287,7	5
7000	0,53517	238	1351,81	5,34	11,285	35	287,3	4
				5,37		35		4
7010	0,53755		1357,18		11,320		286,9	
7020	0,53994	239	1362,56	5,38	11,355	35	286,5	4
7030	0,54233	239	1367,98	5,42	11,390	35	286,1	4
7040	0,54473	240	1373,41	5,43	11,425	35	285,7	4
7050	0,54713	240	1378,87	5,46	11,459	34	285,2	5
		241		5,48		35		4
7060	0,54954		1384,35		11,494		284,8	
7070	0,55196	242	1389,86	5,51	11,529	35	284,4	4
7080	0,55439	243	1395,39	5,53	11,564	35	284,0	4
7090	0,55682	243	1400,95	5,56	11,600	35	283,6	4
7100	0,55926	244	1406,53	5,58	11,635	35	283,2	4
		245		5,60		35		4
7110	0,56171		1412,13		11,670		282,8	
7120	0,56417	246	1417,76	5,63	11,705	35	282,4	4
7130	0,56663	246	1423,42	5,66	11,741	35	282,0	4
7140	0,56910	247	1429,10	5,68	11,776	35	281,6	4
7150	0,57157	247	1434,80	5,70	11,812	35	281,3	3
		248		5,73				4
7160	0,57405		1440,53		11,848		280,9	
7170	0,57654	249	1446,28	5,75	11,883		280,5	4
7180	0,57903	249	1452,06	5,78	11,919		280,1	4
7190	0,58153	250	1457,86	5,80	11,955		279,7	4
7200	0,58404	251	1463,69	5,83	11,991		279,3	4
		252		5,85				3
7210	0,58656		1469,54		12,027		279,0	
7220	0,58909	253	1475,42	5,88	12,063		278,6	4
7230	0,59162	253	1481,32	5,90	12,099		278,2	4
7240	0,59416	254	1487,25	5,93	12,135		277,8	4
7250	0,59670	254	1493,21	5,96	12,170		277,4	4
		255		5,98				4
7260	0,59925		1499,19		12,206		277,0	
7270	0,60181	256	1505,19	6,00	12,242		276,6	4
7280	0,60437	256	1511,22	6,03	12,278		276,2	4
7290	0,60694	257	1517,28	6,06	12,314		275,8	4
7300	0,60952	258	1523,36	6,08	12,351		275,5	3
		259		6,11				4

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

657

D	J	Diff.	A	Diff.	T	Diff.	u	Diff.
7310	0,61211	260	1529,47	6,13	12,387	36	275,1	4
7320	0,61471	260	1535,60	6,16	12,423	36	274,7	4
7330	0,61731	261	1541,76	6,19	12,459	37	274,3	4
7340	0,61992	262	1547,95	6,21	12,496	36	273,9	3
7350	0,62254	262	1554,16	6,24	12,532	37	273,6	4
7360	0,62516	263	1560,40	6,27	12,569	37	273,2	4
7370	0,62779	264	1566,67	6,29	12,606	37	272,8	3
7380	0,63043	264	1572,96	6,31	12,643	37	272,5	4
7390	0,63307	265	1579,27	6,35	12,680	37	272,1	4
7400	0,63572	265	1585,62	6,37	12,717	37	271,7	4
7410	0,63837	266	1591,99	6,40	12,754	37	271,3	3
7420	0,64103	267	1598,39	6,42	12,791	37	271,0	4
7430	0,64370	268	1604,81	6,45	12,828	37	270,6	3
7440	0,64638	269	1611,26	6,48	12,865	37	270,3	4
7450	0,64907	270	1617,74	6,50	12,902	37	269,9	4
7460	0,65177	271	1624,24	6,53	12,939	37	269,5	3
7470	0,65448	271	1630,77	6,56	12,976	37	269,2	4
7480	0,65719	272	1637,33	6,59	13,013	37	268,8	3
7490	0,65991	273	1643,92	6,61	13,050	37	268,5	4
7500	0,66264	273	1650,53	6,64	13,087	38	268,1	3
7510	0,66537	274	1657,17	6,67	13,125	37	267,8	4
7520	0,66811	275	1663,84	6,69	13,162	37	267,4	3
7530	0,67086	276	1670,53	6,72	13,199	37	267,1	4
7540	0,67362	276	1677,25	6,75	13,236	38	266,7	3
7550	0,67638	277	1684,00	6,78	13,274	38	266,4	4
7560	0,67915	277	1690,78	6,81	13,312	38	266,0	3
7570	0,68192	278	1697,59	6,83	13,350	38	265,7	4
7580	0,68470	279	1704,42	6,86	13,388	38	265,3	3
7590	0,68749	279	1711,28	6,89	13,426	37	265,0	4
7600	0,69028	280	1718,17	6,92	13,463	38	264,6	3
7610	0,69308	281	1725,09	6,94	13,501	38	264,3	4
7620	0,69589	282	1732,03	6,97	13,539	38	263,9	3
7630	0,69871	283	1739,00	7,01	13,577	38	263,6	4
7640	0,70154	283	1746,01	7,03	13,615	38	263,2	3
7650	0,70437	284	1753,04	7,06	13,653	38	262,9	4
7660	0,70721	285	1760,09	7,09	13,691	38	262,5	3
7670	0,71006	286	1767,18	7,11	13,729	38	262,2	4
7680	0,71292	287	1774,29	7,15	13,767	38	261,8	3
7690	0,71579	287	1781,44	7,17	13,805	38	261,5	4
7700	0,71866	288	1788,61	7,20	13,843	39	261,1	3
7710	0,72154	289	1795,81	7,23	13,882	38	260,8	4
7720	0,72443	290	1803,04	7,26	13,920	38	260,4	3
7730	0,72733	290	1810,30	7,29	13,958	39	260,1	4
7740	0,73023	291	1817,59	7,31	13,997	39	259,8	3
7750	0,73314	292	1824,90	7,35	14,036	38	259,4	3
7760	0,73606	292	1832,25	7,38	14,074	39	259,1	3
7770	0,73898	293	1839,63	7,40	14,113	39	258,8	4
7780	0,74191	294	1847,03	7,43	14,152	39	258,4	3
7790	0,74485	295	1854,46	7,47	14,191	38	258,1	4
7800	0,74780	295	1861,93	7,49	14,229	39	257,7	3

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
7810	0,75075	296	1869,42	7,52	14,268	39	257,4	3
7820	0,75371	297	1876,94	7,55	14,307	39	257,1	4
7830	0,75668	298	1884,49	7,59	14,346	39	256,7	3
7840	0,75966	298	1892,08	7,61	14,385	39	256,4	3
7850	0,76264	299	1899,69	7,64	14,424	39	256,1	3
7860	0,76563	300	1907,33	7,67	14,463	39	255,8	3
7870	0,76863	301	1915,00	7,70	14,502	39	255,5	4
7880	0,77164	302	1922,70	7,73	14,541	39	255,1	3
7890	0,77466	303	1930,43	7,76	14,580	39	254,8	3
7900	0,77769	303	1938,19	7,80	14,619	40	254,5	3
7910	0,78072	304	1945,99	7,82	14,659	39	254,2	3
7920	0,78376	305	1953,81	7,85	14,698	40	253,9	4
7930	0,78681	306	1961,66	7,88	14,738	40	253,5	3
7940	0,78987	306	1969,54	7,92	14,778	39	253,2	3
7950	0,79293	307	1977,46	7,94	14,817	40	252,9	3
7960	0,79600	308	1985,40	7,98	14,857	40	252,6	3
7970	0,79908	308	1993,38	8,01	14,897	39	252,3	4
7980	0,80216	309	2001,39	8,03	14,936	40	251,9	3
7990	0,80525	310	2009,42	8,07	14,976	39	251,6	3
8000	0,80835	310	2017,49	8,10	15,015	40	251,3	3
8010	0,81145	311	2025,59	8,13	15,055	40	251,0	3
8020	0,81456	312	2033,72	8,16	15,095	40	250,7	4
8030	0,81768	313	2041,88	8,19	15,135	39	250,3	3
8040	0,82081	314	2050,07	8,23	15,174	40	250,0	3
8050	0,82395	315	2058,30	8,25	15,214	40	249,7	3
8060	0,82710	316	2066,55	8,29	15,254	40	249,4	3
8070	0,83026	317	2074,84	8,32	15,294	40	249,1	4
8080	0,83343	318	2083,16	8,35	15,334	40	248,7	3
8090	0,83661	319	2091,51	8,38	15,374	40	248,4	3
8100	0,83980	319	2099,89	8,41	15,414	41	248,1	3
8110	0,84299	320	2108,30	8,45	15,455	40	247,8	3
8120	0,84619	321	2116,75	8,48	15,495	40	247,5	3
8130	0,84940	321	2125,23	8,51	15,535	41	247,2	4
8140	0,85261	322	2133,74	8,54	15,576	41	246,8	3
8150	0,85583	323	2142,28	8,57	15,617	40	246,5	3
8160	0,85906	324	2150,85	8,61	15,657	41	246,2	3
8170	0,86230	325	2159,46	8,64	15,698	41	245,9	3
8180	0,86555	326	2168,10	8,67	15,739	41	245,6	3
8190	0,86881	326	2176,77	8,71	15,780	40	245,3	3
8200	0,87207	327	2185,48	8,73	15,820	41	245,0	4
8210	0,87534	328	2194,21	8,77	15,861	41	244,6	3
8220	0,87862	329	2202,98	8,81	15,902	41	244,3	3
8230	0,88191	330	2211,79	8,83	15,943	41	244,0	3
8240	0,88521	331	2220,62	8,87	15,984	41	243,7	3
8250	0,88852	331	2229,49	8,90	16,025	41	243,4	3
8260	0,89183	332	2238,39	8,93	16,066	41	243,1	3
8270	0,89515	333	2247,32	8,97	16,107	41	242,8	3
8280	0,89848	334	2256,29	9,01	16,148	41	242,5	3
8290	0,90182	335	2265,30	9,03	16,189	41	242,2	3
8300	0,90517	336	2274,33	9,07	16,230	42	241,9	4

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

659

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
8310	0,90853	336	2283,40	9,10	16,272	41	241,5	3
8320	0,91189	337	2292,50	9,14	16,313	41	241,2	3
8330	0,91526	338	2301,64	9,17	16,354	42	240,9	3
8340	0,91864	339	2310,81	9,20	16,396	41	240,6	3
8350	0,92203	340	2320,01	9,24	16,437	42	240,3	3
8360	0,92543	341	2329,25	9,27	16,479	42	240,0	3
8370	0,92884	342	2338,52	9,30	16,521	42	239,7	3
8380	0,93226	343	2347,82	9,34	16,563	42	239,4	3
8390	0,93569	344	2357,16	9,38	16,605	42	239,1	3
8400	0,93913	344	2366,54	9,41	16,647	42	238,8	3
8410	0,94257	345	2375,95	9,44	16,689	42	238,5	3
8420	0,94602	346	2385,39	9,48	16,731	42	238,2	3
8430	0,94948	347	2394,87	9,51	16,773	42	237,9	3
8440	0,95295	348	2404,38	9,55	16,815	42	237,6	3
8450	0,95643	349	2413,93	9,58	16,857	43	237,3	3
8460	0,95992	349	2423,51	9,61	16,900	42	237,0	3
8470	0,96341	350	2433,12	9,66	16,942	42	236,7	3
8480	0,96691	351	2442,78	9,68	16,984	42	236,4	3
8490	0,97042	352	2452,46	9,72	17,026	42	236,1	3
8500	0,97394	353	2462,18	9,76	17,068	42	235,8	3
8510	0,97747	354	2471,94	9,79	17,110	43	235,5	3
8520	0,98101	355	2481,73	9,83	17,153	43	235,3	3
8530	0,98456	356	2491,56	9,86	17,196	43	235,0	3
8540	0,98812	357	2501,42	9,90	17,238	43	234,7	3
8550	0,99169	357	2511,32	9,94	17,281	42	234,4	3
8560	0,99526	358	2521,26	9,97	17,323	43	234,1	3
8570	0,99884	359	2531,23	10,00	17,366	43	233,8	3
8580	1,00243	360	2541,23	10,06	17,409	42	233,5	3
8590	1,00603	361	2551,28	10,08	17,451	43	233,2	3
8600	1,00964	362	2561,36	10,11	17,494	43	232,9	3
8610	1,01326	363	2571,47	10,15	17,537	43	232,6	3
8620	1,01689	364	2581,62	10,19	17,580	44	232,4	3
8630	1,02053	365	2591,81	10,22	17,624	43	232,1	3
8640	1,02418	366	2602,03	10,26	17,667	43	231,8	3
8650	1,02784	366	2612,29	10,30	17,710	44	231,5	3
8660	1,03150	367	2622,59	10,33	17,754	43	231,2	3
8670	1,03517	368	2632,92	10,37	17,797	43	230,9	3
8680	1,03885	369	2643,29	10,41	17,840	44	230,6	3
8690	1,04254	370	2653,70	10,44	17,884	43	230,3	3
8700	1,04624	371	2664,14	10,48	17,927	44	230,0	3
8710	1,04995	372	2674,62	10,52	17,971	44	229,7	3
8720	1,05367	373	2685,14	10,56	18,015	43	229,5	3
8730	1,05740	374	2695,70	10,59	18,058	44	229,2	3
8740	1,06114	375	2706,29	10,63	18,102	43	228,9	3
8750	1,06489	376	2716,92	10,67	18,145	44	228,6	3
8760	1,06865	377	2727,59	10,70	18,189	44	228,3	3
8770	1,07242	378	2738,29	10,75	18,233	44	228,0	3
8780	1,07620	378	2749,04	10,78	18,277	44	227,7	3
8790	1,07998	379	2759,82	10,82	18,321	43	227,5	3
8800	1,08377	380	2770,64	10,85	18,364	44	227,2	3

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
8810	1,08757	881	2781,49	10,90	18,408	44	226,9	3
8820	1,09188	882	2792,39	10,93	18,452	45	226,6	3
8830	1,09520	883	2803,32	10,97	18,497	44	226,3	3
8840	1,09903	884	2814,29	11,01	18,541	44	226,0	3
8850	1,10287	885	2825,30	11,06	18,585	44	225,8	3
8860	1,10672	886	2836,35	11,09	18,629	45	225,5	3
8870	1,11059	887	2847,44	11,12	18,674	44	225,2	3
8880	1,11447	888	2858,56	11,17	18,718	45	224,9	3
8890	1,11836	889	2869,73	11,20	18,763	44	224,6	3
8900	1,12225	890	2880,93	11,24	18,807	45	224,3	3
8910	1,12615	891	2892,17	11,28	18,852	45	224,1	3
8920	1,13006	892	2903,45	11,32	18,897	45	223,8	3
8930	1,13398	893	2914,77	11,36	18,942	44	223,5	3
8940	1,13791	894	2926,13	11,40	18,986	45	223,2	3
8950	1,14185	895	2937,53	11,44	19,031	45	222,9	3
8960	1,14580	896	2948,97	11,48	19,076	45	222,6	3
8970	1,14976	897	2960,45	11,51	19,121	45	222,4	3
8980	1,15373	898	2971,96	11,56	19,166	45	222,1	3
8990	1,15771	400	2983,52	11,60	19,211	45	221,8	3
9000	1,16171	400	2995,12	11,63	19,256	45	221,5	3
9010	1,16571	401	3006,75	11,68	19,301	46	221,3	3
9020	1,16972	402	3018,43	11,72	19,347	45	221,0	3
9030	1,17374	403	3030,15	11,76	19,392	46	220,7	3
9040	1,17777	404	3041,91	11,79	19,438	45	220,4	3
9050	1,18181	405	3053,70	11,84	19,483	46	220,1	3
9060	1,18586	406	3065,54	11,88	19,529	45	219,9	3
9070	1,18992	407	3077,42	11,92	19,574	46	219,6	3
9080	1,19399	408	3089,34	11,96	19,620	45	219,3	3
9090	1,19808	410	3101,30	12,00	19,665	45	219,0	3
9100	1,20218	410	3113,30	12,06	19,710	46	218,8	3
9110	1,20628	411	3125,35	12,08	19,756	46	218,5	3
9120	1,21039	412	3137,43	12,12	19,802	46	218,2	3
9130	1,21451	413	3149,55	12,17	19,848	46	217,9	3
9140	1,21864	414	3161,72	12,21	19,894	46	217,7	3
9150	1,22278	415	3173,93	12,24	19,940	46	217,4	3
9160	1,22693	417	3186,17	12,29	19,986	46	217,1	3
9170	1,23110	418	3198,46	12,34	20,032	46	216,9	3
9180	1,23528	419	3210,80	12,37	20,078	46	216,6	3
9190	1,23947	420	3223,17	12,42	20,124	46	216,3	3
9200	1,24367	421	3235,59	12,46	20,170	47	216,1	3
9210	1,24788	422	3248,04	12,50	20,217	46	215,8	3
9220	1,25210	423	3260,54	12,55	20,263	46	215,5	3
9230	1,25633	424	3273,09	12,58	20,309	47	215,3	3
9240	1,26057	425	3285,67	12,63	20,356	46	215,0	3
9250	1,26482	426	3298,30	12,67	20,402	47	214,7	3
9260	1,26908	427	3310,97	12,71	20,449	46	214,5	3
9270	1,27335	427	3323,68	12,75	20,495	47	214,2	3
9280	1,27762	428	3336,43	12,80	20,542	47	213,9	3
9290	1,28190	430	3349,23	12,84	20,589	47	213,7	3
9300	1,28620	431	3362,07	12,89	20,636	48	213,4	3

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
9310	1,29051	482	3374,96	12,92	20,684	47	213,2	3
9320	1,29483	483	3387,88	12,97	20,731	47	212,9	3
9330	1,29916	484	3400,85	13,02	20,778	47	212,6	2
9340	1,30350	485	3413,87	13,05	20,835	47	212,4	3
9350	1,30785	487	3426,92	13,10	20,872	47	212,1	2
9360	1,31222	488	3440,02	13,15	20,919	47	211,9	3
9370	1,31660	489	3453,17	13,18	20,966	47	211,6	2
9380	1,32099	440	3466,35	13,24	21,013	47	211,4	3
9390	1,32539	441	3479,59	13,27	21,060	47	211,1	3
9400	1,32980	442	3492,86	13,32	21,107	48	210,8	2
9410	1,33422	443	2506,18	13,37	21,155	47	210,6	3
9420	1,33865	444	3519,55	13,41	21,202	48	210,3	2
9430	1,34309	445	3532,96	13,45	21,250	48	210,1	3
9440	1,34754	446	3546,41	13,50	21,298	48	209,8	3
9450	1,35200	447	3559,91	13,54	21,346	48	209,5	2
9460	1,35647	448	3573,45	13,59	21,394	48	209,3	3
9470	1,36095	449	3587,04	13,63	21,442	48	209,0	2
9480	1,36544	450	3600,67	13,67	21,490	47	208,8	3
9490	1,36994	453	3614,34	13,73	21,537	48	208,5	3
9500	1,37447	453	3628,07	13,76	21,585	49	208,3	3
9510	1,37900	454	3641,83	13,82	21,634	48	208,0	2
9520	1,38354	455	3655,65	13,85	21,682	48	207,8	3
9530	1,38809	456	3669,50	13,91	21,730	48	207,5	2
9540	1,39265	457	3683,41	13,95	21,778	49	207,3	3
9550	1,39722	458	3697,36	13,99	21,827	48	207,0	2
9560	1,40180	459	3711,35	14,04	21,875	48	206,8	3
9570	1,40639	460	3725,39	14,09	21,923	48	206,5	2
9580	1,41099	461	3739,48	14,13	21,971	49	206,3	3
9590	1,41560	462	3753,61	14,18	22,020	48	206,0	2
9600	1,42022	464	3767,79	14,23	22,068	49	205,8	3
9610	1,42486	465	3782,02	14,27	22,117	49	205,5	2
9620	1,42951	466	3796,29	14,32	22,166	49	205,3	3
9630	1,43417	467	3810,61	14,36	22,215	49	205,0	2
9640	1,43884	468	3824,97	14,41	22,264	48	204,8	3
9650	1,44352	469	3839,38	14,46	22,312	49	204,5	2
9660	1,44821	471	3853,84	14,51	22,361	49	204,3	3
9670	1,45292	472	3868,35	14,55	22,410	49	204,0	2
9680	1,45764	473	3882,90	14,60	22,459	49	203,8	3
9690	1,46237	474	3897,50	14,65	22,508	49	203,5	2
9700	1,46711	476	3912,15	14,69	22,557	50	203,3	3
9710	1,47187	477	3926,84	14,75	22,607	49	203,0	2
9720	1,47664	478	3941,59	14,79	22,656	50	202,8	3
9730	1,48142	479	3956,38	14,83	22,706	49	202,5	2
9740	1,48621	480	3971,21	14,89	22,755	49	202,3	3
9750	1,49101	481	3986,10	14,94	22,804	49	202,0	2
9760	1,49582	482	4001,04	14,98	22,853	50	201,8	3
9770	1,50064	483	4016,02	15,02	22,903	50	201,5	2
9780	1,50547	484	4031,04	15,06	22,953	49	201,3	3
9790	1,51031	485	4046,13	15,12	23,002	50	201,0	2
9800	1,51516	487	4061,25	15,18	23,052	50	200,8	3

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
9810	1,52003		4076,43		23,102		200,5	
9820	1,52491	488	4091,65	15,22	23,152	50	200,3	2
9830	1,52980	489	4106,93	15,28	23,202	50	200,0	3
9840	1,53471	491	4122,25	15,32	23,252	50	199,8	2
9850	1,53963	492	4137,62	15,37	23,302	50	199,5	3
		493		15,42		50		2
9860	1,54456		4153,04		23,352		199,3	
9870	1,54951	495	4168,51	15,47	23,403	51	199,0	3
9880	1,55447	496	4184,03	15,52	23,453	50	198,8	2
9890	1,55944	497	4199,60	15,57	23,503	50	198,5	3
9900	1,56443	499	4215,22	15,62	23,553	50	198,3	2
		500		15,67		51		3
9910	1,56943		4230,89		23,604		198,0	
9920	1,57444	501	4246,61	15,72	23,654	50	197,8	2
9930	1,57946	502	4262,38	15,77	23,705	51	197,5	3
9940	1,58449	503	4278,20	15,82	23,755	50	197,3	2
9950	1,58953	504	4294,07	15,87	23,806	51	197,1	3
		505		15,92		51		
9960	1,59458		4309,99		23,857		196,8	
9970	1,59964	506	4325,96	15,97	23,908	51	196,6	2
9980	1,60472	508	4341,98	16,02	23,958	50	196,4	3
9990	1,60981	509	4358,06	16,08	24,009	51	196,1	2
10000	1,61491	510	4374,18	16,12	24,060	51	195,9	3
		512		16,17		51		
10010	1,62003		4390,35		24,111		195,7	
10020	1,62516	513	4406,58	16,23	24,163	52	195,4	3
10030	1,63030	514	4422,86	16,28	24,214	51	195,2	2
10040	1,63545	515	4439,19	16,33	24,265	51	194,9	3
10050	1,64062	517	4455,57	16,38	24,316	51	194,7	2
		518		16,43		52		3
10060	1,64580		4472,00		24,368		194,4	
10070	1,65099	519	4488,48	16,48	24,419	51	194,2	2
10080	1,65619	520	4505,02	16,54	24,471	52	194,0	3
10090	1,66141	522	4521,61	16,59	24,522	51	193,7	2
10100	1,66664	523	4538,25	16,64	24,574	52	193,5	3
		525		16,69		52		
10110	1,67189		4554,94		24,626		193,2	
10120	1,67715	526	4571,69	16,75	24,678	52	193,0	2
10130	1,68242	527	4588,48	16,79	24,730	52	192,7	3
10140	1,68770	528	4605,33	16,85	24,781	51	192,5	2
10150	1,69300	530	4622,24	16,91	24,833	52	192,3	3
		531		16,96		52		
10160	1,69831		4639,20		24,885		192,0	
10170	1,70363	532	4656,21	17,01	24,937	52	191,8	2
10180	1,70896	533	4673,27	17,06	24,989	52	191,6	3
10190	1,71431	535	4690,38	17,11	25,041	52	191,3	2
10200	1,71967	536	4707,55	17,17	25,094	53	191,1	3
		538		17,23		52		
10210	1,72505		4724,78		25,146		190,9	
10220	1,73044	539	4742,05	17,27	25,198	53	190,6	2
10230	1,73585	541	4759,39	17,34	25,251	53	190,4	3
10240	1,74127	542	4776,77	17,38	25,303	53	190,2	2
10250	1,74670	543	4794,21	17,44	25,356	53	189,9	3
		544		17,49		53		
10260	1,75214		4811,70		25,409		189,7	
10270	1,75760	546	4829,25	17,55	25,462	53	189,5	2
10280	1,76307	547	4846,86	17,61	25,515	53	189,2	3
10290	1,76855	548	4864,51	17,65	25,568	53	189,0	2
10300	1,77404	549	4882,23	17,72	25,621	53	188,8	3
		551		17,77		54		

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

663

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
10310	1,77955	552	4900,00	17,82	25,675	53	188,5	2
10320	1,78507	554	4917,82	17,88	25,728	53	188,3	2
10330	1,79061	555	4935,70	17,93	25,781	53	188,1	3
10340	1,79616	556	4953,63	17,99	25,834	54	187,8	2
10350	1,80172	558	4971,62	18,05	25,888	53	187,6	2
10360	1,80730	559	4989,67	18,10	25,941	53	187,4	3
10370	1,81289	561	5007,77	18,15	25,994	53	187,1	2
10380	1,81850	562	5025,92	18,22	26,047	53	186,9	2
10390	1,82412	564	5044,14	18,27	26,100	54	186,7	3
10400	1,82976	566	5062,41	18,32	26,154	54	186,4	2
10410	1,83541	566	5080,73	18,38	26,208	55	186,2	2
10420	1,84107	567	5099,11	18,44	26,261	54	186,0	2
10430	1,84674	569	5117,55	18,49	26,315	54	185,8	3
10440	1,85243	571	5136,04	18,56	26,369	54	185,5	2
10450	1,85814	572	5154,60	18,61	26,423	54	185,3	2
10460	1,86386	573	5173,21	18,67	26,477	54	185,1	2
10470	1,86959	575	5191,88	18,72	26,531	54	184,9	3
10480	1,87534	576	5210,60	18,79	26,585	54	184,6	2
10490	1,88110	578	5229,39	18,84	26,639	54	184,4	2
10500	1,88688	580	5248,23	18,89	26,693	54	184,2	2
10510	1,89268	581	5267,12	18,96	26,747	55	184,0	3
10520	1,89849	582	5286,08	19,01	26,802	54	183,7	2
10530	1,90431	582	5305,09	19,06	26,856	55	183,5	2
10540	1,91013	584	5324,17	19,13	26,911	55	183,3	2
10550	1,91597	585	5343,30	19,19	26,966	54	183,1	3
10560	1,92182	587	5362,49	19,24	27,020	55	182,8	2
10570	1,92769	589	5381,73	19,31	27,075	55	182,6	2
10580	1,93358	590	5401,04	19,36	27,130	55	182,4	2
10590	1,93948	591	5420,40	19,43	27,185	55	182,2	2
10600	1,94539	592	5439,83	19,48	27,240	55	182,0	2
10610	1,95131	594	5459,31	19,54	27,295	55	181,8	3
10620	1,95725	595	5478,85	19,61	27,350	55	181,5	2
10630	1,96320	597	5498,46	19,66	27,406	55	181,3	2
10640	1,96917	598	5518,12	19,72	27,461	55	181,1	2
10650	1,97515	600	5537,84	19,78	27,516	55	180,9	2
10660	1,98115	601	5557,62	19,84	27,571	55	180,7	2
10670	1,98716	602	5577,46	19,91	27,626	55	180,5	3
10680	1,99319	605	5597,37	19,96	27,681	55	180,2	2
10690	1,99924	606	5617,33	20,02	27,737	55	180,0	2
10700	2,00530	606	5637,35	20,08	27,792	55	179,8	2
10710	2,01138	609	5657,43	20,15	27,848	55	179,6	2
10720	2,01747	610	5677,58	20,20	27,904	55	179,4	3
10730	2,02357	612	5697,78	20,27	27,960	55	179,1	2
10740	2,02969	613	5718,05	20,33	28,016	55	178,9	2
10750	2,03582	615	5738,38	20,39	28,072	55	178,7	2
10760	2,04197	616	5758,77	20,45	28,128	55	178,5	2
10770	2,04813	618	5779,22	20,51	28,184	55	178,3	3
10780	2,05431	620	5799,73	20,57	28,240	55	178,0	2
10790	2,06051	621	5820,30	20,64	28,296	55	177,8	2
10800	2,06672	622	5840,94	20,70	28,352	55	177,6	2



Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
10810	2,07295	624	5861,64	20,76	28,408	57	177,4	2
10820	2,07919	635	5882,40	20,82	28,465	57	177,2	2
10830	2,08544	637	5903,22	20,89	28,521	57	177,0	2
10840	2,09171	639	5924,11	20,94	28,578	56	176,7	2
10850	2,09800	630	5945,05	21,02	28,634	57	176,5	2
10860	2,10430	632	5966,07	21,07	28,691	57	176,3	2
10870	2,11062	633	5987,14	21,14	28,748	57	176,1	2
10880	2,11695	635	6008,28	21,20	28,805	57	175,8	2
10890	2,12330	637	6029,48	21,26	28,862	57	175,6	2
10900	2,12967	638	6050,74	21,33	28,919	58	175,4	2
10910	2,13605	640	6072,07	21,40	28,977	57	175,2	2
10920	2,14245	642	6093,47	21,45	29,034	57	175,0	2
10930	2,14887	643	6114,92	21,52	29,091	57	174,8	2
10940	2,15530	644	6136,44	21,59	29,148	58	174,6	2
10950	2,16174	646	6158,03	21,65	29,206	57	174,4	2
10960	2,16820	647	6179,68	21,71	29,263	57	174,1	2
10970	2,17467	648	6201,39	21,78	29,320	57	173,9	2
10980	2,18115	650	6223,17	21,85	29,377	57	173,7	2
10990	2,18765	651	6245,02	21,90	29,434	58	173,5	2
11000	2,19416	653	6266,92	21,98	29,492	57	173,3	2
11010	2,20069	655	6288,90	22,04	29,549	58	173,0	2
11020	2,20724	657	6310,94	22,10	29,607	58	172,8	2
11030	2,21381	658	6333,04	22,17	29,665	58	172,6	2
11040	2,22039	660	6355,21	22,24	29,723	58	172,4	2
11050	2,22699	662	6377,45	22,30	29,781	58	172,2	2
11060	2,23361	664	6399,75	22,37	29,839	58	172,0	2
11070	2,24025	666	6422,12	22,44	29,897	58	171,8	2
11080	2,24691	668	6444,56	22,50	29,955	59	171,6	2
11090	2,25359	669	6467,06	22,57	30,014	58	171,4	2
11100	2,26028	670	6489,63	22,64	30,072	58	171,2	2
11110	2,26698	672	6512,27	22,70	30,130	59	171,0	2
11120	2,27370	673	6534,97	22,77	30,189	58	170,8	2
11130	2,28043	675	6557,74	22,84	30,247	59	170,6	2
11140	2,28718	676	6580,58	22,91	30,306	59	170,4	2
11150	2,29394	678	6603,49	22,97	30,365	59	170,2	2
11160	2,30072	680	6626,46	23,04	30,424	59	170,0	2
11170	2,30752	681	6649,50	23,11	30,483	59	169,8	2
11180	2,31433	683	6672,61	23,18	30,542	59	169,6	2
11190	2,32116	684	6695,79	23,24	30,601	59	169,4	2
11200	2,32800	686	6719,03	23,32	30,660	60	169,1	2
11210	2,33486	688	6742,35	23,39	30,720	59	168,9	2
11220	2,34174	690	6765,73	23,45	30,779	59	168,7	2
11230	2,34864	691	6789,18	23,52	30,838	60	168,5	2
11240	2,35555	693	6812,70	23,59	30,898	59	168,3	2
11250	2,36248	695	6836,29	23,66	30,957	60	168,1	2
11260	2,36943	697	6859,95	23,73	31,017	59	167,9	2
11270	2,37640	699	6883,68	23,80	31,076	60	167,7	2
11280	2,38339	700	6907,48	23,87	31,136	59	167,5	2
11290	2,39039	702	6931,35	23,94	31,195	60	167,3	2
11300	2,39741	704	6955,29	24,01	31,255	60	167,0	2

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

665

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
11310	2,40445	706	6979,80	24,08	31,315	60	166,8	2
11320	2,41151	707	7003,88	24,15	31,375	60	166,6	2
11330	2,41858	709	7027,53	24,22	31,435	60	166,4	2
11340	2,42567	711	7051,75	24,29	31,495	60	166,2	2
11350	2,43278	713	7076,04	24,36	31,555	61	166,0	2
11360	2,43991	714	7100,40	24,44	31,616	60	165,8	2
11370	2,44705	716	7124,84	24,51	31,676	60	165,6	2
11380	2,45421	718	7149,35	24,57	31,736	60	165,4	2
11390	2,46139	719	7173,92	24,65	31,796	61	165,2	2
11400	2,46858	721	7198,57	24,73	31,857	60	165,0	2
11410	2,47579	723	7223,30	24,79	31,917	61	164,8	2
11420	2,48302	725	7248,09	24,87	31,978	61	164,6	2
11430	2,49027	726	7272,96	24,94	32,039	61	164,4	2
11440	2,49753	728	7297,90	25,01	32,100	61	164,2	2
11450	2,50481	730	7322,91	25,08	32,161	61	164,0	2
11460	2,51211	732	7347,99	25,16	32,222	61	163,8	2
11470	2,51943	734	7373,15	25,23	32,283	61	163,6	2
11480	2,52677	736	7398,38	25,30	32,344	61	163,4	2
11490	2,53413	737	7423,68	25,38	32,405	62	163,2	2
11500	2,54150	739	7449,06	25,45	32,467	61	163,0	2
11510	2,54889	740	7474,51	25,53	32,528	61	162,8	2
11520	2,55629	742	7500,04	25,60	32,589	62	162,6	2
11530	2,56371	744	7525,64	25,68	32,651	61	162,4	2
11540	2,57115	746	7551,32	25,74	32,712	62	162,2	2
11550	2,57861	748	7577,06	25,83	32,775	61	162,0	2
11560	2,58609	750	7602,89	25,90	32,835	62	161,8	2
11570	2,59359	752	7628,79	25,97	32,897	62	161,6	2
11580	2,60112	754	7654,76	26,05	32,959	62	161,4	2
11590	2,60866	756	7680,81	26,12	33,021	63	161,2	2
11600	2,61622	757	7706,93	26,20	33,084	62	161,0	2
11610	2,62379	759	7733,13	26,28	33,146	62	160,8	2
11620	2,63138	761	7759,41	26,35	33,208	63	160,6	1
11630	2,63899	763	7785,76	26,43	33,271	62	160,5	2
11640	2,64662	764	7812,19	26,50	33,333	63	160,3	2
11650	2,65426	765	7838,69	26,58	33,396	62	160,1	2
11660	2,66191	768	7865,27	26,66	33,458	63	159,9	2
11670	2,66959	770	7891,93	26,74	33,521	62	159,7	2
11680	2,67729	772	7918,67	26,81	33,583	63	159,5	2
11690	2,68501	774	7945,48	26,89	33,646	63	159,3	2
11700	2,69275	776	7972,37	26,96	33,709	63	159,1	2
11710	2,70051	778	7999,33	27,05	33,772	64	158,9	2
11720	2,70829	780	8026,38	27,13	33,836	63	158,7	2
11730	2,71609	782	8053,50	27,20	33,899	63	158,5	2
11740	2,72391	783	8080,70	27,28	33,962	64	158,3	2
11750	2,73174	785	8107,98	27,35	34,026	63	158,1	2
11760	2,73959	787	8135,33	27,44	34,089	63	157,9	1
11770	2,74746	789	8162,77	27,51	34,152	64	157,8	2
11780	2,75535	791	8190,23	27,60	34,216	63	157,6	2
11790	2,76326	792	8217,83	27,67	34,279	63	157,4	2
11800	2,77119	795	8245,55	27,75	34,342	63	157,2	2

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
11810	2,77914		8273,30		34,405		157,0	
11820	2,78711	797	8301,13	27,83	34,469	64	156,8	2
11830	2,79510	799	8329,04	27,91	34,532	63	156,6	2
11840	2,80311	801	8357,03	27,99	34,596	64	156,4	2
11850	2,81114	803	8385,10	28,07	34,660	64	156,2	2
		805		28,16		64		2
11860	2,81919		8413,26		34,724		156,0	
11870	2,82726	807	8441,49	28,23	34,789	65	155,8	2
11880	2,83535	809	8469,80	28,31	34,853	64	155,6	2
11890	2,84345	810	8498,19	28,39	34,917	64	155,4	2
11900	2,85157	812	8526,67	28,48	34,982	65	155,2	2
		815		28,56		64		1
11910	2,85972		8555,23		35,046		155,1	
11920	2,86789	817	8583,86	28,63	35,111	65	154,9	2
11930	2,87608	819	8612,58	28,72	35,175	64	154,7	2
11940	2,88429	821	8641,39	28,81	35,240	65	154,5	2
11950	2,89252	823	8670,27	28,88	35,305	65	154,3	2
		825		28,97		65		2
11960	2,90077		8699,24		35,370		154,1	
11970	2,90904	827	8728,29	29,05	35,435	65	153,9	2
11980	2,91733	829	8757,42	29,13	35,500	65	153,7	2
11990	2,92564	831	8786,63	29,21	35,565	65	153,5	2
12000	2,93396	833	8815,93	29,30	35,630	65	153,3	2
		835		29,38		66		2
12010	2,94231		8845,31		35,696		153,1	
12020	2,95068	837	8874,78	29,47	35,761	65	153,0	1
12030	2,95907	839	8904,32	29,54	35,826	65	152,8	2
12040	2,96748	841	8933,96	29,64	35,892	66	152,6	2
12050	2,97591	843	8963,67	29,71	35,957	66	152,4	2
		845		29,81		66		2
12060	2,98436		8993,48		36,023		152,2	
12070	2,99284	848	9023,36	29,88	36,088	65	152,0	2
12080	3,00134	850	9053,33	29,97	36,154	66	151,9	1
12090	3,00986	852	9083,39	30,06	36,220	66	151,7	2
12100	3,01840	854	9113,53	30,14	36,286	66	151,5	2
		856		30,23		66		2
12110	3,02696		9143,76		36,352		151,3	
12120	3,03554	858	9174,07	30,31	36,419	67	151,1	2
12130	3,04414	860	9204,47	30,40	36,485	66	151,0	1
12140	3,05276	862	9234,95	30,48	36,551	66	150,8	2
12150	3,06140	864	9265,52	30,57	36,618	67	150,6	2
		866		30,66		66		2
12160	3,07006		9296,18		36,684		150,4	
12170	3,07874	868	9326,92	30,74	36,750	66	150,3	1
12180	3,08743	869	9357,76	30,84	36,817	67	150,1	2
12190	3,09614	871	9388,67	30,91	36,883	66	149,9	2
12200	3,10487	873	9419,68	31,01	36,950	67	149,7	2
		876		31,09		67		2
12210	3,11363		9450,77		37,017		149,5	
12220	3,12241	878	9481,95	31,18	37,084	67	149,4	1
12230	3,13121	880	9513,22	31,27	37,151	67	149,2	2
12240	3,14003	882	9544,57	31,36	37,218	67	149,0	2
12250	3,14888	885	9576,02	31,45	37,286	68	148,8	2
		887		31,53		67		1
12260	3,15775		9607,55		37,353		148,7	
12270	3,16664	889	9639,17	31,62	37,420	67	148,5	2
12280	3,17555	891	9670,89	31,72	37,487	67	148,3	2
12290	3,18448	893	9702,69	31,80	37,555	68	148,1	2
12300	3,19344	896	9734,58	31,89	37,622	67	147,9	2
		898		31,97		68		1

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
12310	3,20242	900	9766,55	33,07	37,690	68	147,8	2
12320	3,21142	902	9798,62	33,16	37,758	67	147,6	2
12330	3,22044	904	9830,78	33,25	37,825	68	147,4	2
12340	3,22948	907	9863,03	33,34	37,893	68	147,2	2
12350	3,23855	909	9895,87	33,43	37,961	68	147,0	1
12360	3,24764	911	9927,80	33,53	38,029	68	146,9	2
12370	3,25675	913	9960,33	33,61	38,097	68	146,7	2
12380	3,26588	915	9992,94	33,70	38,165	69	146,5	2
12390	3,27503	917	10025,64	33,80	38,234	68	146,3	2
12400	3,28420	920	10058,44	33,89	38,302	68	146,1	1
12410	3,29340	922	10091,33	33,98	38,370	69	146,0	2
12420	3,30262	924	10124,31	33,07	38,439	69	145,8	2
12430	3,31186	926	10157,38	33,16	38,508	68	145,6	2
12440	3,32112	929	10190,54	33,26	38,576	69	145,4	2
12450	3,33041	931	10223,80	33,35	38,645	69	145,2	1
12460	3,33972	934	10257,15	33,45	38,714	69	145,1	2
12470	3,34906	936	10290,60	33,53	38,783	69	144,9	2
12480	3,35842	938	10324,13	33,64	38,852	69	144,7	2
12490	3,36780	941	10357,77	33,73	38,921	70	144,5	2
12500	3,37721	943	10391,49	33,82	38,991	69	144,3	2
12510	3,38664	945	10425,31	33,91	39,060	69	144,1	1
12520	3,39609	947	10459,22	34,01	39,129	70	144,0	2
12530	3,40556	949	10493,23	34,10	39,199	69	143,8	2
12540	3,41505	952	10527,23	34,20	39,268	70	143,6	1
12550	3,42457	953	10561,53	34,30	39,338	69	143,5	2
12560	3,43410	956	10595,83	34,38	39,407	70	143,3	2
12570	3,44366	958	10630,21	34,49	39,477	70	143,1	1
12580	3,45324	960	10664,70	34,58	39,547	70	143,0	1
12590	3,46284	963	10699,28	34,68	39,617	70	142,8	2
12600	3,47247	965	10733,96	34,77	39,687	71	142,6	1
12610	3,48212	967	10768,73	34,87	39,758	70	142,5	2
12620	3,49179	969	10803,60	34,96	39,828	70	142,3	2
12630	3,50148	971	10838,56	35,07	39,898	70	142,1	1
12640	3,51119	974	10873,63	35,16	39,968	71	142,0	2
12650	3,52093	977	10908,79	35,26	40,039	70	141,8	2
12660	3,53070	979	10944,05	35,35	40,109	71	141,6	1
12670	3,54049	981	10979,40	35,45	40,180	70	141,5	2
12680	3,55030	984	11014,86	35,55	40,250	71	141,3	2
12690	3,56014	986	11050,41	35,65	40,321	71	141,1	1
12700	3,57000	989	11086,06	35,75	40,392	71	141,0	2
12710	3,57989	991	11121,81	35,85	40,463	71	140,8	2
12720	3,58980	993	11157,66	35,94	40,534	71	140,6	1
12730	3,59973	996	11193,60	36,05	40,605	72	140,5	2
12740	3,60969	998	11229,65	36,15	40,677	71	140,3	2
12750	3,61967	1000	11265,80	36,24	40,748	71	140,1	1
12760	3,62967	1002	11302,04	36,35	40,819	72	140,0	2
12770	3,63969	1004	11338,39	36,45	40,891	71	139,8	2
12780	3,64973	1007	11374,84	36,55	40,962	72	139,6	1
12790	3,65980	1009	11411,39	36,64	41,034	72	139,5	2
12800	3,66989	1012	11448,03	36,75	41,106	72	139,3	2

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
12810	3,68001		11484,78		41,178		139,1	
12820	3,69015	1014	11521,64	36,86	41,250	72	139,0	1
12830	3,70032	1017	11558,59	36,95	41,322	72	138,8	2
12840	3,71051	1019	11595,64	37,05	41,395	73	138,6	2
12850	3,72073	1022	11632,80	37,16	41,467	73	138,4	2
		1025		37,26		73		1
12860	3,75098		11670,06		41,539		138,3	
12870	3,74126	1028	11707,42	37,36	41,611	72	138,1	2
12880	3,75156	1030	11744,88	37,46	41,684	73	137,9	2
12890	3,76189	1033	11782,45	37,57	41,756	73	137,7	2
12900	3,77225	1036	11820,12	37,67	41,829	73	137,6	1
		1038		37,77		73		2
12910	3,78263		11857,89		41,901		137,4	
12920	3,79303	1040	11895,77	37,88	41,974	73	137,2	2
12930	3,80346	1043	11933,76	37,99	42,047	73	137,1	1
12940	3,81391	1045	11971,84	38,08	42,120	73	136,9	2
12950	3,82439	1048	12010,03	38,19	42,193	73	136,7	2
		1050		38,30		74		2
12960	3,83489		12048,33		42,267		136,5	
12970	3,84542	1053	12086,73	38,40	42,340	73	136,4	1
12980	3,85597	1055	12125,24	38,51	42,413	73	136,2	2
12990	3,86655	1058	12163,85	38,61	42,486	73	136,0	2
13000	3,87716	1061	12202,57	38,72	42,560	74	135,9	1
		106		38,8		74		2
13010	3,8878		12241,4		42,634		135,7	
13020	3,8985	107	12280,3	38,9	42,708	74	135,5	2
13030	3,9092	107	12319,4	39,1	42,782	74	135,4	1
13040	3,9200	108	12358,5	39,1	42,856	74	135,2	2
13050	3,9307	107	12397,8	39,3	42,930	74	135,1	1
		108		39,3		74		2
13060	3,9415		12437,1		43,004		134,9	
13070	3,9522	107	12476,6	39,5	43,077	73	134,7	2
13080	3,9630	108	12516,2	39,6	43,151	74	134,5	2
13090	3,9738	108	12555,9	39,7	43,225	74	134,4	1
13100	3,9846	108	12595,6	39,7	43,300	75	134,1	2
		109		39,9		74		2
13110	3,9955		12635,5		43,374		134,0	
13120	4,0064	109	12675,6	40,1	43,449	75	133,9	1
13130	4,0174	110	12715,7	40,1	43,524	75	133,7	2
13140	4,0283	109	12755,9	40,2	43,599	75	133,6	1
13150	4,0393	110	12796,2	40,3	43,673	74	133,4	2
		110		40,4		75		1
13160	4,0503		12836,6		43,748		133,3	
13170	4,0614	111	12877,2	40,6	43,823	75	133,1	2
13180	4,0725	111	12917,9	40,7	43,898	75	133,0	1
13190	4,0836	111	12958,7	40,8	43,973	75	132,9	2
13200	4,0948	112	12999,6	40,9	44,049	76	132,7	1
		112		41,0		75		2
13210	4,1060		13040,6		44,124		132,5	
13220	4,1172	112	13081,7	41,1	44,200	76	132,4	1
13230	4,1285	112	13122,9	41,2	44,275	75	132,2	2
13240	4,1397	112	13164,3	41,4	44,351	76	132,0	2
13250	4,1510	112	13205,7	41,4	44,427	76	131,9	1
		112		41,6		76		2
13260	4,1622		13247,3		44,503		131,7	
13270	4,1735	112	13289,0	41,7	44,579	76	131,6	1
13280	4,1848	112	13330,8	41,8	44,655	76	131,4	2
13290	4,1962	114	13372,7	41,9	44,731	76	131,3	1
13300	4,2076	114	13414,7	42,0	44,807	76	131,1	2
		114		42,1		77		1

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
13310	4,2190		13456,8		44,884		131,0	
13320	4,2305	115	13499,1	42,3	44,960	76	130,8	2
13330	4,2419	114	13541,4	42,3	45,036	76	130,6	2
13340	4,2534	115	13583,9	42,5	45,113	77	130,4	2
13350	4,2649	116	13626,5	42,6	45,190	77	130,3	1
		116		42,7		77		2
13360	4,2765		13669,2		45,267		130,1	
13370	4,2881	116	13712,0	42,8	45,344	77	129,9	2
13380	4,2998	117	13755,0	43,0	45,421	77	129,8	1
13390	4,3114	116	13798,0	43,0	45,498	77	129,6	2
13400	4,3231	117	13841,2	43,2	45,575	77	129,4	2
		117		43,3		77		1
13410	4,3348		13884,5		45,652		129,3	
13420	4,3465	117	13927,9	43,4	45,730	78	129,1	2
13430	4,3583	118	13971,4	43,5	45,807	77	129,0	1
13440	4,3701	118	14015,1	43,7	45,885	78	128,8	2
13450	4,3819	118	14058,8	43,7	45,962	77	128,6	2
		119		43,9		78		1
13460	4,3938		14102,7		46,040		128,5	
13470	4,4057	119	14146,7	44,0	46,118	78	128,3	2
13480	4,4176	119	14190,8	44,1	46,196	78	128,2	1
13490	4,4296	120	14235,1	44,3	46,274	78	128,0	2
13500	4,4416	120	14279,4	44,3	46,352	78	127,9	1
		120		44,5		79		2
13510	4,4536		14323,9		46,431		127,7	
13520	4,4657	121	14368,5	44,6	46,509	78	127,6	1
13530	4,4778	121	14413,2	44,7	46,587	78	127,4	2
13540	4,4899	121	14458,0	44,8	46,665	78	127,3	1
13550	4,5020	121	14503,0	45,0	46,744	79	127,1	2
		122		45,1		78		1
13560	4,5142		14548,1		46,822		127,0	
13570	4,5263	121	14593,3	45,2	46,901	79	126,8	2
13580	4,5385	122	14638,6	45,3	46,980	79	126,6	2
13590	4,5507	122	14684,0	45,4	47,059	79	126,5	1
13600	4,5629	122	14729,6	45,6	47,138	79	126,3	2
		123		45,7		80		1
13610	4,5752		14775,3		47,218		126,2	
13620	4,5875	123	14821,1	45,8	47,297	79	126,0	2
13630	4,5998	123	14867,1	46,0	47,376	79	125,9	1
13640	4,6122	124	14913,1	46,0	47,456	80	125,7	2
13650	4,6246	124	14959,3	46,2	47,535	79	125,6	1
		124		46,3		80		2
13660	4,6370		15005,6		47,615		125,4	
13670	4,6495	125	15052,0	46,4	47,695	80	125,3	1
13680	4,6620	125	15098,6	46,6	47,775	80	125,2	1
13690	4,6746	126	15145,3	46,7	47,855	80	125,0	2
13700	4,6872	126	15192,1	46,8	47,935	80	124,9	1
		126		46,9		81		2
13710	4,6998		15239,0		48,016		124,7	
13720	4,7125	127	15286,1	47,1	48,096	80	124,6	1
13730	4,7252	127	15333,3	47,2	48,176	80	124,4	2
13740	4,7379	127	15380,6	47,3	48,257	81	124,3	1
13750	4,7506	127	15428,0	47,4	48,337	80	124,1	2
		128		47,6		81		1
13760	4,7634		15475,6		48,418		124,0	
13770	4,7761	127	15523,3	47,7	48,498	80	123,8	2
13780	4,7889	128	15571,1	47,8	48,579	81	123,7	1
13790	4,8017	128	15619,1	48,0	48,659	80	123,5	2
13800	4,8145	128	15667,2	48,1	48,740	81	123,4	1
		129		48,2		81		2

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
13810	4,8274	129	15715,4	48,3	48,821	81	123,2	1
13820	4,8403	130	15763,7	48,5	48,902	81	123,1	2
13830	4,8533	130	15812,2	48,6	48,983	82	122,9	1
13840	4,8663	131	15860,8	48,7	49,065	81	122,8	2
13850	4,8794	130	15909,5	48,9	49,146	82	122,6	1
13860	4,8924	131	15958,4	49,0	49,228	82	122,5	2
13870	4,9055	131	16007,4	49,1	49,310	82	122,3	1
13880	4,9186	132	16056,5	49,2	49,392	82	122,2	2
13890	4,9318	132	16105,7	49,4	49,474	82	122,0	1
13900	4,9450	132	16155,1	49,5	49,556	83	121,9	2
13910	4,9582	133	16204,6	49,7	49,639	82	121,7	1
13920	4,9715	133	16254,3	49,8	49,721	82	121,6	2
13930	4,9848	134	16304,1	49,9	49,803	83	121,4	1
13940	4,9982	133	16354,0	50,0	49,886	82	121,3	2
13950	5,0115	134	16404,0	50,2	49,968	83	121,1	1
13960	5,0249	134	16454,2	50,3	50,051	82	121,0	2
13970	5,0383	134	16504,5	50,5	50,133	83	120,8	1
13980	5,0517	135	16555,0	50,6	50,216	82	120,7	2
13990	5,0652	135	16605,6	50,7	50,298	83	120,5	1
14000	5,0787	135	16656,3	50,8	50,381	83	120,4	2
14010	5,0922	136	16707,1	51,0	50,464	83	120,2	1
14020	5,1058	136	16758,1	51,1	50,547	84	120,1	1
14030	5,1194	137	16809,2	51,3	50,631	83	120,0	2
14040	5,1331	137	16860,5	51,4	50,714	84	119,8	1
14050	5,1468	137	16911,9	51,5	50,798	83	119,7	2
14060	5,1605	138	16963,4	51,7	50,881	84	119,5	1
14070	5,1743	137	17015,1	51,8	50,965	84	119,4	2
14080	5,1880	138	17066,9	52,0	51,049	84	119,2	1
14090	5,2018	138	17118,9	52,1	51,133	84	119,1	1
14100	5,2156	139	17171,0	52,2	51,217	85	119,0	2
14110	5,2295	139	17223,2	52,4	51,302	84	118,8	1
14120	5,2434	139	17275,6	52,5	51,386	84	118,7	2
14130	5,2573	140	17328,1	52,6	51,470	85	118,5	1
14140	5,2713	140	17380,7	52,8	51,555	84	118,4	2
14150	5,2853	140	17433,5	52,9	51,639	84	118,2	1
14160	5,2993	141	17486,4	53,1	51,723	85	118,1	2
14170	5,3134	141	17539,5	53,2	51,808	85	117,9	1
14180	5,3275	142	17592,7	53,3	51,893	85	117,8	1
14190	5,3417	142	17646,0	53,5	51,978	85	117,7	2
14200	5,3559	142	17699,5	53,6	52,063	86	117,5	1
14210	5,3701	143	17753,1	53,8	52,149	85	117,4	2
14220	5,3844	142	17806,9	53,9	52,234	85	117,2	1
14230	5,3986	143	17860,8	54,1	52,319	86	117,1	1
14240	5,4129	144	17914,9	54,2	52,405	85	117,0	2
14250	5,4273	144	17969,1	54,3	52,490	86	116,8	1
14260	5,4417	145	18023,4	54,5	52,576	85	116,7	2
14270	5,4562	144	18077,9	54,6	52,661	86	116,5	1
14280	5,4706	145	18132,5	54,8	52,747	86	116,4	2
14290	5,4851	145	18187,3	54,9	52,833	86	116,2	1
14300	5,4996	146	18242,2	55,1	52,919	87	116,1	2

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

671

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
14310	5,5142		18297,3		53,006		115,9	
14320	5,5288	146	18352,5	55,2	53,092	86	115,8	1
14330	5,5435	147	18407,9	55,4	53,178	86	115,7	1
14340	5,5581	146	18463,4	55,5	53,265	87	115,5	2
14350	5,5728	147	18519,1	55,7	53,351	86	115,4	1
		147		55,8		87		2
14360	5,5875		18574,9		53,438		115,2	
14370	5,6023	148	18630,8	55,9	53,524	86	115,1	1
14380	5,6171	148	18686,9	56,1	53,611	87	115,0	1
14390	5,6320	149	18743,1	56,2	53,698	87	114,8	2
14400	5,6469	149	18799,5	56,4	53,785	87	114,7	1
		149		56,6		88		2
14410	5,6618		18856,1		53,873		114,5	
14420	5,6768	150	18912,8	56,7	53,960	87	114,4	1
14430	5,6918	150	18969,6	56,8	54,048	88	114,3	1
14440	5,7069	151	19026,6	57,0	54,136	88	114,1	2
14450	5,7220	151	19083,8	57,2	54,224	88	114,0	1
		151		57,3		87		1
14460	5,7371		19141,1		54,311		113,9	
14470	5,7523	152	19198,5	57,4	54,399	88	113,7	2
14480	5,7674	151	19256,1	57,6	54,487	88	113,6	1
14490	5,7826	152	19313,9	57,8	54,575	88	113,5	1
14500	5,7978	152	19371,8	57,9	54,663	88	113,3	2
		153		58,0		89		1
14510	5,8131		19429,8		54,752		113,2	
14520	5,8284	153	19488,0	58,2	54,840	88	113,1	1
14530	5,8438	154	19546,4	58,4	54,929	89	112,9	2
14540	5,8592	154	19604,9	58,5	55,017	88	112,8	1
14550	5,8747	155	19663,6	58,7	55,106	89	112,6	2
		154		58,8		89		1
14560	5,8901		19722,4		55,195		112,5	
14570	5,9056	155	19781,4	59,0	55,284	89	112,4	1
14580	5,9212	156	19840,5	59,1	55,373	89	112,2	2
14590	5,9368	156	19899,8	59,3	55,461	88	112,1	1
14600	5,9524	156	19959,2	59,4	55,550	89	112,0	1
		157		59,6		89		2
14610	5,9681		20018,8		55,639		111,8	
14620	5,9838	157	20078,6	59,8	55,729	90	111,7	1
14630	5,9996	158	20138,5	59,9	55,818	89	111,5	2
14640	6,0153	157	20198,6	60,1	55,908	90	111,4	1
14650	6,0311	158	20258,8	60,2	55,998	90	111,3	1
		158		60,4		90		2
14660	6,0469		20319,2		56,088		111,1	
14670	6,0628	159	20379,8	60,6	56,178	90	111,0	1
14680	6,0787	159	20440,5	60,7	56,268	90	110,9	2
14690	6,0947	160	20501,3	60,8	56,358	90	110,7	1
14700	6,1106	159	20562,3	61,0	56,449	91	110,6	1
		160		61,2		90		1
14710	6,1266		20623,5		56,539		110,5	
14720	6,1427	161	20684,9	61,4	56,629	90	110,4	1
14730	6,1588	161	20746,4	61,5	56,720	90	110,2	2
14740	6,1750	162	20808,1	61,7	56,810	90	110,1	1
14750	6,1912	162	20869,9	61,8	56,901	91	110,0	1
		162		62,0		91		2
14760	6,2074		20931,9		56,992		109,8	
14770	6,2237	163	20994,0	62,1	57,083	91	109,7	1
14780	6,2400	163	21056,4	62,4	57,174	91	109,6	2
14790	6,2563	163	21118,8	62,4	57,266	92	109,4	1
14800	6,2727	164	21181,5	62,7	57,358	92	109,3	1
		164		62,8		91		1



Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

<i>D</i>	<i>J</i>	Diff.	<i>A</i>	Diff.	<i>T</i>	Diff.	<i>u</i>	Diff.
14810	6,2891	164	21244,3	63,0	57,449	92	109,2	1
14820	6,3055	165	21307,3	63,1	57,541	92	109,1	2
14830	6,3220	165	21370,4	63,3	57,633	92	108,9	1
14840	6,3385	166	21433,7	63,5	57,725	91	108,8	1
14850	6,3551	167	21497,2	63,6	57,816	92	108,7	2
14860	6,3718	167	21560,8	63,8	57,908	92	108,5	1
14870	6,3885	168	21624,6	64,0	58,000	92	108,4	1
14880	6,4053	167	21688,6	64,1	58,092	92	108,3	2
14890	6,4220	168	21752,7	64,3	58,184	93	108,1	1
14900	6,4388	169	21817,0	64,5	58,277	92	108,0	1
14910	6,4557	169	21881,5	64,6	58,369	92	107,9	2
14920	6,4726	170	21946,1	64,8	58,461	93	107,7	1
14930	6,4896	169	22010,9	65,0	58,554	92	107,6	1
14940	6,5065	170	22075,9	65,2	58,646	93	107,5	1
14950	6,5235	170	22141,1	65,3	58,739	93	107,4	2
14960	6,5405	171	22206,4	65,5	58,832	94	107,2	1
14970	6,5576	171	22271,9	65,7	58,926	94	107,1	1
14980	6,5747	172	22337,6	65,8	59,020	94	107,0	2
14990	6,5919	172	22403,4	66,0	59,114	95	106,8	1
15000	6,6091	173	22469,4	66,2	59,209	94	106,7	2
15010	6,6264	173	22535,6	66,3	59,303	94	106,5	1
15020	6,6437	173	22601,9	66,5	59,397	95	106,4	1
15030	6,6610	174	22668,4	66,7	59,492	94	106,3	2
15040	6,6784	174	22735,1	66,9	59,586	94	106,1	1
15050	6,6958	175	22802,0	67,1	59,680	94	106,0	1
15060	6,7133	175	22869,1	67,2	59,774	94	105,9	2
15070	6,7308	176	22936,3	67,4	59,868	95	105,7	1
15080	6,7484	176	23003,7	67,6	59,963	94	105,6	1
15090	6,7660	177	23071,3	67,7	60,057	95	105,5	2
15100	6,7837	177	23139,0	67,9	60,152	95	105,3	1
15110	6,8014	178	23206,9	68,1	60,247	95	105,2	1
15120	6,8192	178	23275,0	68,3	60,342	95	105,1	1
15130	6,8370	178	23343,3	68,5	60,437	96	105,0	2
15140	6,8548	179	23411,8	68,6	60,533	95	104,8	1
15150	6,8727	179	23480,4	68,8	60,628	96	104,7	1
15160	6,8906	179	23549,2	69,0	60,724	96	104,6	1
15170	6,9085	180	23618,2	69,2	60,819	96	104,5	2
15180	6,9265	180	23687,4	69,3	60,915	96	104,3	1
15190	6,9445	181	23756,7	69,6	61,011	96	104,2	1
15200	6,9626	181	23826,3	69,7	61,107	96	104,1	1
15210	6,9807	182	23896,0	69,9	61,203	96	104,0	2
15220	6,9989	182	23965,9	70,1	61,299	96	103,8	1
15230	7,0171	182	24036,0	70,2	61,395	97	103,7	1
15240	7,0353	183	24106,2	70,5	61,492	97	103,6	1
15250	7,0536	183	24176,7	70,6	61,589	96	103,5	2
15260	7,0719	184	24247,3	70,8	61,685	97	103,3	1
15270	7,0903	184	24318,1	71,0	61,782	97	103,2	1
15280	7,1087	185	24389,1	71,2	61,879	97	103,1	1
15290	7,1272	185	24460,3	71,4	61,976	97	103,0	2
15300	7,1457	186	24531,7	71,5	62,073	98	102,8	1

Tabelle 11. Primäre Funktionen von Siacci.

673

D	J	Diff.	A	Diff.	T	Diff.	u	Diff.
15310	7,1643		24608,2		62,171		102,7	
15320	7,1829	186	24674,9	71,7	62,269	98	102,6	1
15330	7,2016	187	24746,9	72,0	62,366	97	102,5	1
15340	7,2203	187	24819,0	72,1	62,464	98	102,4	1
15350	7,2391	188	24891,3	72,3	62,562	98	102,2	2
		188		72,5		98		1
15360	7,2579		24963,8		62,660		102,1	
15370	7,2767	188	25036,4	72,6	62,757	97	102,0	1
15380	7,2956	189	25109,3	72,9	62,855	98	101,9	1
15390	7,3145	189	25182,3	73,0	62,953	98	101,8	1
15400	7,3335	190	25255,6	73,3	63,052	99	101,6	2
		190		73,4		99		1
15410	7,3525		25329,0		63,151		101,5	
15420	7,3715	190	25402,6	73,6	63,250	99	101,4	1
15430	7,3906	191	25476,4	73,8	63,349	99	101,3	1
15440	7,4098	192	25550,4	74,0	63,448	99	101,2	1
15450	7,4290	192	25624,6	74,2	63,547	99	101,0	2
		193		74,4		100		1
15460	7,4483		25699,0		63,647		100,9	
15470	7,4676	193	25773,6	74,6	63,746	99	100,8	1
15480	7,4869	193	25848,4	74,8	63,845	99	100,7	1
15490	7,5063	194	25923,3	74,9	63,944	99	100,6	1
15500	7,5257	194	25998,5	75,2	64,044	100	100,4	2
		195		75,4		100		1
15510	7,5452		26073,9		64,144		100,3	
15520	7,5647	195	26149,4	75,5	64,244	100	100,2	1
15530	7,5843	196	26225,2	75,8	64,344	100	100,1	1
15540	7,6039	196	26301,1	75,9	64,444	100	99,9	2
15550	7,6236	197	26377,2	76,1	64,544	100	99,8	1
		197		76,4		101		1
15560	7,6433		26453,6		64,645		99,7	
15570	7,6631	198	26530,1	76,5	64,745	100	99,6	1
15580	7,6829	198	26606,8	76,7	64,845	100	99,5	1
15590	7,7028	199	26683,8	77,0	64,945	100	99,3	2
15600	7,7227	199	26760,9	77,1	65,046	101	99,2	1
		200		77,3		101		1
15610	7,7427		26838,2		65,147		99,1	
15620	7,7627	200	26915,7	77,5	65,248	101	99,0	1
15630	7,7828	201	26993,5	77,8	65,349	101	98,9	1
15640	7,8029	201	27071,4	77,9	65,451	102	98,7	2
15650	7,8230	201	27149,5	78,1	65,552	101	98,6	1
		202		78,4		102		1
15660	7,8432		27227,9		65,654		98,5	
15670	7,8634	202	27306,4	78,5	65,755	101	98,4	1
15680	7,8837	203	27385,1	78,7	65,856	101	98,3	1
15690	7,9040	203	27464,1	79,0	65,958	102	98,2	1
15700	7,9244	204	27543,2	79,1	66,060	102	98,1	1
		204		79,3		102		2
15710	7,9448		27622,5		66,162		97,9	
15720	7,9653	205	27702,1	79,6	66,264	102	97,8	1
15730	7,9858	205	27781,9	79,8	66,367	103	97,7	1
15740	8,0064	206	27861,8	79,9	66,469	102	97,6	1
15750	8,0270	206	27942,0	80,2	66,572	103	97,5	1
		207		80,4		102		1
15760	8,0477		28022,4		66,674		97,4	
15770	8,0684	207	28102,9	80,5	66,777	103	97,2	2
15780	8,0891	207	28183,7	80,8	66,879	103	97,1	1
15790	8,1099	208	28264,7	81,0	66,982	103	97,0	1
15800	8,1307	208	28345,9	81,2	67,085	103	96,9	1

Zugehörige Tafel der  $\beta$ -Werte.

Ab- gangs- winkel $\gamma$	Seitenweite $X$ (in m):																Ab- gangs- winkel $\varphi$
	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	15000	16000	
6°	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	6°
7°	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	7°
8°	1.00	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	8°
9°	1.00	0.99	0.99	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	9°
10°	1.00	1.00	0.98	0.98	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	10°
11°	1.01	1.00	0.98	0.97	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	11°
12°	1.01	1.00	0.98	0.96	0.97	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	12°
13°	1.01	1.00	0.98	0.97	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	13°
14°	1.01	1.00	0.99	0.97	0.96	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	14°
15°	1.01	1.00	0.99	0.98	0.96	0.98	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	15°
16°	1.02	1.01	1.00	0.99	0.95	0.97	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	16°
17°	1.02	1.01	1.00	0.99	0.96	0.98	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	17°
18°	1.02	1.01	1.00	0.99	0.96	0.98	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	18°
19°	1.02	1.01	1.00	1.00	0.97	0.94	0.98	0.91	0.97	0.94	0.98	0.91	0.97	0.94	0.98	0.91	19°
20°	1.02	1.02	1.01	1.01	0.98	0.94	0.91	0.93	0.86	0.89	0.89	0.86	0.89	0.86	0.89	0.86	20°
21°	1.02	1.02	1.02	1.01	0.99	0.95	0.90	0.81	0.85	0.89	0.89	0.86	0.89	0.86	0.89	0.86	21°
22°	1.02	1.02	1.02	1.02	1.00	0.96	0.89	0.83	0.83	0.87	0.88	0.89	0.89	0.87	0.88	0.89	22°
23°	1.02	1.02	1.02	1.02	1.01	0.97	0.88	0.86	0.88	0.88	0.88	0.89	0.89	0.87	0.88	0.89	23°
24°	1.04	1.04	1.03	1.03	1.02	0.98	0.88	0.87	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.01	1.01	1.01	24°
25°	1.04	1.04	1.03	1.03	1.02	0.99	0.89	0.86	0.89	0.88	0.85	0.88	0.89	0.87	0.89	0.86	25°
26°	1.06	1.06	1.04	1.04	1.03	1.00	0.90	0.85	0.88	0.91	0.88	0.86	0.89	0.87	0.89	0.86	26°
27°	1.06	1.06	1.04	1.04	1.04	1.01	0.91	0.85	0.86	0.89	0.89	0.85	0.88	0.87	0.89	0.86	27°
28°	1.06	1.06	1.05	1.05	1.04	1.02	0.93	0.86	0.81	0.87	0.91	0.94	0.97	0.98	1.00	1.01	28°
29°	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.03	0.95	0.87	0.83	0.85	0.89	0.93	0.96	0.97	0.99	1.00	29°
30°	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.03	0.97	0.88	0.81	0.83	0.88	0.92	0.95	0.97	1.00	30°
31°	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.04	0.98	0.89	0.81	0.83	0.86	0.90	0.93	0.96	0.98	1.00	31°
32°	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.04	0.98	0.89	0.81	0.83	0.86	0.90	0.93	0.96	0.98	1.00	32°
33°	1.08	1.08	1.07	1.07	1.06	1.05	1.01	0.90	0.83	0.81	0.86	0.88	0.91	0.94	0.97	0.99	33°
34°	1.09	1.09	1.08	1.07	1.07	1.06	1.03	0.94	0.83	0.80	0.81	0.84	0.86	0.88	0.90	0.93	34°
35°	1.09	1.09	1.08	1.07	1.07	1.06	1.03	0.96	0.84	0.80	0.80	0.83	0.87	0.90	0.91	0.97	35°
36°	1.10	1.09	1.08	1.08	1.08	1.07	1.04	0.96	0.84	0.79	0.79	0.81	0.85	0.89	0.93	0.96	36°
37°	1.11	1.10	1.09	1.08	1.08	1.07	1.05	0.99	0.86	0.79	0.79	0.80	0.83	0.87	0.91	0.95	37°
38°	1.11	1.10	1.09	1.08	1.08	1.07	1.05	0.98	0.85	0.79	0.79	0.80	0.83	0.87	0.91	0.95	38°
39°	1.12	1.11	1.10	1.09	1.09	1.08	1.07	1.01	0.89	0.80	0.78	0.79	0.80	0.83	0.87	0.91	39°
40°	1.12	1.11	1.10	1.09	1.09	1.08	1.07	1.01	0.89	0.80	0.78	0.79	0.80	0.83	0.87	0.91	40°
41°	1.14	1.12	1.12	1.12	1.11	1.11	1.09	1.03	0.91	0.81	0.77	0.78	0.79	0.82	0.86	0.90	41°
42°	1.15	1.14	1.13	1.13	1.12	1.12	1.10	1.04	0.92	0.81	0.77	0.77	0.78	0.81	0.85	0.89	42°
43°	1.16	1.15	1.14	1.14	1.13	1.13	1.11	1.06	0.93	0.81	0.77	0.77	0.78	0.81	0.85	0.89	43°
44°	1.17	1.16	1.15	1.15	1.14	1.14	1.11	1.06	0.93	0.81	0.77	0.77	0.78	0.81	0.85	0.89	44°
45°	1.18	1.17	1.17	1.17	1.16	1.16	1.13	1.08	0.94	0.83	0.78	0.77	0.78	0.81	0.85	0.89	45°

Die  $\beta$ -Werte findet man auch weiter unten in dem Diagramm Nr. VI. Diese graphische Darstellung ist genauer als obige Zahlentafel und eignet sich besonders zur bequemeren graphischen Interpolation.

Tabelle 12.

$$\text{Werte der Funktion } \varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-t^2} \cdot dt.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem einzelnen Fall eine Abweichung  $\lambda$  zwischen  $+l$  und  $-l$  oder der absoluten Größe nach zwischen 0 und  $l$  liegt, ist  $\varphi\left(\frac{l}{\mu\sqrt{2}}\right) = \varphi\left(\frac{0,4769 \dots l}{w}\right)$ ; dabei bedeutet  $w$  die wahrscheinliche oder 50%, ige

Abweichung und  $\mu$  die mittlere quadratische Abweichung,  $\left[\mu = \sqrt{\frac{\sum \lambda^2}{n-1}}\right]$ .

Vgl. Band 1, §§ 63 bis 73.

$t$	$\varphi(t)$	Diff.	$t$	$\varphi(t)$	Diff.	$t$	$\varphi(t)$	Diff.
0,00	0,0000000		0,36	0,3893296		0,71	0,6846654	
0,01	0,0112883	112833	0,37	0,3992059	98763	0,72	0,6914330	67676
0,02	0,0225644	112811	0,38	0,4090093	98034	0,73	0,6981038	56708
0,03	0,0338410	112766	0,39	0,4187335	97292	0,74	0,7046780	55742
0,04	0,0451109	112699	0,40	0,4283922	96537	0,75	0,7111556	64776
0,05	0,0563718	112609			95768			63811
		112497						
0,06	0,0676215		0,41	0,4379690		0,76	0,7175367	
0,07	0,0788577	112362	0,42	0,4474676	94986	0,77	0,7238216	62849
0,08	0,0900781	112304	0,43	0,4568867	94191	0,78	0,7300104	61868
0,09	0,1012806	112025	0,44	0,4662251	93384	0,79	0,7361035	60961
0,10	0,1124630	111824	0,45	0,4754818	92567	0,80	0,7421010	59975
		111600			91737			59023
0,11	0,1236230		0,46	0,4846555		0,81	0,7480033	
0,12	0,1347584	111354	0,47	0,4937452	90897	0,82	0,7538108	58075
0,13	0,1458671	111087	0,48	0,5027498	90046	0,83	0,7595238	57130
0,14	0,1569470	110799	0,49	0,5116683	89186	0,84	0,7651427	56189
0,15	0,1679959	110489	0,50	0,5204999	88316	0,85	0,7706680	55253
		110158			87438			54322
0,16	0,1790117		0,51	0,5292437		0,86	0,7761022	
0,17	0,1899923	109806	0,52	0,5378987	86550	0,87	0,7814398	53396
0,18	0,2009357	109434	0,53	0,5464641	85654	0,88	0,7866873	52475
0,19	0,2118398	109041	0,54	0,5549392	84751	0,89	0,7918432	51559
0,20	0,2227025	108627	0,55	0,5633233	83841	0,90	0,7969082	50650
		108193			82924			49746
0,21	0,2335218		0,56	0,5716157		0,91	0,8018828	
0,22	0,2442958	107740	0,57	0,5798158	83001	0,92	0,8067677	48849
0,23	0,2550225	107267	0,58	0,5879229	81071	0,93	0,8115635	47968
0,24	0,2657000	106775	0,59	0,5959365	80136	0,94	0,8162710	47075
0,25	0,2763263	106263	0,60	0,6038561	79196	0,95	0,8208908	46198
		105734			78251			45325
0,26	0,2868997		0,61	0,6116812		0,96	0,8254236	
0,27	0,2974182	105185	0,62	0,6194114	77302	0,97	0,8298703	44467
0,28	0,3078800	104618	0,63	0,6270463	76349	0,98	0,8342315	43612
0,29	0,3182834	104034	0,64	0,6345857	75394	0,99	0,8385081	42766
0,30	0,3286267	103433	0,65	0,6420292	74435	1,00	0,8427008	41927
		102814			73473			41097
0,31	0,3389081		0,66	0,6493765		1,01	0,8468105	
0,32	0,3491259	102178	0,67	0,6566275	72510	1,02	0,8508380	40276
0,33	0,3592785	101526	0,68	0,6637820	71545	1,03	0,8547842	39463
0,34	0,3693644	100859	0,69	0,6708339	70579	1,04	0,8586499	38657
0,35	0,3793819	100175	0,70	0,6778010	69611	1,05	0,8624360	37861
		99477			68644			37075

$t$	$\varphi(t)$	Diff.	$t$	$\varphi(t)$	Diff.	$t$	$\varphi(t)$	Diff.
1,06	0,8661435		1,56	0,9726281		2,06	0,9964235	
1,07	0,8697732	36297	1,57	0,9736026	9745	2,07	0,9965822	1587
1,08	0,8733261	36529	1,58	0,9745470	9444	2,08	0,9967344	1592
1,09	0,8768030	34769	1,59	0,9754620	9150	2,09	0,9968805	1461
1,10	0,8802050	34020	1,60	0,9763484	8864	2,10	0,9970205	1400
		35280			8585			1343
1,11	0,8835330		1,61	0,9772069		2,11	0,9971548	
1,12	0,8867879	32549	1,62	0,9780381	8312	2,12	0,9972836	1288
1,13	0,8899707	31898	1,63	0,9788429	8048	2,13	0,9974070	1234
1,14	0,8930823	31116	1,64	0,9796218	7789	2,14	0,9975253	1183
1,15	0,8961238	30415	1,65	0,9803756	7538	2,15	0,9976386	1133
		29724			7293			1086
1,16	0,8990962		1,66	0,9811049		2,16	0,9977472	
1,17	0,9020004	29042	1,67	0,9818104	7055	2,17	0,9978511	1039
1,18	0,9048374	28370	1,68	0,9824928	6824	2,18	0,9979505	994
1,19	0,9076033	27709	1,69	0,9831526	6596	2,19	0,9980459	954
1,20	0,9103140	27057	1,70	0,9837904	6378	2,20	0,9981372	913
		26415			6166			872
1,21	0,9129555		1,71	0,9844070		2,21	0,9982244	
1,22	0,9155339	25784	1,72	0,9850028	5958	2,22	0,9983079	835
1,23	0,9180501	25162	1,73	0,9855785	5757	2,23	0,9983878	799
1,24	0,9205052	24551	1,74	0,9861346	5561	2,24	0,9984642	764
1,25	0,9229001	23949	1,75	0,9866717	5371	2,25	0,9985373	731
		23358			5186			698
1,26	0,9252359		1,76	0,9871903		2,26	0,9986071	
1,27	0,9275136	22777	1,77	0,9876910	5007	2,27	0,9986739	668
1,28	0,9297342	22206	1,78	0,9881742	4832	2,28	0,9987377	638
1,29	0,9318937	21645	1,79	0,9886406	4664	2,29	0,9987986	609
1,30	0,9340080	21093	1,80	0,9890905	4499	2,30	0,9988568	582
		20552			4340			556
1,31	0,9360632		1,81	0,9895245		2,31	0,9989124	
1,32	0,9380652	20020	1,82	0,9899431	4186	2,32	0,9989655	531
1,33	0,9400150	19498	1,83	0,9903467	4036	2,33	0,9990162	507
1,34	0,9419137	18987	1,84	0,9907359	3892	2,34	0,9990646	484
1,35	0,9437622	18485	1,85	0,9911110	3751	2,35	0,9991107	461
		17992			3615			441
1,36	0,9455614		1,86	0,9914725		2,36	0,9991548	
1,37	0,9473124	17510	1,87	0,9918207	3482	2,37	0,9991968	420
1,38	0,9490160	17036	1,88	0,9921562	3355	2,38	0,9992369	401
1,39	0,9506733	16572	1,89	0,9924793	3231	2,39	0,9992751	382
1,40	0,9522851	16118	1,90	0,9927904	3111	2,40	0,9993115	364
		15673			2995			347
1,41	0,9538524		1,91	0,9930899		2,41	0,9993462	
1,42	0,9553762	15238	1,92	0,9933782	2883	2,42	0,9993793	331
1,43	0,9568573	14811	1,93	0,9936557	2776	2,43	0,9994108	315
1,44	0,9582966	14393	1,94	0,9939226	2669	2,44	0,9994408	300
1,45	0,9596950	13984	1,95	0,9941794	2568	2,45	0,9994694	286
		13585			2469			272
1,46	0,9610535		1,96	0,9944263		2,46	0,9994966	
1,47	0,9623729	13194	1,97	0,9946637	2374	2,47	0,9995226	260
1,48	0,9636541	12812	1,98	0,9948920	2285	2,48	0,9995472	246
1,49	0,9648979	12438	1,99	0,9951114	2194	2,49	0,9995707	235
1,50	0,9661052	12073	2,00	0,9953223	2109	2,50	0,9995930	223
		11716			2025			213
1,51	0,9672768		2,01	0,9955248		2,51	0,9996143	
1,52	0,9684135	11367	2,02	0,9957195	1947	2,52	0,9996345	202
1,53	0,9695162	11027	2,03	0,9959063	1868	2,53	0,9996537	192
1,54	0,9705857	10695	2,04	0,9960858	1795	2,54	0,9996720	183
1,55	0,9716227	10370	2,05	0,9962581	1733	2,55	0,9996893	173
		10054			1654			165

Tabelle 12. Werte der Funktion  $\varphi(t)$ .

$t$	$\varphi(t)$	Diff.	$t$	$\varphi(t)$	Diff.	$t$	$\varphi(t)$	Diff.	$t$	$\varphi(t)$
2,56	0,9997058		2,96	0,9999716		3,36	0,9999980		3,76	0,99999989477
2,57	0,9997215	157	2,97	0,9999733	17	3,37	0,9999981	1	3,77	0,99999990265
2,58	0,9997364	149	2,98	0,9999750	17	3,38	0,9999982	1	3,78	0,99999990995
2,59	0,9997505	141	2,99	0,9999765	15	3,39	0,9999984	2	3,79	0,99999991672
2,60	0,9997640	135	3,00	0,9999779	14	3,40	0,9999985	1	3,80	0,99999992300
		127			14			1		
2,61	0,9997767		3,01	0,9999793		3,41	0,9999986		3,81	0,99999992881
2,62	0,9997888	121	3,02	0,9999805	12	3,42	0,9999987	1	3,82	0,99999993421
2,63	0,9998003	115	3,03	0,9999817	12	3,43	0,9999988	1	3,83	0,99999993921
2,64	0,9998112	109	3,04	0,9999829	12	3,44	0,9999989	1	3,84	0,99999994383
2,65	0,9998215	103	3,05	0,9999839	10	3,45	0,9999989	0	3,85	0,99999994812
		98			10					
2,66	0,9998313		3,06	0,9999849		3,46	0,99999900780		3,86	0,99999995208
2,67	0,9998406	93	3,07	0,9999859	10	3,47	0,99999907672		3,87	0,99999995575
2,68	0,9998494	88	3,08	0,9999867	8	3,48	0,99999914101		3,88	0,99999995915
2,69	0,9998578	84	3,09	0,9999876	9	3,49	0,99999920097		3,89	0,99999996230
2,70	0,9998657	79	3,10	0,9999884	7	3,50	0,99999925691		3,90	0,99999996521
		75			7					
2,71	0,9998732		3,11	0,9999891		3,51	0,99999930905		3,91	0,99999996790
2,72	0,9998803	71	3,12	0,9999898	7	3,52	0,99999935766		3,92	0,99999997039
2,73	0,9998870	67	3,13	0,9999904	6	3,53	0,99999940296		3,93	0,99999997260
2,74	0,9998933	63	3,14	0,9999910	6	3,54	0,99999944519		3,94	0,99999997482
2,75	0,9998994	61	3,15	0,9999916	6	3,55	0,99999948452		3,95	0,99999997678
		57			5					
2,76	0,9999051		3,16	0,9999921		3,56	0,99999952115		3,96	0,99999997860
2,77	0,9999105	54	3,17	0,9999926	5	3,57	0,99999955527		3,97	0,99999998028
2,78	0,9999156	51	3,18	0,9999931	5	3,58	0,99999958703		3,98	0,99999998183
2,79	0,9999204	48	3,19	0,9999936	5	3,59	0,99999961661		3,99	0,99999998327
2,80	0,9999250	46	3,20	0,9999940	4	3,60	0,99999964414		4,00	0,99999998458
		43			4					
2,81	0,9999293		3,21	0,9999944		3,61	0,99999966975		4,10	0,99999999330
2,82	0,9999334	41	3,22	0,9999947	3	3,62	0,99999969358		4,20	0,99999999714
2,83	0,9999372	38	3,23	0,9999951	4	3,63	0,99999971574		4,30	0,99999999881
2,84	0,9999409	37	3,24	0,9999954	3	3,64	0,99999973636		4,40	0,99999999951
2,85	0,9999443	34	3,25	0,9999957	3	3,65	0,99999975551		4,50	0,99999999980
		33			3					
2,86	0,9999476		3,26	0,9999960		3,66	0,99999977333		4,60	0,99999999992
2,87	0,9999507	31	3,27	0,9999962	2	3,67	0,99999978990		4,70	0,99999999997
2,88	0,9999536	29	3,28	0,9999965	2	3,68	0,99999980528		4,80	0,99999999999
2,89	0,9999563	27	3,29	0,9999967	2	3,69	0,99999981957			
2,90	0,9999589	26	3,30	0,9999969	2	3,70	0,99999983285			
		24			2					
2,91	0,9999613		3,31	0,9999971		3,71	0,99999984517			
2,92	0,9999636	23	3,32	0,9999973	2	3,72	0,99999985663			
2,93	0,9999658	22	3,33	0,9999975	2	3,73	0,99999986726			
2,94	0,9999679	21	3,34	0,9999977	2	3,74	0,99999987712			
2,95	0,9999698	19	3,35	0,9999978	1	3,75	0,99999988629			
		18			2					

Tabelle 13.

Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren und Trefferprozente.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Abweichung zwischen  $+l$  und  $-l$  oder der absoluten Größe nach zwischen  $o$  und  $l$  liegt, ist  $\psi\left(\frac{l}{w}\right)$ , wobei  $w$  die wahrscheinliche Abweichung bedeutet. Ein horizontaler (bzw. vertikaler) Zielstreifen von der Höhe (bzw. Breite)  $2l$ , in dessen Mitte der mittlere Treffpunkt liegt, enthält  $100 \cdot \psi\left(\frac{l}{w}\right)$  Prozent Treffer, oder: Zum Wahrscheinlichkeitsfaktor  $\frac{l}{w}$  gehören  $100 \cdot \psi\left(\frac{l}{w}\right)$  Trefferprozente. Vgl. §§ 63 bis 73.

$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.	$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.	$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.
0,00	0,00000	538	0,31	0,16562	526	0,61	0,31925	494
0,01	0,00538	538	0,32	0,17088	526	0,62	0,32419	492
0,02	0,01076	538	0,33	0,17614	524	0,63	0,32911	491
0,03	0,01614	538	0,34	0,18138	524	0,64	0,33402	490
0,04	0,02152	538	0,35	0,18662	523	0,65	0,33892	488
0,05	0,02690	538						
0,06	0,03228	538	0,36	0,19185	522	0,66	0,34380	486
0,07	0,03766	537	0,37	0,19707	522	0,67	0,34866	486
0,08	0,04303	537	0,38	0,20229	520	0,68	0,35352	483
0,09	0,04840	538	0,39	0,20749	519	0,69	0,35835	482
0,10	0,05378	536	0,40	0,21268	519	0,70	0,36317	481
0,11	0,05914	537	0,41	0,21787	517	0,71	0,36798	479
0,12	0,06451	536	0,42	0,22304	517	0,72	0,37277	478
0,13	0,06987	536	0,43	0,22821	516	0,73	0,37755	476
0,14	0,07523	536	0,44	0,23336	515	0,74	0,38231	474
0,15	0,08059	535	0,45	0,23851	513	0,75	0,38705	473
0,16	0,08594	535	0,46	0,24364	512	0,76	0,39178	471
0,17	0,09129	534	0,47	0,24876	512	0,77	0,39649	469
0,18	0,09663	534	0,48	0,25388	510	0,78	0,40118	468
0,19	0,10197	534	0,49	0,25898	509	0,79	0,40586	466
0,20	0,10731	533	0,50	0,26407	508	0,80	0,41052	465
0,21	0,11264	532	0,51	0,26915	506	0,81	0,41517	462
0,22	0,11796	532	0,52	0,27421	506	0,82	0,41979	461
0,23	0,12328	532	0,53	0,27927	504	0,83	0,42440	459
0,24	0,12860	531	0,54	0,28431	503	0,84	0,42899	458
0,25	0,13391	530	0,55	0,28934	502	0,85	0,43357	456
0,26	0,13921	530	0,56	0,29436	500	0,86	0,43813	454
0,27	0,14451	529	0,57	0,29936	499	0,87	0,44267	452
0,28	0,14980	528	0,58	0,30435	498	0,88	0,44719	450
0,29	0,15508	527	0,59	0,30933	497	0,89	0,45169	449
0,30	0,16035	527	0,60	0,31430	495	0,90	0,45618	446

Tabelle 13. Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren und Trefferprozente. 679

$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.	$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.	$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.
0,91	0,46064		1,36	0,64102		1,81	0,77785	
0,92	0,46509	445	1,37	0,64454	382	1,82	0,78039	254
0,93	0,46952	443	1,38	0,64804	350	1,83	0,78291	232
0,94	0,47393	441	1,39	0,65152	348	1,84	0,78542	251
0,95	0,47832	439	1,40	0,65498	346	1,85	0,78790	248
		438			343			246
0,96	0,48270		1,41	0,65841		1,86	0,79036	
0,97	0,48705	435	1,42	0,66182	341	1,87	0,79280	244
0,98	0,49139	434	1,43	0,66521	339	1,88	0,79522	242
0,99	0,49570	431	1,44	0,66858	337	1,89	0,79761	239
1,00	0,50000	430	1,45	0,67193	335	1,90	0,79999	238
		428			333			236
1,01	0,50428		1,46	0,67526		1,91	0,80235	
1,02	0,50853	425	1,47	0,67856	330	1,92	0,80469	234
1,03	0,51277	424	1,48	0,68184	328	1,93	0,80700	231
1,04	0,51699	422	1,49	0,68510	326	1,94	0,80930	230
1,05	0,52119	420	1,50	0,68833	323	1,95	0,81158	228
		418			322			225
1,06	0,52537		1,51	0,69155		1,96	0,81383	
1,07	0,52952	415	1,52	0,69474	319	1,97	0,81607	224
1,08	0,53366	414	1,53	0,69791	317	1,98	0,81828	221
1,09	0,53778	412	1,54	0,70106	315	1,99	0,82048	220
1,10	0,54188	410	1,55	0,70419	313	2,00	0,82266	218
		407			310			215
1,11	0,54595		1,56	0,70729		2,01	0,82481	
1,12	0,55001	406	1,57	0,71038	309	2,02	0,82695	214
1,13	0,55404	403	1,58	0,71344	306	2,03	0,82907	212
1,14	0,55806	409	1,59	0,71648	304	2,04	0,83117	210
1,15	0,56205	399	1,60	0,71949	301	2,05	0,83324	207
		397			300			206
1,16	0,56602		1,61	0,72249		2,06	0,83530	
1,17	0,56998	396	1,62	0,72546	297	2,07	0,83734	204
1,18	0,57391	393	1,63	0,72841	295	2,08	0,83936	203
1,19	0,57782	391	1,64	0,73134	293	2,09	0,84137	201
1,20	0,58171	389	1,65	0,73425	291	2,10	0,84335	198
		387			289			196
1,21	0,58558		1,66	0,73714		2,11	0,84531	
1,22	0,58942	384	1,67	0,74000	286	2,12	0,84726	195
1,23	0,59325	383	1,68	0,74285	285	2,13	0,84919	193
1,24	0,59705	380	1,69	0,74567	282	2,14	0,85109	190
1,25	0,60083	378	1,70	0,74847	280	2,15	0,85298	189
		377			277			188
1,26	0,60460		1,71	0,75124		2,16	0,85486	
1,27	0,60833	373	1,72	0,75400	276	2,17	0,85671	185
1,28	0,61205	372	1,73	0,75674	274	2,18	0,85854	183
1,29	0,61575	370	1,74	0,75945	271	2,19	0,86036	182
1,30	0,61942	367	1,75	0,76214	269	2,20	0,86216	180
		366			267			178
1,31	0,62308		1,76	0,76481		2,21	0,86394	
1,32	0,62671	363	1,77	0,76746	265	2,22	0,86570	176
1,33	0,63032	361	1,78	0,77009	263	2,23	0,86745	175
1,34	0,63391	359	1,79	0,77270	261	2,24	0,86917	172
1,35	0,63747	356	1,80	0,77528	258	2,25	0,87088	171
		355			257			170



380 Tabelle 13. Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren und Trefferprozente.

$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.	$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.	$\frac{l}{w}$	$\psi\left(\frac{l}{w}\right)$	Diff.
2,26	0,87258		2,71	0,93243		3,16	0,96694	
2,27	0,87425	167	2,72	0,93344	101	3,17	0,96749	55
2,28	0,87591	166	2,73	0,93443	99	3,18	0,96804	55
2,29	0,87755	164	2,74	0,93541	98	3,19	0,96857	53
2,30	0,87918	163	2,75	0,93638	97	3,20	0,96910	53
		160			96			52
2,31	0,88078		2,76	0,93734		3,21	0,96962	
2,32	0,88237	159	2,77	0,93828	94	3,22	0,97013	51
2,33	0,88395	158	2,78	0,93922	94	3,23	0,97064	51
2,34	0,88550	155	2,79	0,94014	93	3,24	0,97114	50
2,35	0,88705	156	2,80	0,94105	91	3,25	0,97163	49
		152			90			48
2,36	0,88857		2,81	0,94195		3,26	0,97211	
2,37	0,89008	151	2,82	0,94284	89	3,27	0,97259	48
2,38	0,89157	149	2,83	0,94371	87	3,28	0,97306	47
2,39	0,89304	147	2,84	0,94458	87	3,29	0,97352	46
2,40	0,89450	146	2,85	0,94543	85	3,30	0,97397	45
		145			84			45
2,41	0,89595		2,86	0,94627		3,31	0,97442	
2,42	0,89738	143	2,87	0,94711	84	3,32	0,97486	44
2,43	0,89879	141	2,88	0,94793	82	3,33	0,97530	44
2,44	0,89919	140	2,89	0,94874	81	3,34	0,97573	43
2,45	0,90157	138	2,90	0,94954	80	3,35	0,97615	42
		136			79			42
2,46	0,90293		2,91	0,95033		3,36	0,97657	
2,47	0,90428	135	2,92	0,95111	78	3,37	0,97698	41
2,48	0,90562	134	2,93	0,95187	76	3,38	0,97738	40
2,49	0,90694	132	2,94	0,95263	76	3,39	0,97778	40
2,50	0,90825	131	2,95	0,95338	75	3,40	0,97817	39
		129			74			38,9
2,51	0,90954		2,96	0,95412		3,50	0,98176	
2,52	0,91082	128	2,97	0,95485	73	3,60	0,98482	306
2,53	0,91208	126	2,98	0,95557	72	3,70	0,98743	261
2,54	0,91332	124	2,99	0,95628	71	3,80	0,98962	219
2,55	0,91456	124	3,00	0,95698	70	3,90	0,99147	185
		122			69			155
2,56	0,91578		3,01	0,95767		4,00	0,99302	
2,57	0,91698	120	3,02	0,95835	68	4,10	0,99431	129
2,58	0,91817	119	3,03	0,95902	67	4,20	0,99539	108
2,59	0,91935	118	3,04	0,95968	66	4,30	0,99627	88
2,60	0,92051	116	3,05	0,96033	65	4,40	0,99700	73
		115			65			60
2,61	0,92166		3,06	0,96098		4,50	0,99760	
2,62	0,92280	114	3,07	0,96161	63	4,60	0,99808	48
2,63	0,92392	112	3,08	0,96224	63	4,70	0,99848	40
2,64	0,92503	111	3,09	0,96286	62	4,80	0,99879	31
2,65	0,92613	110	3,10	0,96346	60	4,90	0,99905	26
		108			60			21
2,66	0,92721		3,11	0,96406		5,00	0,99926	
2,67	0,92828	107	3,12	0,96466	60	5,10	0,99942	18
2,68	0,92934	106	3,13	0,96524	58	5,20	0,99955	13
2,69	0,93038	104	3,14	0,96582	58	5,30	0,99965	10
2,70	0,93141	103	3,15	0,96638	56			
		102			56			

Logarithmus der Hyperbelfunktion  $e^x - e^{-x}$  oder  $\text{Sin } x$  (vgl. Band I, § 39).

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$D$
0,0	8, 0000	0000	3011	4772	6022	6991	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9, 0007	0423	0802	1152	1475	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9, 3089	3254	3459	3655	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9, 4836	4982	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9, 6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9, 7169	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9, 8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9, 8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353	9419	66
0,8	9, 9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	0053	61
0,9	0, 0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	0, 0701	0758	0815	0871	0927	0983	1038	1093	1148	1203	54
1,1	0, 1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	0, 1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250	50
1,3	0, 2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	49
1,4	0, 2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	0, 3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3710	47
1,6	0, 3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	9, 4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	0, 4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	0, 5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	0, 5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	5999	45
2,1	0, 6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	0, 6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	0, 6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	0, 7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	0, 7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	0, 8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	0, 8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	0, 9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	0, 9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	1, 0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	1, 0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	1, 0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	1, 1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	1, 1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	1, 2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	1, 2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	1, 3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	1, 3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	1, 3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	1, 4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	1, 4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	1, 5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	1, 5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	1, 6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	1, 6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	1, 6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	1, 7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	1, 7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	1, 8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	1, 8704										

Für kleine Werte von  $x$  ist nahezu  $\log \text{Sin } x = \log x$ .

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$D$
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1263	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2052	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0894	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2974	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705										

Für  $x$  größer als 5 hat man auf mindestens 4 Stellen genau:

$$\log \operatorname{Cof} x = \log \operatorname{Cof} x = 0,43429 - x - 0,30103, \quad x = 2,30259 \cdot (\log \operatorname{Cof} x + 0,30103)$$

$$\log 0,4342 = 9,6378; \quad -\log 2,3026 = 0,3622.$$

Logarithmus der Hyperbelfunktionen  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  oder  $\operatorname{th} x$ .

Für  $x = 0$  bis 2,39; um 10 vergrößert.

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$D$
0,0	— $\infty$	8, 0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9581	455
0,1	8, 9986	0396*	0771*	1115*	1433*	1729*	2004*	2263*	2506*	2736*	217
0,2	9, 2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9, 4644	4778	4907	5081	5152	5268	5381	5490	5596	5698	99
0,4	9, 5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9, 6648	6720	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9, 7800	7857	7913	7967	8020	8071	8122	8171	8220	8267	46
0,7	9, 7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9, 8222	8258	8293	8328	8362	8395	8428	8459	8491	8521	30
0,9	9, 8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1,0	9, 8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9, 9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9, 9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9, 9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9, 9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9, 9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9, 9646	9653	9660	9666	9673	9679	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9, 9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9, 9763	9767	9772	9776	9781	9785	9789	9794	9798	9802	4
1,9	9, 9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2,0	9, 9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867	3
2,1	9, 9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9, 9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9, 9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2

Schuß vertikal aufwärts. Tafeln der Funktionen  $Q(v)$  und  $M(v)$  für die Geschwindigkeiten  $v$  von 1200 m/sec bis Null und für  $c = 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1$ ; vgl. § 39 in Band I.

Wenn die Geschwindigkeit des Geschosses von  $v_0$  auf  $v$  gesunken ist, befindet sich das Geschos in der Höhe  $y = Q(v) - Q(v_0)$ . Die verfllossene Zeit ist  $t = M(v) - M(v_0)$ . Ganze Steighöhe  $Y = Q(0) - Q(v_0)$ ; ganze Flugzeit für die Aufwärtsbewegung  $T = M(0) - M(v_0)$ . ( $v_0$  = Anfangsgeschwindigkeit;  $c$  wie im Eingang zu Tabelle 11.)

$v$ m/sec	$Q(v) = \int_v^{1200} \frac{v \cdot dv}{g + c \cdot f(v)}$ für $c =$								
	6	5	4	3	2	1	0,5	0,2	0,1
1200	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	120	140	180	240	350	690	1350	3100	5450
900	180	220	270	360	540	1060	2050	4700	8190
800	250	300	370	490	730	1440	2790	6800	10970
700	320	380	480	630	940	1840	3550	7970	13680
650	360	420	530	700	1050	2040	3940	8840	15000
600	400	470	590	780	1160	2270	4350	9700	16350
550	440	520	650	860	1280	2500	4780	10570	17690
500	480	570	720	950	1410	2750	5240	11460	19040
450	530	630	790	1050	1550	3020	5720	12380	20380
400	590	700	870	1160	1720	3330	6260	13360	21740
380	620	730	910	1210	1790	3460	6500	13770	22260
360	650	770	960	1270	1870	3610	6740	14220	22780
340	680	810	1010	1330	1960	3770	7000	14690	23310
320	720	860	1070	1410	2070	3970	7290	15150	23860
300	770	910	1140	1500	2200	4180	7620	15610	24410
280	830	990	1230	1600	2360	4440	7960	16050	24950
270	870	1030	1290	1660	2450	4570	8140	16280	25210
260	910	1080	1350	1720	2550	4700	8340	16500	25460
250	960	1130	1400	1790	2650	4850	8520	16700	25700
240	1000	1190	1460	1870	2740	4990	8690	16900	25920
220	1090	1290	1590	2030	2940	5290	9040	17300	26360
200	1190	1410	1720	2220	3140	5580	9390	17670	26750
180	1300	1530	1860	2390	3340	5850	9720	18020	27120
160	1410	1650	2000	2560	3550	6110	10020	18350	27460
140	1520	1780	2150	2720	3750	6330	10290	18640	27750
120	1640	1900	2290	2890	3930	6530	10520	18900	28010
100	1750	2030	2430	3040	4100	6710	10710	19120	28230
80	1860	2150	2560	3190	4250	6880	10860	19290	28390
60	1970	2270	2680	3300	4380	7020	10980	19440	28510
50	2020	2310	2720	3350	4430	7080	11040	19500	28560
40	2060	2350	2760	3390	4480	7110	11080	19540	28600
30	2090	2380	2800	3420	4510	7140	11120	19580	28640
20	2110	2400	2830	3450	4540	7160	11150	19600	28680
10	2120	2410	2840	3460	4550	7180	11180	19610	28710
0	2130	2415	2850	3470	4560	7200	11200	19620	28730

$v$ m/sec	$M(v) = \int_v^{1200} \frac{dv}{g + c \cdot f(v)} \text{ für } c =$								
	6	5	4	3	2	1	0,5	0,2	0,1
1200	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1000	0,11	0,13	0,16	0,22	0,33	0,64	1,24	2,86	5,01
900	0,18	0,20	0,26	0,34	0,52	1,02	1,99	4,53	7,90
800	0,25	0,30	0,37	0,51	0,75	1,48	2,84	6,45	11,10
700	0,34	0,40	0,52	0,70	1,03	2,00	3,85	8,63	14,74
650	0,40	0,46	0,60	0,81	1,19	2,32	4,43	9,89	16,74
600	0,47	0,54	0,68	0,93	1,37	2,68	5,09	11,30	18,92
550	0,54	0,63	0,78	1,07	1,58	3,09	5,83	12,82	21,26
500	0,63	0,73	0,91	1,24	1,83	3,56	6,71	14,57	23,86
450	0,74	0,85	1,07	1,44	2,13	4,12	7,73	16,54	26,72
400	0,87	1,02	1,27	1,71	2,52	4,85	8,98	18,83	29,87
380	0,94	1,09	1,37	1,85	2,70	5,20	9,56	19,86	31,22
360	1,02	1,18	1,48	2,00	2,92	5,60	10,22	20,96	32,68
340	1,11	1,30	1,62	2,18	3,18	6,08	10,99	22,16	34,22
320	1,22	1,44	1,80	2,41	3,51	6,65	11,87	23,49	35,84
300	1,39	1,64	2,03	2,70	3,94	7,33	12,91	25,02	37,55
280	1,60	1,91	2,36	3,03	4,50	8,16	14,12	26,68	39,40
270	1,73	2,07	2,54	3,22	4,82	8,65	14,78	27,53	40,31
260	1,87	2,25	2,75	3,45	5,17	9,20	15,46	28,38	41,23
250	2,02	2,44	2,99	3,70	5,54	9,79	16,17	29,21	42,14
240	2,19	2,65	3,24	3,99	5,95	10,45	16,90	30,09	43,10
220	2,60	3,12	3,80	4,71	6,81	11,68	18,46	31,87	45,02
200	3,14	3,66	4,43	5,66	7,78	12,89	20,03	33,71	46,93
180	3,75	4,28	5,16	6,70	8,86	14,31	21,66	35,55	48,90
160	4,44	5,00	6,00	7,75	10,06	15,86	23,28	37,46	50,86
140	5,24	5,83	6,96	8,78	11,33	17,45	25,00	39,45	52,85
120	6,12	6,87	8,07	10,02	12,78	19,08	26,90	41,40	54,84
100	7,10	8,03	9,34	11,30	14,35	20,86	28,95	43,35	56,86
80	8,17	9,39	10,80	12,94	16,05	22,78	30,94	45,29	58,86
60	9,38	10,94	12,50	14,74	17,72	24,63	32,94	47,31	60,90
50	10,07	11,82	13,33	15,68	18,58	25,64	33,94	48,26	61,92
40	10,98	12,72	14,22	16,61	19,42	26,60	34,94	49,26	62,95
30	12,08	13,66	15,15	17,52	20,30	27,56	35,94	50,28	63,97
20	13,20	14,64	16,16	18,42	21,36	28,59	36,93	51,30	64,98
10	14,33	15,66	17,19	19,37	22,56	29,66	37,93	52,35	66,00
0	15,47	16,68	18,21	20,47	23,58	30,67	38,94	53,45	67,06

Tabelle 16.

Einige bestimmte Integrale; Formeln für Trägheitsmomente.

$$I. \quad \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt = 1; \quad \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx = \frac{1}{h \cdot \sqrt{\pi}};$$

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot h^2}; \quad \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx = \frac{1}{h^2 \cdot \sqrt{\pi}}.$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{n-1} \cdot dt = \int_0^1 \left( t n \frac{1}{y} \right)^{n-1} \cdot dy;$$

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1), \quad (n \text{ ganz}); \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot \sqrt{\pi}}{2^n}, \quad (n \text{ ganz}).$$

II. Bedeutet  $m$  je die Masse des betreffenden Körpers, so ist das Trägheitsmoment:

1. Für einen dünnen Stab von der Länge  $l$  um eine Querachse durch den Schwerpunkt:  $\frac{m}{12} \cdot l^2$ .

2. Für ein massives rechtwinkliges Parallelepipedon von den Kantenlängen  $a, b, c$  um die durch den Schwerpunkt gehende Achse parallel zur Kante  $c$ :  $\frac{m}{12} \cdot (a^2 + b^2)$ .

3. Für einen massiven Kreiskegel von der Höhe  $h$  und dem Basishalbmesser  $r$  um die Kegelachse:  $\frac{8}{10} m \cdot r^2$ ; ebenso um eine Querachse senkrecht zur Kegelachse durch den Schwerpunkt:  $\frac{3}{20} m \left( r^2 + \frac{1}{4} h^2 \right)$ .

4. Für einen massiven Kegelstumpf von der Höhe  $h$  und den Halbmessern  $R$  und  $r$  der Grenzflächen um die Achse des Kegelstumpfs:  $\frac{3}{10} m \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$ .

5. Für die Mantelfläche des Kegelstumpfs um dieselbe Achse:  $\frac{m}{2} (R^2 + r^2)$ .

6. Für eine massive Kugel vom Halbmesser  $r$  um einen Durchmesser:  $\frac{2}{5} m r^2$ .

7. Für eine Hohlkugel von den Halbmessern  $R$  und  $r$  um einen Durchmesser:  $\frac{2}{5} m \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$ .

8. Für eine Kugeloberfläche vom Halbmesser  $r$  um einen Durchmesser:  $\frac{2}{3} m r^2$ .

9. Für einen massiven Kugelabschnitt von der Höhe  $h$  und dem Kugelhalbmesser  $r$  um die Symmetrieachse:  $m \cdot h \cdot \frac{2r^2 - 1,5 \cdot r h + 0,3 \cdot h^2}{3r - h}$ .

10. Für einen massiven Ring vom Halbmesser  $R$ , mit kreisförmigem Querschnitt vom Halbmesser  $r$ , um die Mittelachse senkrecht zum Ring durch den Mittelpunkt:  $m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$ ; ebenso um eine den Ring schneidende Querachse durch den Mittelpunkt:  $m\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}r^2\right)$ .
11. Für einen massiven geraden Kreiszylinder vom Halbmesser  $r$  und der Länge  $l$  um die Zylinderachse:  $\frac{m}{2}r^2$ ; ebenso um eine Querachse durch den Schwerpunkt:  $m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right)$ .
12. Für einen Hohlzylinder (Ring mit rechteckigem Querschnitt) mit den Halbmessern  $R$  und  $r$  um die Zylinderachse:  $\frac{m}{2}(R^2 + r^2)$ ; ebenso um eine Querachse durch den Schwerpunkt:  $m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{1}{4}(R^2 + r^2)\right)$ .
13. Für ein massives Ellipsoid von den Halbachsen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  um die durch den Schwerpunkt gehende Achse  $c$ :  $\frac{m}{5}(a^2 + b^2)$ .
14. Ist  $J_0$  das Trägheitsmoment um eine Achse durch den Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment  $J$  um eine zu dieser Achse parallele Gerade gegeben durch:  $J = J_0 + m \cdot a^2$ , wobei  $a$  den Abstand der beiden parallelen Achsen bedeutet.



## 2. Diagramme für Flugbahnberechnungen.

### Inhaltsübersicht.

**Diagramme Ia bis Id** für den lotrechten und den nahezu lotrechten Schuß aufwärts (vgl. Band I, § 39). Darstellung der Hilfsfunktionen  $M$ ,  $Q$ ,  $G$ ,  $P$ :

$$M(v) = \int_v^{1200} \frac{dv}{g + cf(v)}; \quad Q(v) = \int_v^{1200} \frac{v \cdot dv}{g + cf(v)}; \quad G(v) = e^{N(v)},$$

$$\text{wo} \quad N(v) = g \int_v^{1200} \frac{dv}{v(g + cf(v))}; \quad P(v) = \int_v^{1200} \frac{G(v) \cdot v \cdot dv}{g + cf(v)}.$$

Dabei  $c = \frac{(2R)^2 \cdot \delta \cdot 896 \cdot i}{P \cdot 1,206}$ ;  $2R$  = Kaliber (in m);  $P$  = Geschossgewicht (in kg);  $\delta$  = Tagesluftgewicht (in kg/cbm);  $i = 1$  für Ogivalgeschosse von 2 Kalibern Abrundungsradius. Die zugehörigen Gleichungen sind bei den Diagrammen angegeben.

**Diagramme IIa bis IId** für den lotrechten und den nahezu lotrechten Schuß abwärts. Darstellung der Hilfsfunktionen  $M_1$ ,  $Q_1$ ,  $G_1$ ,  $P_1$ :

$$M_1(v) = \int_v^{1200} \frac{dv}{cf(v) - g}; \quad Q_1(v) = \int_v^{1200} \frac{v \cdot dv}{cf(v) - g}; \quad G_1(v) = e^{N_1(v)},$$

$$\text{wo} \quad N_1(v) = -g \int_v^{1200} \frac{dv}{v(cf(v) - g)}; \quad P_1(v) = \int_v^{1200} \frac{G_1(v) \cdot v \cdot dv}{cf(v) - g}.$$

**Diagramme IIIa bis IIIi**, ballistische Abaken für die graphische Auflösung von Flugbahnaufgaben. Diese Abaken sind graphische Darstellungen von sekundären ballistischen Funktionen zu dem einheitlichen Luftwiderstandsgesetz von F. Siacchi (die primären Funktionen hierzu sind in der Zahlentafel Nr. 11 gegeben). Mit

den zugehörigen sekundären Funktionen  $E$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $L$  und mit  $u$  hängen die Abakenwerte  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $A_9$  wie folgt zusammen:

$$A_1 = \frac{E \cdot v_0^2}{\xi} = N \cdot v_0^2; \quad A_3 = \frac{u}{v_0},$$

$$\text{wo} \quad u = \frac{v \cos \vartheta}{\cos \varphi}; \quad A_7 = v_0^2 \cdot E; \quad A_8 = H; \quad A_9 = L.$$

Wenn es sich um die Elemente  $v_0$ ,  $\omega$ ,  $T$  des Auffallpunkts ( $x = X$ ,  $y = 0$ ) im Mündungshorizont, ferner um die Koordinaten  $x_s$ ,  $y_s$  des Gipfels und um den Formkoeffizienten  $\delta$  handelt, werden die Abaken  $A_1$  bis  $A_7$  benützt; und dann bedeutet die Abszisse  $\xi$  den Wert  $\xi = c\beta X$  oder  $\frac{X}{c}$ .

Wenn dagegen die Elemente eines beliebigen Flugbahnpunktes berechnet werden sollen ( $x$  oder  $y$ ,  $v$ ,  $t$ ,  $\vartheta$ ), so kommen die Abaken  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $A_9$  zur Verwendung; und dann bedeutet die Diagrammabszisse  $\xi$  den Wert  $\xi = c\beta x$  oder  $\frac{x}{c}$ .

Die Gleichungen sind im Eingang zu den Diagrammen III zu finden, samt Schlüssel der Bezeichnungen und Zahlenbeispiel.

Die Verwendung dieser Abaken gibt bei scharfer Ablesung nahezu dieselbe Genauigkeit wie die Zahlentafeln von F. Fasella (Tavole balistiche secondarie, Genova 1901); dabei entfällt die doppelte rechnerische Interpolation. Man hat nur nötig, zwischen die aufgeführten Abakenkurven sich diejenige Kurve eingezeichnet vorzustellen, die sich auf die in Betracht kommende Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$  bezieht.

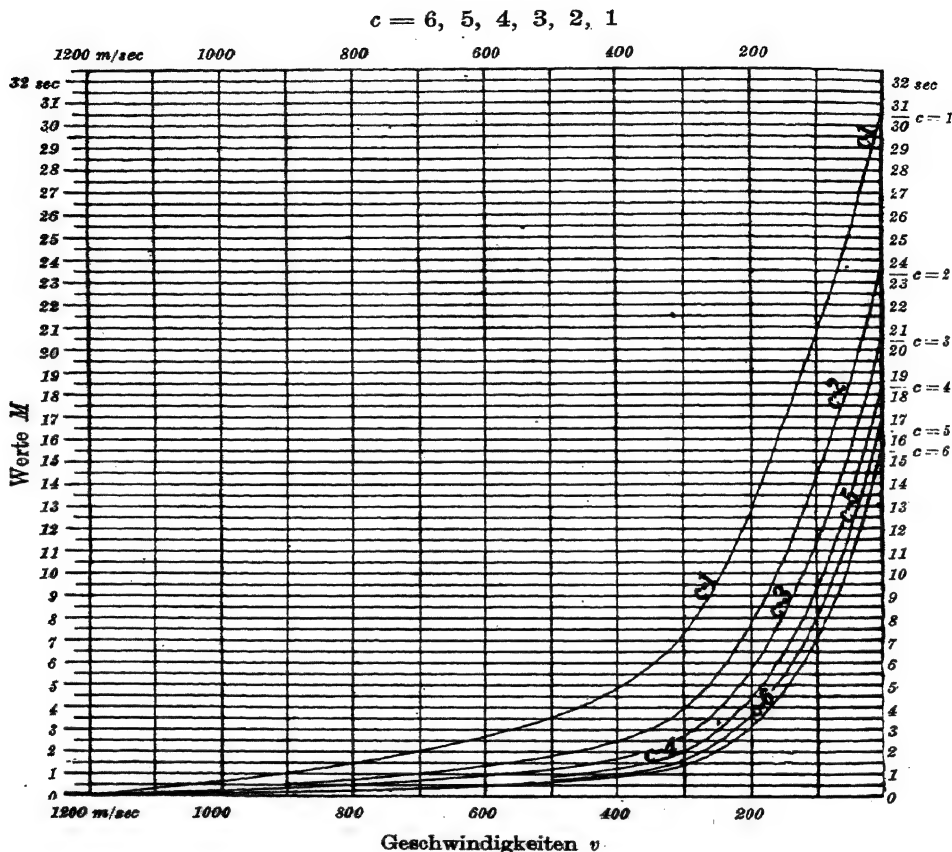
**Diagramme IVa bis IVf**, graphische Darstellungen für die Ottosche Zahlentabelle 9 (s. oben), für Abgangswinkel  $\varphi$  von  $45^\circ$  ab aufwärts.

**Diagramm V**, nomographische Tafel für die Ermittlung des Tagesluftgewichtes  $\delta$  aus Barometerstand und Lufttemperatur. Vgl. Band I § 15.

**Diagramm VI**, graphische Darstellung zur Ermittlung des Siacci'schen Ausgleichsfaktors  $\beta$ , für den oben in der Zahlentabelle Nr. 11 Schluß die Siacci'sche Zahlentabelle gegeben worden war. Das Diagramm liefert  $\beta$  zu irgendeiner Schußweite  $X$  und irgendeinem Abgangswinkel  $\varphi$  genauer und bequemer als jene Zahlentafel.

# Diagramm Ia.

Hilfsfunktion  $M(v)$  für Schuß aufwärts.



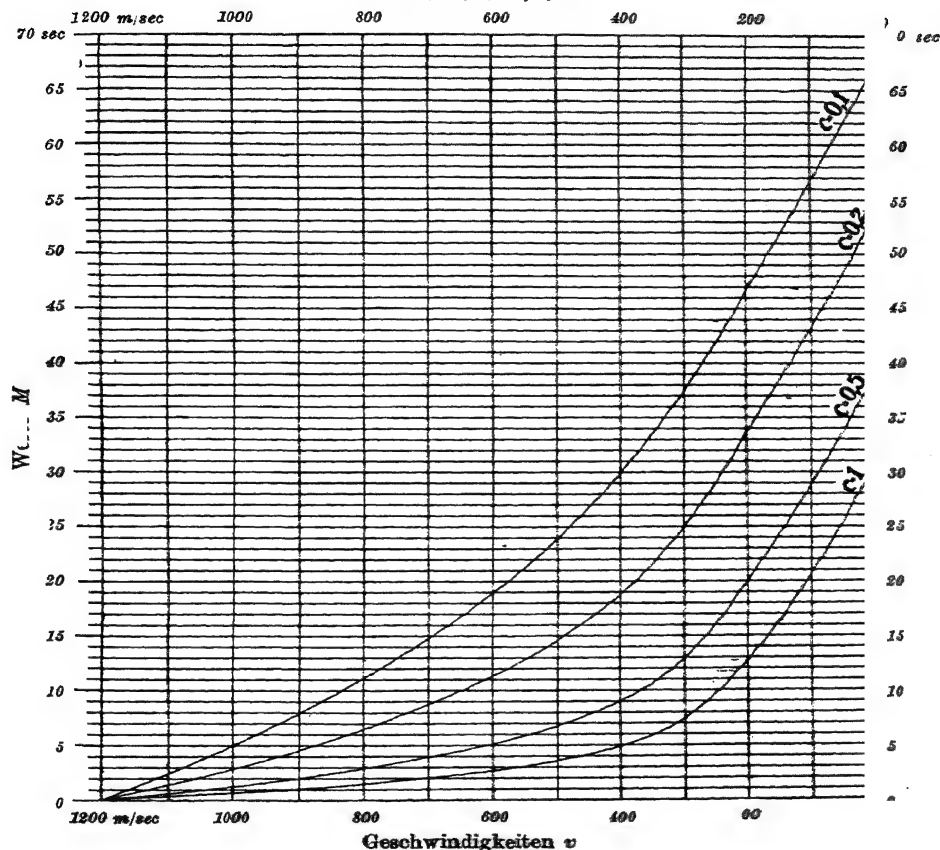
## 1. Zu den Diagrammen Ia bis Id.

$x$  und  $y$  sind die Koordinaten des Geschöschwerpunktes nach  $t$  sec; die  $x$ -Achse horizontal, die  $y$ -Achse lotrecht aufwärts, der Koordinatenanfang im Abgangspunkt;  $v$  (m/sec) die Geschwindigkeit des Geschosses nach  $t$  sec;  $\psi$  (im Bogenmaß) der spitze Winkel zwischen Flugbahntangente und Lotrechter;  $v_0$  bzw.  $\psi_0$  dasselbe für den Anfang, also  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit und  $\psi_0$  der Abgangswinkel gegenüber der Lotrechten. Dann ist für kleine  $\psi_0$  und  $\psi$

**Diagramm Ia.**  
**Hilfsfunktion  $M(v)$  für Schuß aufwärts.**

691

$$c = 1; 0,5; 0,2; 0,1$$



$$x = \frac{\psi_0}{G(v_0)} \cdot (P(v) - P(v_0)); \quad y = Q(v) - Q(v_0);$$

$$\psi = \frac{\psi_0}{G(v_0)} \cdot G(v); \quad t = M(v) - M(v_0).$$

Die Funktionen  $G, M, P, Q$  sind in den Diagrammen gegeben für die verschiedenen Werte von  $v$  und für mehrere Werte von  $\psi = \frac{(2K)^2 \cdot \delta \cdot i \cdot 896}{1,206 \cdot P}$

Speziell für den lotrechten Schuß ( $\psi_0 = 0$ ) ist

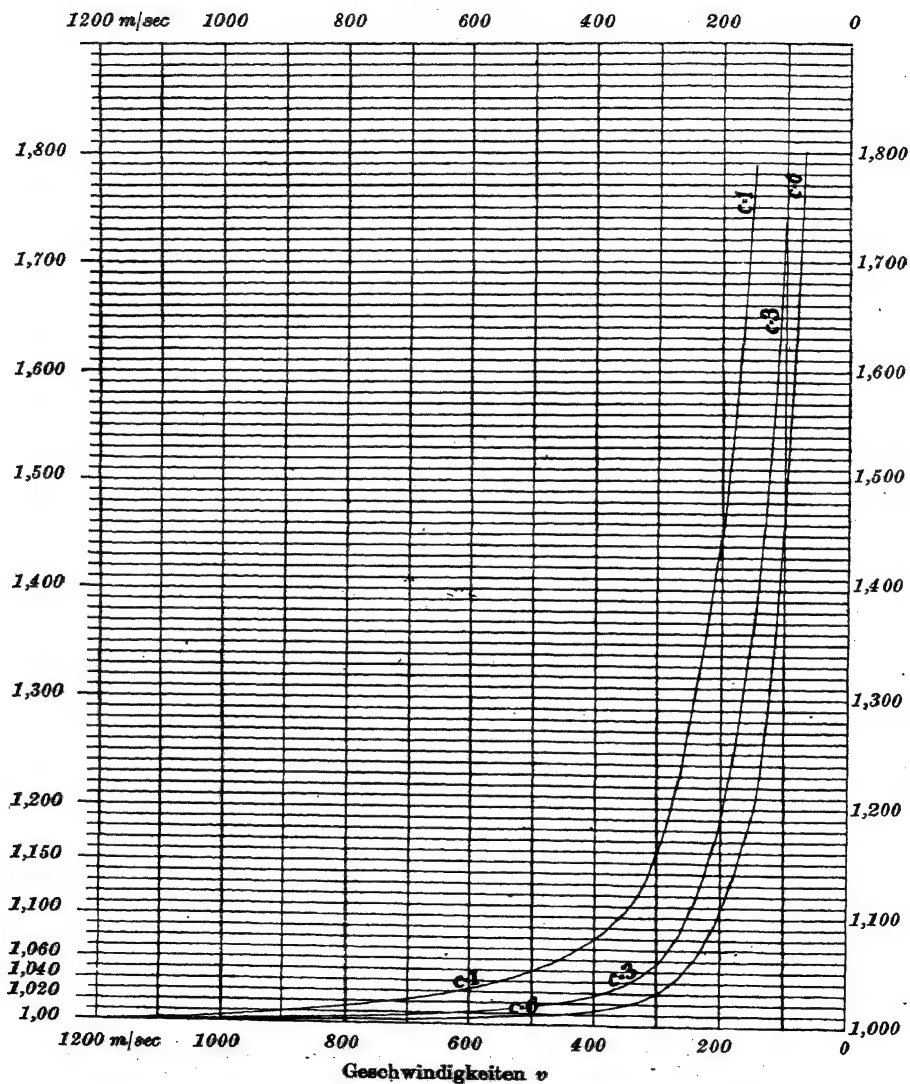
die gesamte Steighöhe  $F = Q(0) - Q(v_0)$ ;

„ „ Steigzeit  $T = M(0) - M(v_0)$ .

(Die Funktionen  $M$  und  $Q$  liegen auch in den Zahlentafeln Nr. 15 vor.)

# Diagramm Ic.

Hilfsfunktion  $G(v)$  für Schuß aufwärts.

 $c = 6, 3, 1$ 


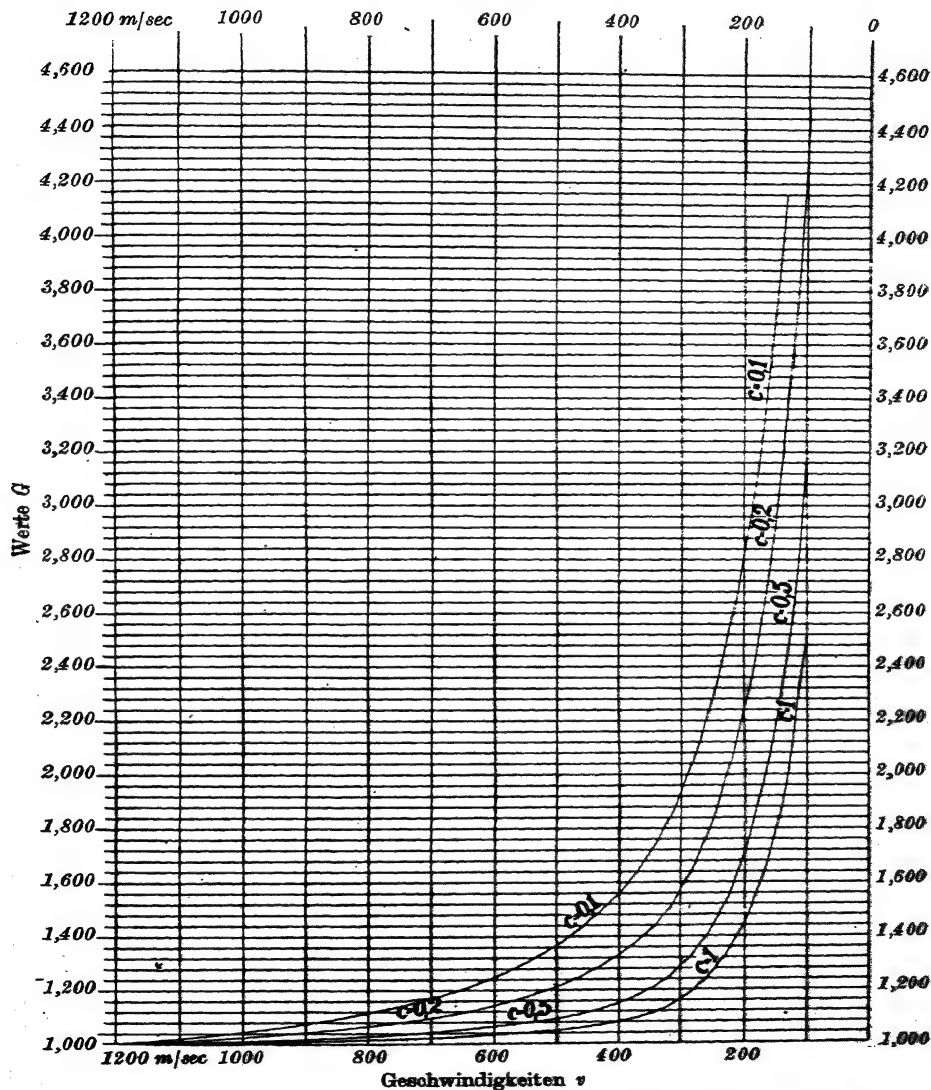
Erläuterung siehe S. 690 u. 691 des Anhangs.



**Diagramm I c (Fortsetzung).**  
**Hilfsfunktion  $G(v)$  für Schuß aufwärts.**

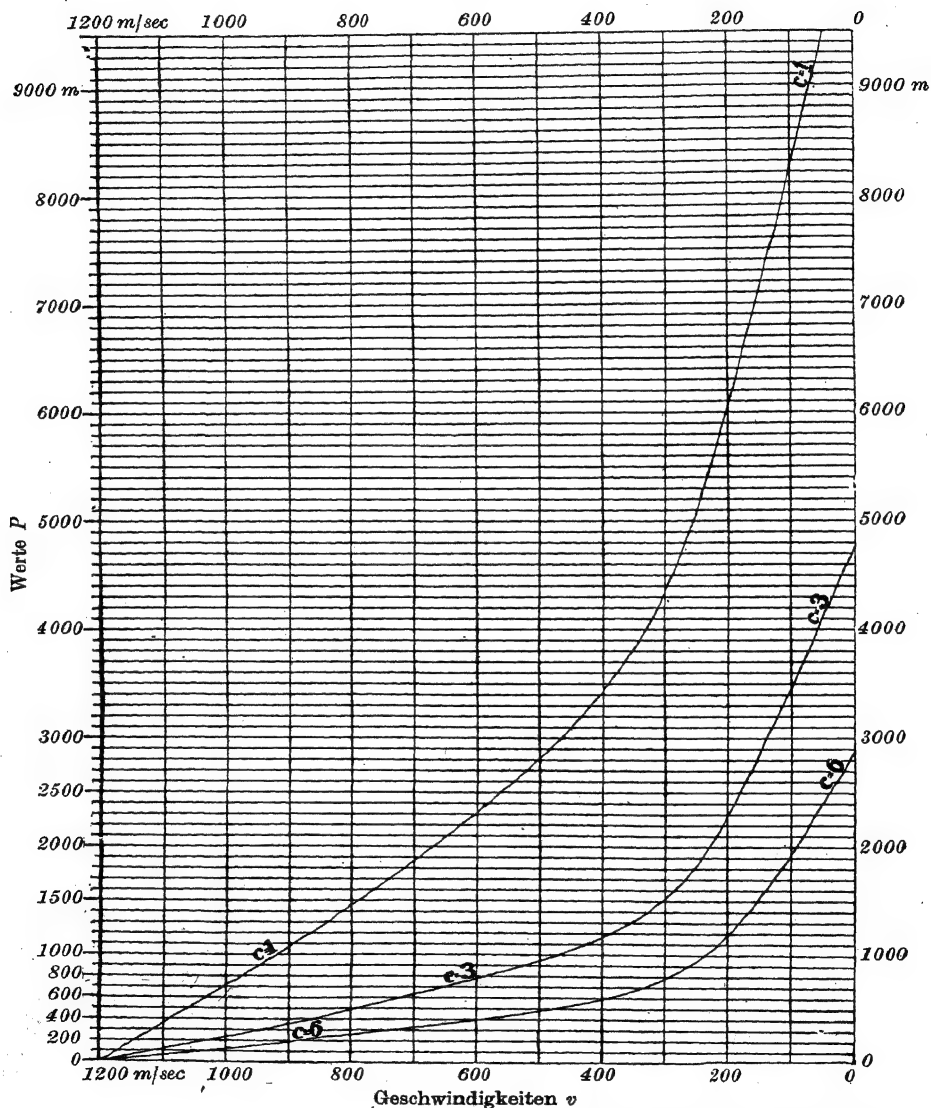
693

$c = 1; 0,5; 0,2; 0,1$



Erläuterung siehe S. 690 u. 691 des Anhangs

**Diagramm I d.**  
**Hilfsfunktion  $P(v)$  für Schuß aufwärts.**  
 $c = 6, 3, 1$



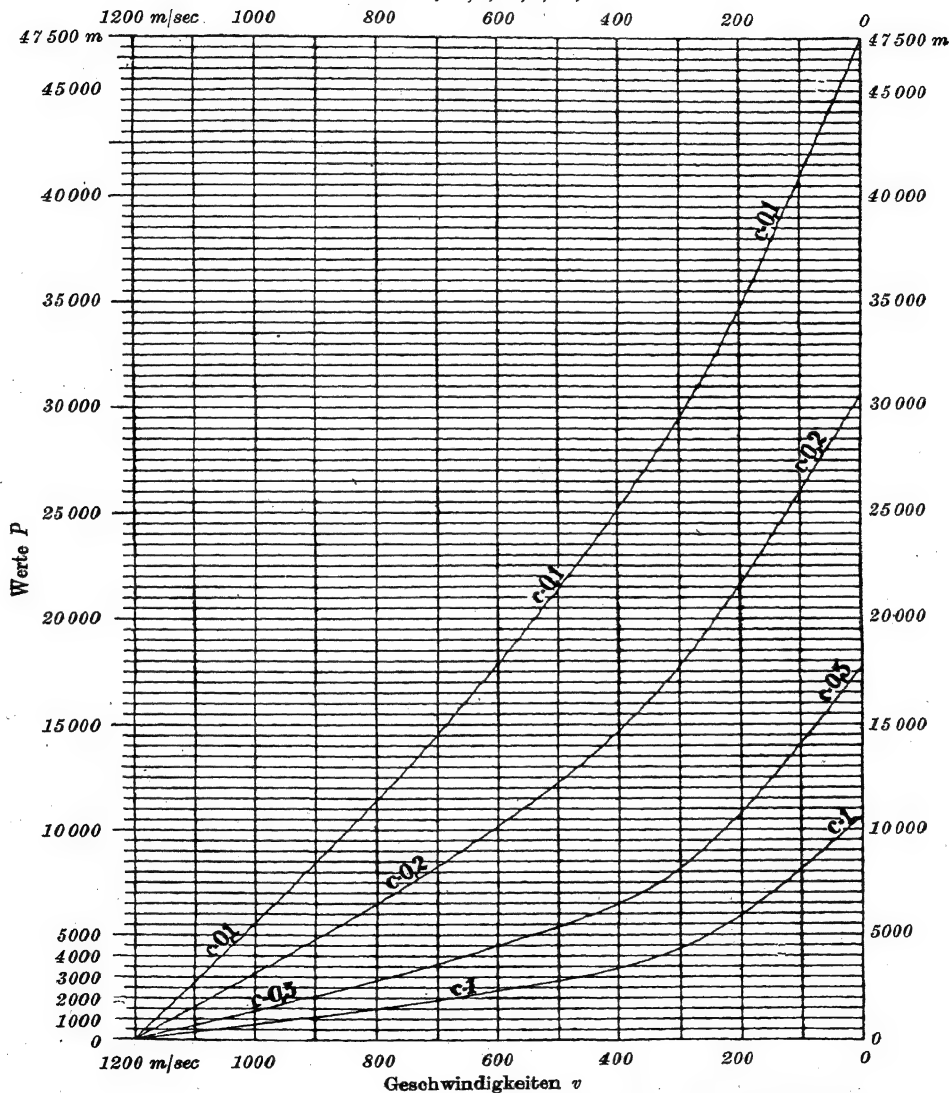
Erläuterung siehe S. 690 u. 691 des Anhangs.



**Diagramm Id (Fortsetzung).**  
**Hilfsfunktion  $P(v)$  für Schuß aufwärts.**

695

$c = 1; 0,5; 0,2; 0,1$



Erläuterung siehe S. 690 u. 691 des Anhangs.

## 2. Zu den Diagrammen IIa bis IId.

$x, y, t, v, \psi, v_0, \psi_0, c$  haben dieselbe Bedeutung wie für die Diagramme I, jedoch ist die  $y$ -Achse vom Abgangspunkt aus abwärts positiv gerichtet.

$$x = \frac{\psi_0}{G_1(v_0)} \cdot (P_1(v) - P_1(v_0));$$

$$y = Q_1(v) - Q_1(v_0);$$

$$\psi = \frac{\psi_0}{G_1(v_0)} \cdot G_1(v);$$

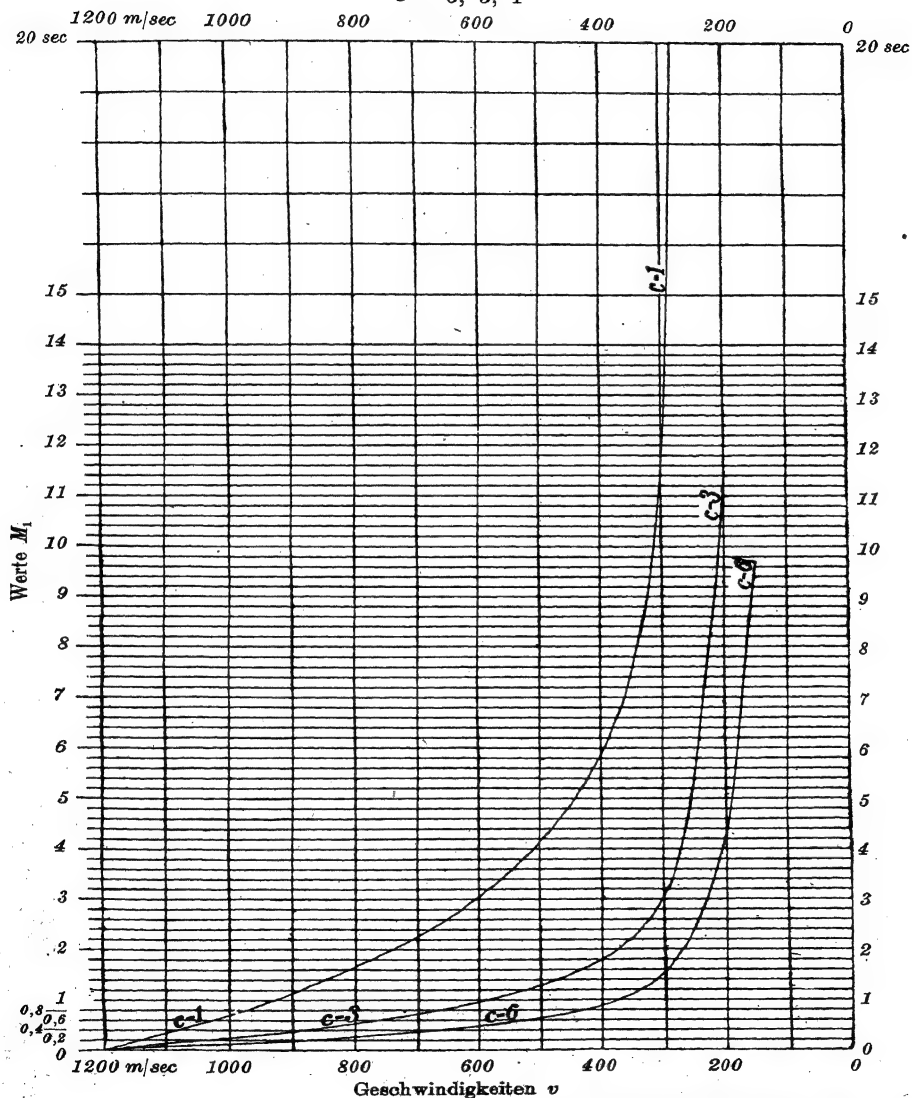
$$t = M_1(v) - M_1(v_0).$$

# Diagramm IIa.

## Hilfsfunktion $M_1(v)$ für Schuß abwärts.

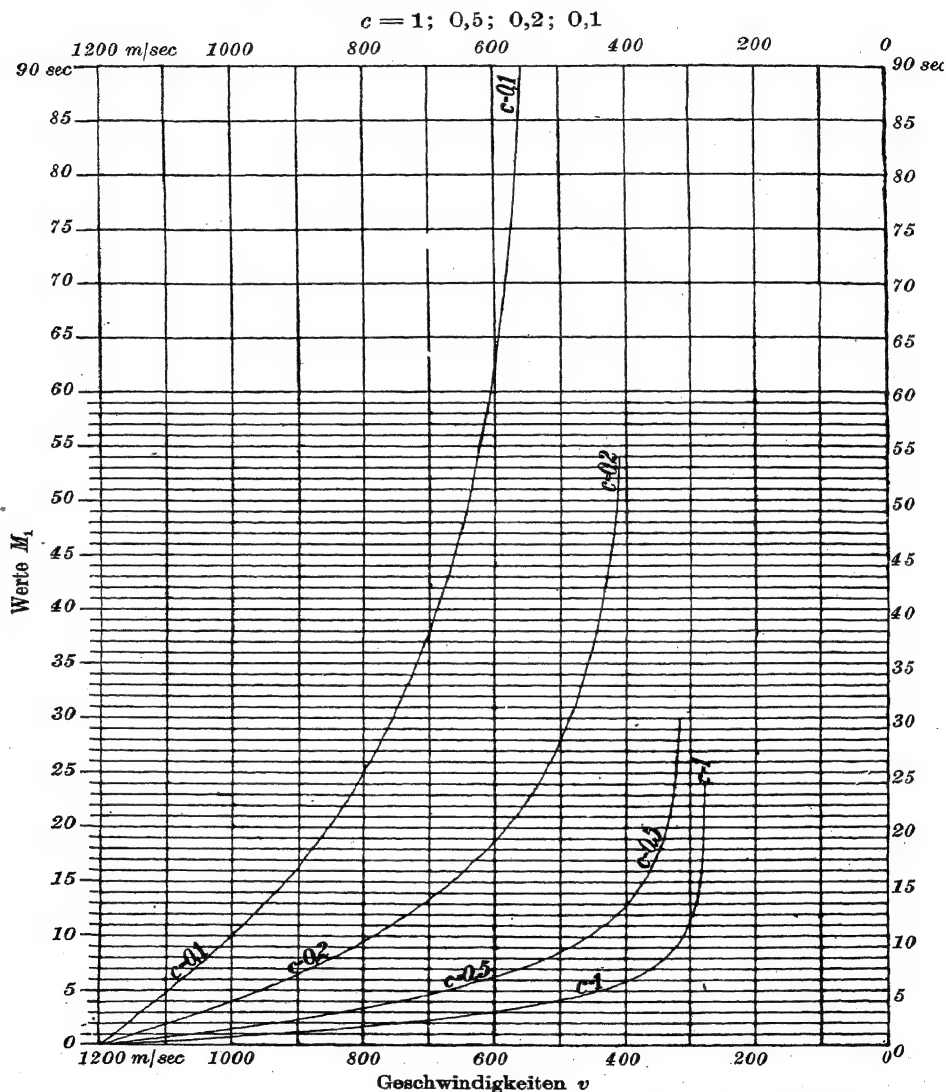
697

$c = 6, 3, 1$



Erläuterung siehe gegenüberstehende Seite.

## Diagramm IIa (Fortsetzung).

Hilfsfunktion  $M_1(v)$  für Schuß abwärts.

Erläuterung siehe S. 696 des Anhangs.

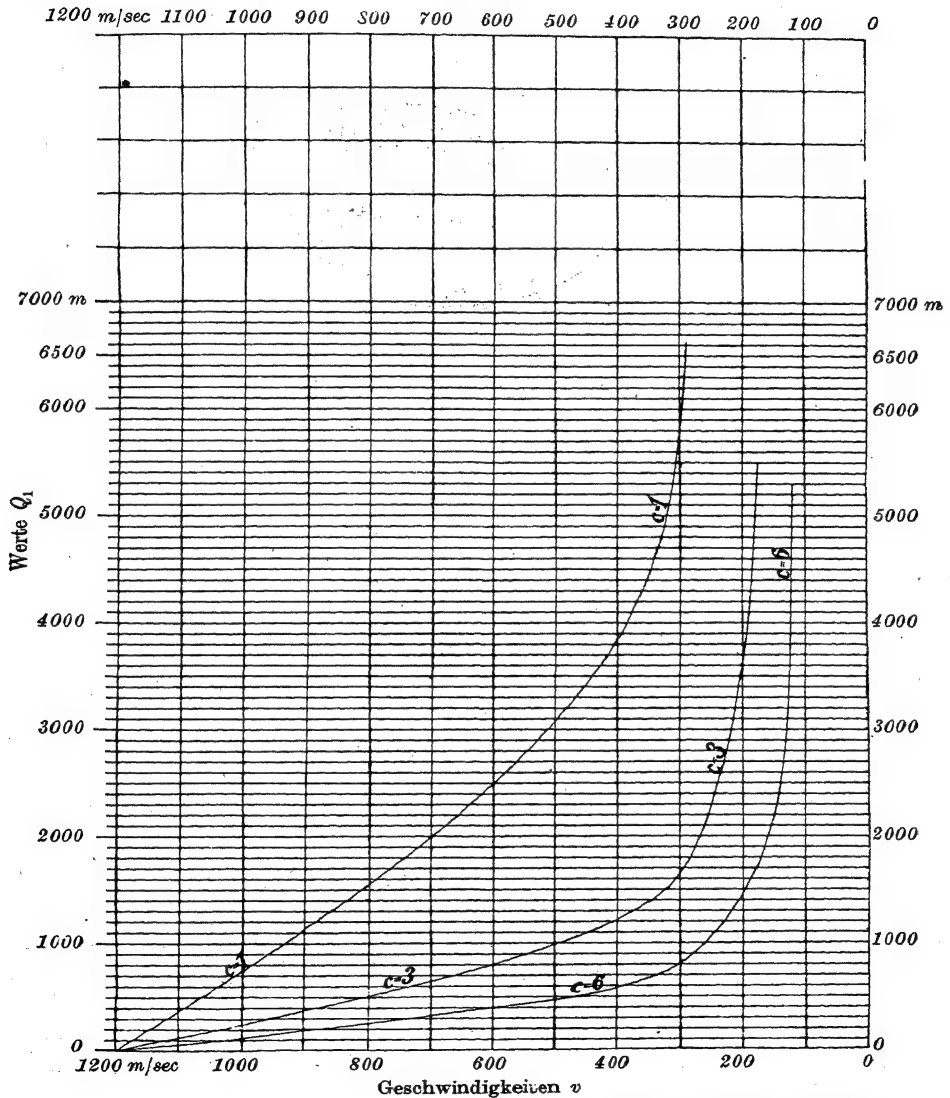


# Diagramm II b.

699

Hilfsfunktion  $Q_1(v)$  für Seil-3 abwärts.

$c = 6, 3, 1$



Erläuterung siehe S. 696 des Anhangs.

### 3. Zu den Diagrammen IIIa bis IIIi.

Es bedeutet:  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit (in m/sec);  $\varphi$  den Abgangswinkel;  $(x, y)$  die Koordinaten eines beliebigen Flugbahnpunktes (in m);  $\vartheta$  den Horizontalneigungswinkel der Flugbahntangente in diesem Punkte  $(x, y)$ ;  $t$  die Flugzeit des Geschosses bis zum Erreichen dieses Punktes  $(x, y)$ ;  $v$  die Bahngeschwindigkeit des Geschosses in diesem Punkt; speziell für den Gipfelpunkt:  $x$ , die Abszisse,  $y$ , die Ordinate des Gipfelpunktes; ferner speziell in der Horizontalebene durch den Abgangspunkt:  $X$  die Schußweite,  $T$  die zugehörige Flugzeit,  $v_e$  die Auffallgeschwindigkeit,  $\omega$  den spitzen Auffallwinkel; endlich allgemein  $c$  den ballistischen Koeffizienten  $c = \frac{(2R)^2 \cdot \delta \cdot i \cdot 896}{1,206 \cdot P}$ ; dabei  $2R$  das Kaliber (in m),  $P$  das Geschossgewicht (in kg),  $\delta$  das mittlere Tagesluftgewicht (in kg/cbm); Formkoeffizient  $i = 1$  für 2 Kaliber Abrundungsradius der ogivalen Geschosspitze.  $c'$  bedeutet die Abkürzung für  $\frac{1}{c\beta}$ ,  $c' = \frac{1}{c\beta}$ .

Beliebiger Flugbahnpunkt ( $x, y$ )	Gipfelpunkt der Flugbahn ( $x, y$ ):	Auffallpunkt ( $x = X, y = 0$ ):
$\xi = c\beta x = \frac{x}{c'}$ ;	$\xi = c\beta X = \frac{X}{c'}$ ;	$\xi = c\beta X = \frac{X}{c'}$ ;
$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x c'}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} A_7$ ;	$x_s = X \cdot A_6$ ;	$\frac{\sin 2\varphi \cdot v_0^2}{X} = A_1$ ;
$= x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} A_1$ ;	$y_s = X \operatorname{tg} \varphi \cdot A_4$ .	$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \cdot A_2$ ;
$x = \frac{y \cdot 2 v_0^2 \cos^2 \varphi}{v_0^2 \sin 2\varphi - c' \cdot A_7}$ ;		$v_e = \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \omega} A_3$ ;
$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot A_9$ ;		$T = \sqrt{X \operatorname{tg} \varphi \cdot A_4}$ ;
$t = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot A_8$ ;		$c\beta v_0^2 \sin 2\varphi = A_7$ oder
$v = \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta} \cdot A_5$ .		$v_0^2 \sin 2\varphi = c' \cdot A_7$ .

1. Ist z. B.  $v_0, \varphi, X$  gegeben, so kennt man  $A_1$ ; dazu suche man in dem Abakus IIIa diejenige Abszisse  $\xi = c\beta X$  auf, die zu der Ordinate  $A_1$  gehört. Zu derselben Abszisse  $\xi$  suche man in den Abakus IIIb bis IIIg die Ordinatenwerte  $A_2, A_3$  usw. Dann gibt  $A_2$  den spitzen Auffallwinkel  $\omega$ ,  $A_3$  die Auffallgeschwindigkeit  $v_e$ ,  $A_4$  die Flugzeit  $T$ ,  $A_5$  die Gipfelabszisse  $x_s$ ,  $A_6$  die Gipfelordinate  $y_s$ . Endlich erhält man aus der Abszisse  $\xi = c\beta X$  das Produkt  $c\beta$ , und da  $\beta$  durch die Zahlentafel Nr. 11 Schluß (besser durch das Diagramm VI) gegeben ist, kennt man den Koeffizienten  $c$ , also bei gegebenen Werten von  $2R, \delta, P$  den Formkoeffizienten  $i$ .

Soll außerdem zu einer beliebigen gegebenen Abszisse  $x$  die Flughöhe  $y$ , die Tangentenneigung  $\vartheta$  in diesem Punkt, die Flugzeit  $t$  bis zum Erreichen dieses Punktes und die Geschwindigkeit  $v$  bestimmt werden, so ist  $c\beta x$  bekannt; man findet also  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  als zugehörige Ordinatenwerte der Diagrammkurven und damit  $y, \vartheta, t$  und  $v$ .

2. Ist  $v_0, c, X$  gegeben, so ist damit  $\xi$  bekannt und damit  $\varphi, \omega, T$  und  $v_e$  zu bestimmen.

3. Ist  $v_0, \varphi, x, y$  gegeben, so ist  $A_1 = \frac{(x \operatorname{tg} \varphi - y) 2 v_0^2 \cos^2 \varphi}{x^2}$  bekannt, damit  $\xi = c \beta x$  aus dem Diagramm IIIa; also können  $\vartheta, t$  und  $v$  für den Flugbahn punkt  $(x, y)$  bestimmt werden. Ferner ist  $c \beta = \frac{\xi}{x}$ , also kann  $A_7 = c \beta v_0^2 \sin 2 \varphi$  berechnet und aus dem Diagramm IIIg der zu dieser Ordinate zugehörige Abszissenwert  $\xi$  für die Schußweite in der Horizontalebene durch den Abgangspunkt gefunden werden. Somit ist  $X = \frac{\xi}{c \beta}$  bekannt, und mit Hilfe der Diagramme IIIb bis IIIf können die Elemente des Auffallpunktes und des Gipfels bestimmt werden.

### Zahlenbeispiel.

Gegeben:  $v_0 = 495$  m/sec,  $\varphi = 18^\circ$ ,  $X = 7000$  m.

Zu bestimmen a) für die Schußweite  $X$  in der Horizontalebene durch den Abgangspunkt:  $\omega, v_e, T$ ; b) die Gipfelkoordinaten  $x_e$  und  $y_e$ ; c) für den Flugbahnpunkt mit der Abszisse  $x = 3500$  m die Ordinate  $y$ , ferner  $\vartheta, v$  und  $t$ .

a) Bekannt ist  $A_1 = \frac{v_0^2 \sin 2 \varphi}{X} = 20,58$ ; man sucht in dem Diagramm IIIa die zu der Ordinate  $A_1$  gehörige Abszisse  $\xi$  für die Geschwindigkeit  $v_0 = 495$  m/sec. Es ergibt sich:  $\xi = 3530$ ; daraus  $c \beta = \frac{\xi}{X} = 0,504$  und  $c' = \frac{1}{c \beta} = 1,983$ .

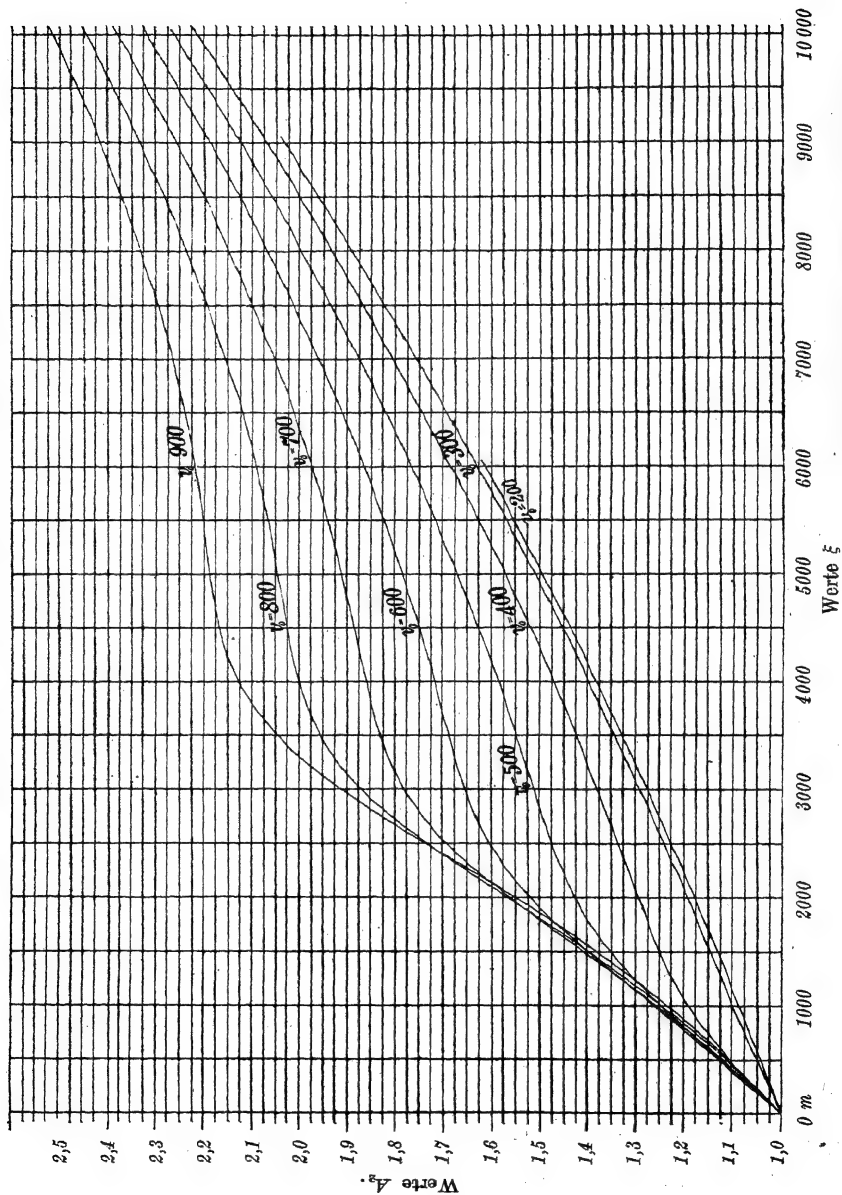
Zu dieser Abszisse  $\xi = 3530$  bestimmt man in den Diagrammen IIIb bis IIId die zugehörigen Ordinatenwerte. Man findet  $A_2 = 1,553$ , hieraus  $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \cdot A_2 = 0,4981$ ;  $\omega = 26^\circ 16'$ ; ferner  $A_3 = 0,488$ ;  $v_e = \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \omega} = 256$  m/sec und  $A_4 = 0,4994$ ;  $T = \sqrt{X \operatorname{tg} \varphi \cdot A_4} = 23,8$  sec.

b) Aus den Diagrammen IIIe und IIIf ergeben sich zu der gleichen Abszisse  $\xi = 3530$  die Werte  $A_5 = 0,551$  und  $A_6 = 0,3220$  und damit  $x_e = X \cdot A_5 = 3860$  m und  $y_e = X \operatorname{tg} \varphi \cdot A_6 = 732$  m.

c) Für den Flugbahnpunkt mit der Abszisse  $x = 3500$  ist  $c \beta x = 0,504 \cdot 3500 = 1764$ . Zu diesem Wert als Abszisse in den Abaken finden sich aus den Diagrammen IIIa, IIIc, IIIh und IIIi die Ordinatenwerte  $A_1 = 14,95$ , hieraus  $y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \cdot A_1 = 723$  m; ferner  $A_9 = 0,2565$ ; hierzu  $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi - \frac{c'}{2 \cos^2 \varphi} \cdot A_9 = 0,044$ ;  $\vartheta = 2^\circ 16'$ ;  $A_8 = 4,75$ , dazu  $t = \frac{c'}{\cos \varphi} \cdot A_8 = 9,89$ ;  $A_3 = 0,6075$  und hieraus  $v = \frac{v_0 \cos \varphi}{\cos \vartheta} = 286$  m/sec.



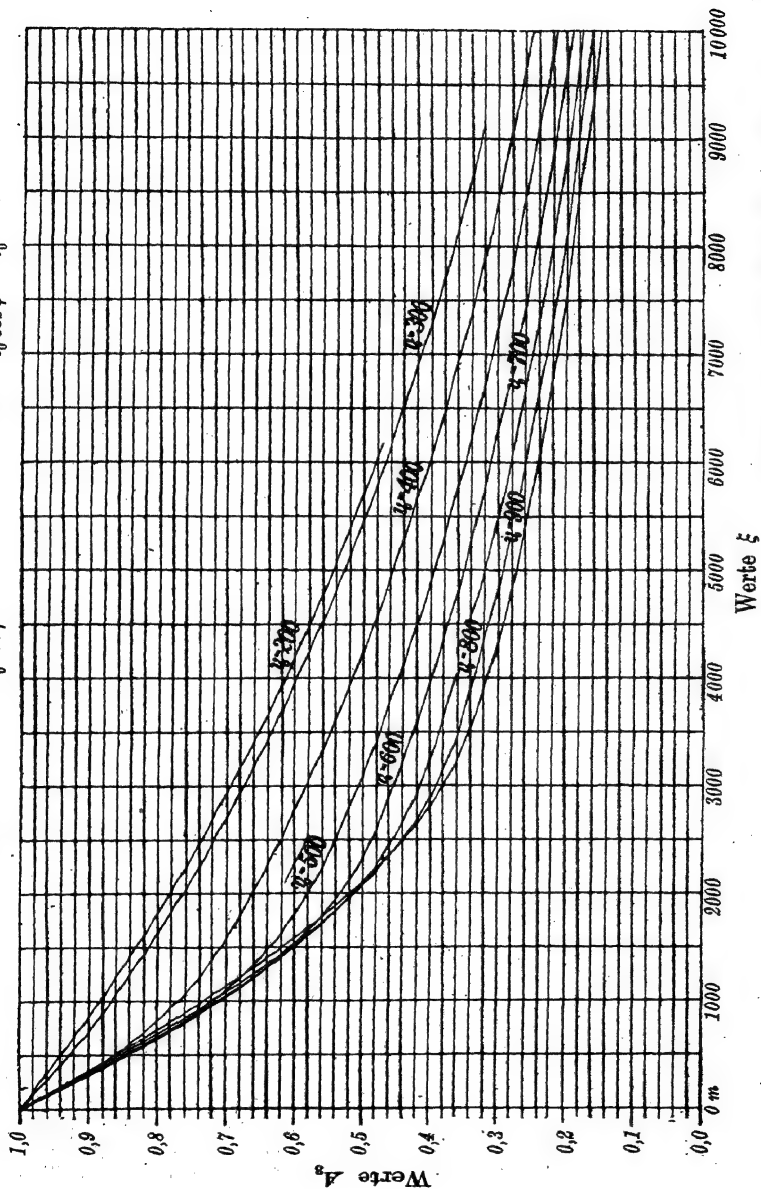
Diagramm IIIb. Ballistischer Abakus für  $\lg \omega = A_2$ .



Erläuterung siehe S. 700 u. 701 des Anhangs.

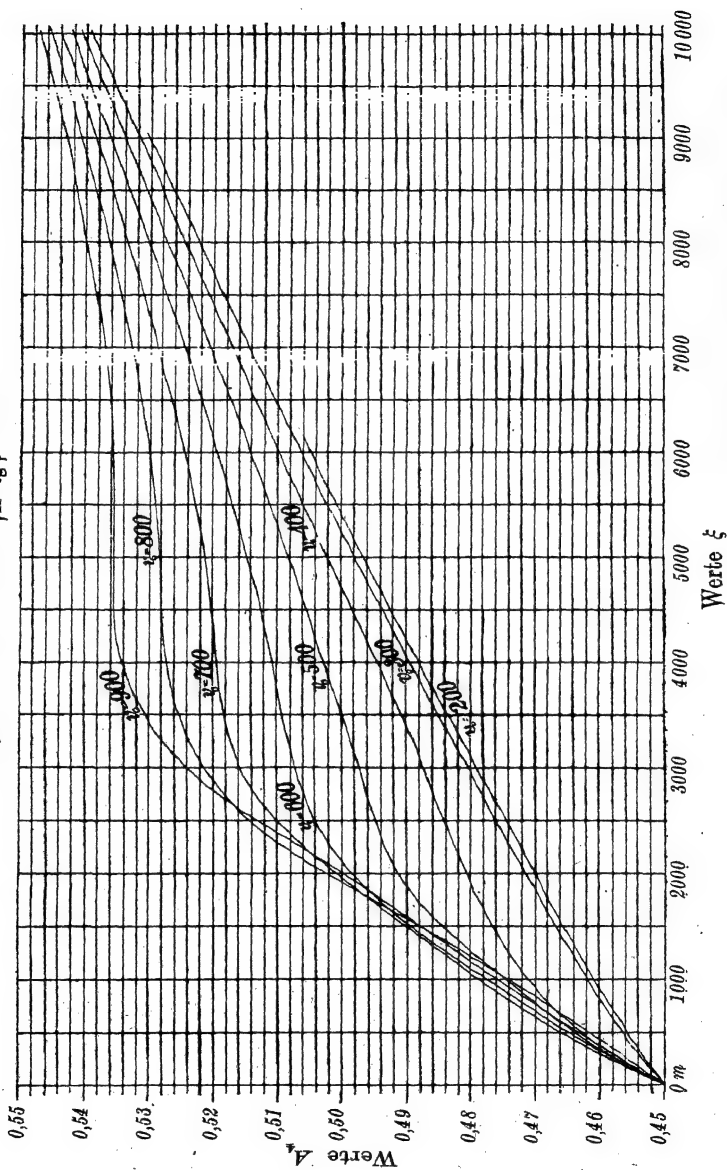
# Diagramm IIIc.

Ballistischer Abakus  $A_3$ ; dabei  $A_3 = \frac{v_e \cos \omega}{v_0 \cos \varphi}$ , für  $\xi = c \beta X$ ;  $A_3 = \frac{v \cos \beta}{v_0 \cos \varphi} = \frac{u}{v_0}$ , für  $\xi = c \beta x$ .



## Diagramm III.

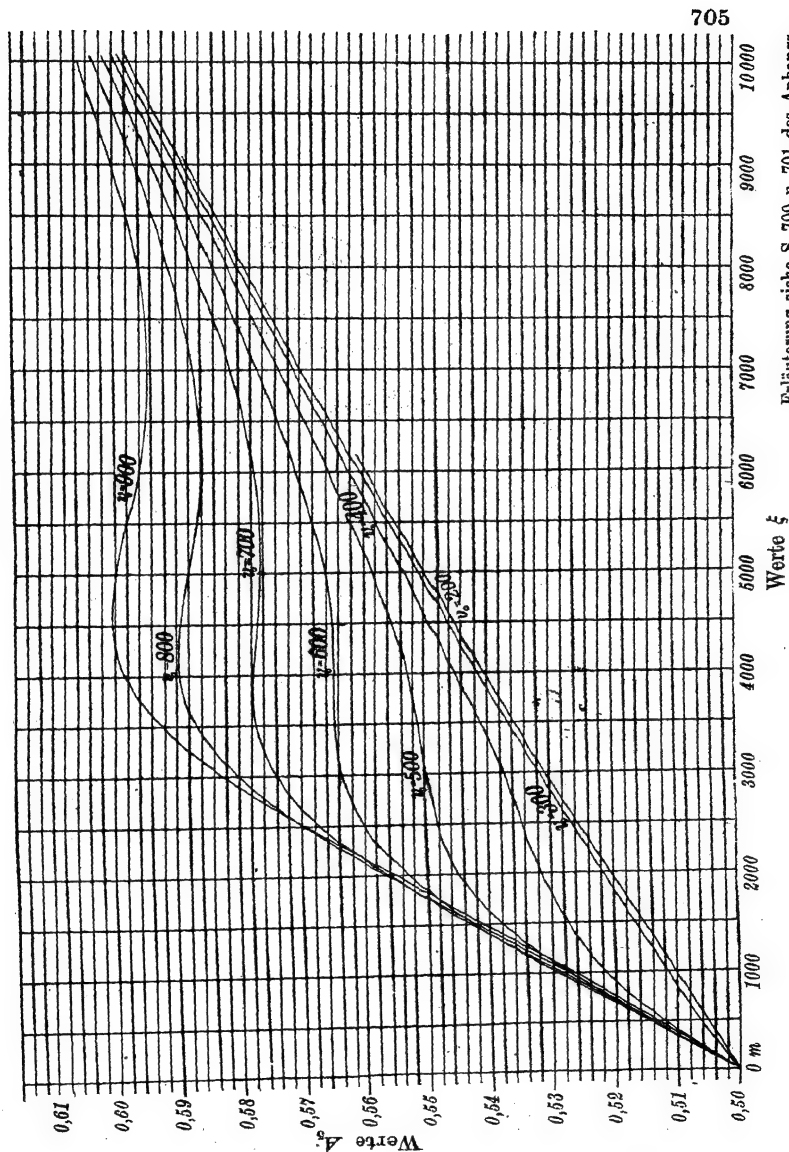
Ballistischer Abakus für  $\frac{T}{\sqrt{X} \cdot \lg \varphi} = A_4$ .



Erläuterung siehe S. 700 u. 701 des Anhangs.

# Diagramm IIIe.

Ballistischer Abakus für  $\frac{x_2}{X} = A_0$ .



705

Erläuterung siehe S. 700 u. 701 des Anhangs.

#### 4. Zu den Diagrammen IVa bis IVf.

(Graphische Tafeln zu den Tabellen nach Otto.)

Die hier beigelegten, für die Zwecke dieses Buchs von E. Stübler gezeichneten Diagramme IVa bis IVf entsprechen den Ottoschen Tabellen für große Erhöhung ( $\varphi = 45^\circ$  und größer als  $45^\circ$ ), und sie werden wie diese verwendet. (Vgl. obige Zählentafel Nr. 7 und den Text von § 21).

Beispiel 1. Gegeben  $c = 0,000981$ , Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 95,95$  m/sec, Abgangswinkel  $\varphi = 70^\circ$ . Um  $X$  zu bestimmen, benutzt man die Kurve  $\varphi = 70^\circ$  des Diagramms IVa für  $\frac{c v_0^2}{g}$ . Man setzt die eine Spitze eines Zirkels auf den Punkt der Kurve, der dem Wert 0,92 von  $\frac{c v_0^2}{g}$  entspricht, überträgt den Abstand dieses Punktes von einer der in der Nähe verlaufenden Vertikallinien mittels des Zirkels auf das unter dem Diagramm befindliche Maßstäbchen und erhält so  $2cX = 0,70$ , also  $X = 357$  m.

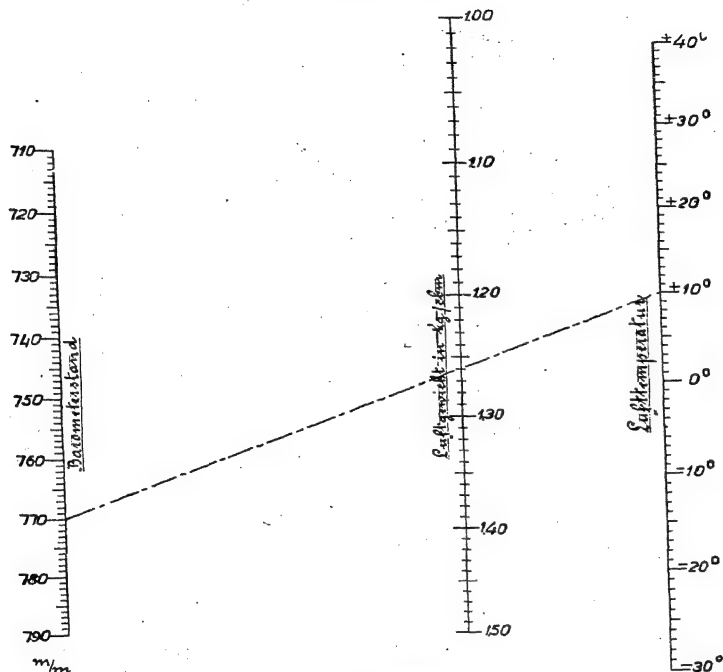
Beispiel 2. Gegeben  $v_0 = 241$  m/sec,  $X = 5015$  m,  $\varphi = 50^\circ$ ; man soll den Auffallwinkel bestimmen. Man entnimmt dem Diagramm IVb für  $\frac{v_0^2}{2gX} = 0,590$  den Abstand des betreffenden Punktes der Kurve  $\varphi = 50^\circ$  von einer Vertikalen mit einem Zirkel und überträgt ihn auf Diagramm IVc für  $\omega - \varphi$ . Die eine Spitze des Zirkels wird dabei auf die Kurve  $\varphi = 50^\circ$  dieser Tafel gesetzt, und man liest dort  $\omega - \varphi = 3^{10/16}^\circ$  ab; also  $\omega = 53^{10/16}^\circ$ .

Beispiel 3. Gegeben  $\varphi = 60^\circ$ , Flugzeit  $T = 40,65$  sec,  $X = 3520$  m, gesucht  $v_0$ . Die Berechnung von  $T\sqrt{\frac{g}{X}}$  ergibt 2,146, also nach Diagramm IVe und IVb  $\frac{v_0^2}{2gX} = 1,309$ ; hieraus folgt  $v_0 = 300,7$  m/sec.

## Diagramm V.

Ermittlung des Tagesluftgewichtes  $\delta$  aus Barometerstand  $B$  (mm) und Lufttemperatur  $t$  (Grad Cels.).

$$\delta = \frac{0,001702}{1 + 0,004t} \cdot B$$



## 5. Zu Diagramm V.

Man legt eine Linealkante so an, daß sie rechts die abgelesene Lufttemperatur, links den abgelesenen Barometerstand trifft. Dann ist an der mittleren Linie das Luftgewicht abzulesen. Z. B. Temperatur  $+10^{\circ}\text{C}$ , Barometerstand 770 mm. Dann erhält die Ablesekante des Lineals die Lage der strich-punktierten Linie, also Luftgewicht 1,26 kg/cbm. Die so erhaltenen Angaben gelten für einen Feuchtigkeitsgehalt von  $50\%$ . Die für einen anderen Feuchtigkeitsgehalt am Luftgewicht anzubringenden Verbesserungen bleiben bis zu einer Lufttemperatur von  $+20^{\circ}\text{C}$  aufwärts kleiner als die Einheit der zweiten Dezimale.

## Namenverzeichnis.

- Abdank-Abakanowitz** 203,  
 213, 235, 322.  
**Affolter** 552.  
**Ahlborn** 545.  
**Airy** 420.  
**Alayrac** 554.  
**d'Alembert** 98, 117, 118,  
 544, 548, 549.  
**Altmann** 557, 559.  
**Amann** 194.  
**Andreau** 84, 547, 559.  
**Anér** 129, 549.  
**d'Antonio** 553.  
**Appell** 117, 549.  
**Armanini** 94, 548.  
**Astier** 549, 556, 557.  
**August** 91, 93, 94, 107, 548.  
**Austerlitz** 549.  
**Ayrolles** 548.  
  
**Bahn** 563.  
**Barisian** 544.  
**Barker** 553.  
**Barry** 45, 545.  
**Bashforth** 56, 57, 63, 64,  
 68, 144, 145, 550.  
**Bassani** 144, 545, 548, 550,  
 551.  
**Batailler** 553.  
**Bayes** 393.  
**Becker** 63, 65, 101, 240, 268,  
 496, 546, 562, 564.  
**Bender** 557, 559.  
**Bensberg** 240.  
**Benzivenga** 548.  
**Berardinelli** 175.  
**Berger** 556.  
**Berneulli** 117, 160, 163, 186,  
 391, 402, 549, 551.  
**Bertagna** 377, 560.  
**Bertrand** 420, 428, 561.  
**Besout** 148, 550.  
  
**Bessel** 561.  
**Bianchi** 229, 551, 554, 564.  
**Bircher** 563.  
**Blumenthal** 255.  
**Borda** 88, 147, 152, 197,  
 254, 550, 552.  
**Bordoni** 26, 544.  
**Bortkiewicz** 560.  
**Boutroux** 562.  
**Boys** 559.  
**Braccialini** 142, 171, 175,  
 550.  
**Brauer** 219, 553.  
**Bravetta** 377, 560.  
**de Brettes** 549, 550, 562.  
**Breuer** 554.  
**Brix** 557.  
**Brookhusen** 557.  
**Broer** 563.  
**v. Brunn** 101, 225, 228, 254,  
 548, 554.  
**Budda** 556.  
**v. Burgsdorff** 269, 273, 425,  
 554, 555.  
**Burzio** 84, 547.  
**Busch** 255.  
  
**Calichiopulo** 562.  
**Callenberg** 440, 561.  
**Canovetti** 54.  
**Cauchy** 254, 554.  
**Cavalli** 113, 114, 254, 549,  
 552, 555.  
**Chapel** 57, 62, 168, 169,  
 170, 178, 194, 546, 548.  
**Charbonnier** 62, 76, 80, 101,  
 113, 115, 139, 153, 183,  
 215, 254, 258, 275, 311,  
 377, 544, 548, 549, 550,  
 551, 552, 554, 555, 556,  
 560.  
**Chauvenet** 421, 424, 561.  
  
**v. Chrismar** 494, 563.  
**Clerke** 563.  
**Close** 70, 128, 547, 555.  
**Coriolis** 554.  
**Coyne** 101.  
**Curschmann** 563.  
**Curti** 554, 564.  
**Czuber** 394, 396, 401, 407,  
 560, 561.  
  
**Dähne** 559.  
**Dalton** 99.  
**de Dantec** 54.  
**Darapsky** 548.  
**Darrieus** 287, 546.  
**Decepts** 548.  
**Denecke** 197, 544, 546, 554.  
**Desprez** 552.  
**Didion** 44, 45, 54, 55, 63,  
 64, 88, 144, 148, 152, 154,  
 156, 158, 160, 163, 170,  
 174, 177, 186, 193, 206,  
 207, 209, 229, 289, 328,  
 331, 334, 408, 459, 550,  
 553, 562.  
**Dittli** 559.  
**Dolliak** 197, 552.  
**Dragas** 562.  
**Dreyse** 98, 548.  
**Dubuat** 66.  
**Duchemin** 72, 87, 547.  
**Duchêne** 195, 200, 553, 559.  
**Duda** 69, 82.  
**v. Eberhard** 31, 45, 52, 59,  
 60, 65, 66, 83, 98, 101,  
 103, 104, 137, 150, 151,  
 182, 207, 229, 243, 267,  
 289, 294, 391, 394, 412,  
 433, 440, 498, 546, 548,  
 550, 554, 555, 560, 561.  
**Eckhardt** 554.  
**Emde** 210, 238, 545.

Endres 561.  
 Engelhardt 545, 557.  
 Eschler 560, 561.  
 Estienne 560.  
 Euler 140, 141, 144, 145,  
 331, 457, 497, 504, 515,  
 550, 562.  
 Everling 101, 548.  
 Exler 555.  
 Falkenhagen 45, 51, 52, 546.  
 Fasella 152, 190, 246, 251,  
 498, 511, 552, 564.  
 Faye 420, 561.  
 Fernandez 552.  
 Filloux 549, 553.  
 Finger 556.  
 Finsterwalder 54, 66, 545,  
 547, 548.  
 Fischer 560.  
 Fischli 548.  
 de Forest 402, 560.  
 Fourier 561.  
 Fowler 84, 358, 375, 376,  
 547.  
 Français 148, 197, 550, 552,  
 Frank 89, 547.  
 Froude 126.  
 Galilei 548, 556.  
 Gallop 84, 358, 547.  
 Gandolfi 562.  
 Garbasso 194, 553.  
 Garnier 287, 546, 554, 555,  
 562, 564.  
 Gassendi 331.  
 Gauß 396, 401, 560.  
 Gauthier 547, 557.  
 Gehroke 49.  
 George 549.  
 Gibert 545.  
 Giletta 561.  
 de Giorgi 563.  
 v. Gleich 560.  
 v. Göler 255.  
 Gonzalez 555.  
 Gottschow 428.  
 Gouin 269, 554.  
 Gould 420, 561.  
 v. Grävenitz 142.  
 Grammel 358, 370, 558.  
 Greenhill 70, 113, 124, 128,  
 547, 549, 555, 557.

Groos 391.  
 Groß 59, 75, 79, 80, 85, 86,  
 174, 258, 546, 551.  
 Guébbard 550.  
 Güldner 357, 558.  
 Gümbel 209, 219, 553.  
 Günther 482, 551, 563.  
 Haag 562.  
 Hadamard 545.  
 Haker-Heidorn 271.  
 Hamilton 87, 377, 547, 560,  
 563, 564.  
 Hardcastle 546.  
 Harris 554, 559.  
 Haupt 50, 197, 377, 545,  
 552, 557, 560.  
 Hayashi 117, 549.  
 Hebler 98, 336.  
 v. Heim 197, 328, 332, 552,  
 557, 558.  
 Hélie 56, 87, 153, 161, 195,  
 197, 199, 228, 231, 334,  
 335, 337, 402, 517, 558.  
 Helmert 402, 409, 411, 448,  
 560, 561.  
 v. Helmholtz 126, 545, 547.  
 Henrard 545.  
 Hentsch 326, 556.  
 Heun 554.  
 Heydenreich 89, 165, 166,  
 175, 179, 377, 420, 422,  
 437, 504, 554, 555, 561,  
 563.  
 Hill 374.  
 Hitchcock 309.  
 Hojel 56, 65, 178, 545.  
 Hübener 563.  
 Hugoniot 545.  
 Humbert 26.  
 Hutton 88, 331.  
 Inchley 553.  
 Indra 43, 127, 221, 544,  
 548, 553, 562.  
 Ingalls 86, 153, 275, 547,  
 550, 557.  
 Jacob 115, 116, 219, 465,  
 553.  
 Jacobi 26, 549.  
 Jäger 545.  
 Jahnke 210, 238.

Jakobi 142.  
 Jansen 84, 376, 557, 558,  
 559.  
 Jong, Josselin de 120, 231,  
 549, 554.  
 Jordan 402, 409, 560, 561.  
 de Jonquières 544, 563.  
 Jouffret 557, 562.  
 Jouguet 237, 545.  
 Journée 460, 544, 545.  
 Justrow 98, 478, 548, 563.  
 Kaiser 562.  
 Kármán 42, 51, 544.  
 Keck 26.  
 Kerkhof 555.  
 Kirchhoff 54, 72.  
 Klein 366, 369, 370, 546,  
 559.  
 Klußmann 171, 546.  
 Kneser 548.  
 v. Kobbe 545, 548.  
 v. Koch 485, 557.  
 Kohlrauch 562.  
 König 358, 558.  
 Koppe 100, 548.  
 Kötter 326, 557.  
 Kozák 165, 391, 394, 439,  
 521, 544, 551, 560, 561.  
 Krall 559.  
 Kranzfelder 488.  
 Krause 336, 437, 559, 561.  
 Kriloff 545.  
 Kritzingen 542.  
 Krupp 26, 45, 56, 57, 59,  
 65, 83, 136, 153, 154, 174,  
 175, 183, 213, 222, 464,  
 477, 551, 555.  
 Kül 15, 544.  
 Kummer 75, 80, 81, 345,  
 547, 557.  
 Kutta 222, 242, 254, 267,  
 553.  
 Lagrange 195.  
 Lacroix 548.  
 Lambert 197, 552.  
 v. Lamezan 547.  
 Lamothe 49.  
 Lampe 94, 548.  
 Lamprecht 100.  
 Lanchester 50, 333, 545,  
 553, 560.



Lang 43.  
 v. Langenskjöld 380, 559.  
 Langevin 287, 546.  
 Langley 54.  
 Laplace 391.  
 Lardillon 142.  
 Layriz 558.  
 Leinekugel 544.  
 Lefèvre 548.  
 Legendre 97, 117, 124, 144,  
 148, 547, 549, 550.  
 Lehmann 482, 563.  
 Levi-Civita 458, 461, 562.  
 Lhoste 560.  
 Lietzmann 544.  
 Ligowski 197, 210, 552.  
 Lilienthal 54.  
 Linke 101, 548.  
 Lipschitz 137, 554.  
 de la Llave 471, 472, 479,  
 562.  
 Lock 84, 358, 547.  
 v. Lössl 54, 66, 72, 75, 85,  
 86, 87, 106, 546.  
 Lombard 331, 544.  
 van Loon 402.  
 Lorenz 43, 45, 51, 52, 106,  
 545, 546, 547.  
 Ludwig 334, 382, 557, 560,  
 562.  
 Lupascu 236.  
 Mach 37, 39, 46, 481, 482,  
 544, 545.  
 Mac Mahon 549.  
 Märker 557.  
 Magnon 440.  
 Magnus 332, 342, 345, 360,  
 373, 557, 559.  
 Marey 54.  
 Mariotte 98.  
 de Masson d'Autume 545,  
 548.  
 Mata 49, 545.  
 Mauser 490.  
 Mayer 194, 553.  
 Mayevski 43, 55, 57, 64,  
 66, 76, 147, 170, 175, 207,  
 255, 358, 367, 381, 428,  
 544, 549, 557.  
 Mazzuoli 420, 421, 561.  
 Mehmke 194, 553.  
 Melsens 545.

Métin 556.  
 Miege 197, 552.  
 Mimesy 465, 563.  
 v. Minarelli 107, 326, 437,  
 548, 555, 557, 561, 562,  
 563.  
 Mola 142, 175.  
 Mondo 557.  
 Moreau 549, 550.  
 Morin 64, 328, 459.  
 Morley 553.  
 Müller, C. H., 545.  
 Müller, H., 557, 558.  
 Mussel 554.  
 Muzeau 380, 557.  
 Narath 221, 553.  
 Navez 55, 64.  
 Nebout 558.  
 Neesen 26, 69, 71, 82, 194,  
 374, 558, 559.  
 Neuendorff 222, 527, 553,  
 564.  
 Neumann 197, 326.  
 Newton 47, 48, 63, 72, 75,  
 76, 81, 85, 87, 91, 106,  
 126, 127, 547.  
 v. Niesiowski-Gawin 547.  
 Nimier 545.  
 Noble 472.  
 Nöther 358, 553.  
 Nonn 547.  
 Nowakowski 194, 276, 535,  
 554.  
 v. Obermayer 21, 491, 544,  
 547, 556, 557, 559, 561,  
 563.  
 d'Ocagne 194, 553.  
 Ökinghaus 49, 50, 127, 545,  
 546, 552, 556, 557.  
 Ölker 546.  
 Okochi 84, 376, 559.  
 Ollero 559.  
 Olsson 174, 551.  
 Otto 119, 140, 142, 143, 144,  
 197, 331, 497, 504, 515,  
 550, 557, 558.  
 Ouyvet 117, 549.  
 Owen 557.  
 Paalzow 345, 557.  
 Page 544, 547, 556.  
 Paixhans 331.

Pangher 466, 562.  
 Parodi 178, 254, 552, 562.  
 Parst 561.  
 Pascal 483, 553.  
 Pearson 402, 560.  
 Peddle 553.  
 Peirce 420, 422, 561.  
 Percin 272, 554, 561.  
 Perrin 553.  
 Perrodon 381, 560.  
 Perry 553.  
 Persy 544, 562, 563.  
 Pesci 194, 553.  
 Petitcol 553.  
 Pétry 459, 472, 563.  
 Pfaundler 381, 560.  
 v. Pfister 197, 544, 552.  
 Picard 554.  
 Picciati 554.  
 Piobert 64, 98, 328, 459,  
 548, 558.  
 v. Pivani 194, 553.  
 Piton-Bressant 63, 161, 195,  
 197, 276, 514, 552, 553.  
 Plaskuda 255.  
 Plönies 130.  
 Poisson 324, 332, 341, 392,  
 402, 550, 556, 558, 560.  
 Poncelet 54, 207, 457, 544,  
 553, 562.  
 Popoff 113, 555.  
 v. Portenschlag-Ledermayr  
 194, 551, 553, 554.  
 Pouchelon 552.  
 Prandtl 52, 82, 83, 84, 137,  
 360, 373, 544, 546.  
 Pohn 197, 544, 552.  
 Preiß 561.  
 Preuß 554, 562, 563.  
 Pucherna 555.  
 Putz 559, 561.  
 Quinaux 336, 559.  
 Raabye 548.  
 Radau 550.  
 Radowitz 544.  
 Ramsaner 494, 495, 563.  
 Rayleigh 72.  
 Reger 484.  
 Renard 54.  
 Résal 457, 547, 556, 562.  
 Riabouchinsky 72, 87, 544.

- Richmond 84, 358, 547.  
 Riebesell 546.  
 Riemann 42, 49, 50.  
 Rink 563.  
 de St. Robert 55, 75, 101,  
 125, 147, 152, 155, 170,  
 229, 238, 254, 275, 547,  
 548, 549, 557, 558.  
 Robins 98, 331, 562.  
 Röggl 125, 374, 549, 554,  
 558, 561.  
 Rohde 331.  
 Rohne 221, 391, 420, 422,  
 424, 431, 437, 439, 440,  
 460, 474, 476, 546, 554,  
 555, 558, 561, 562, 563.  
 Ronca 170, 194, 464, 551,  
 553, 562.  
 Rothe, R., 110, 194, 209,  
 218, 219, 449, 450, 553,  
 562.  
 Rothe, Ing., 221, 553.  
 v. Rouvroy 557, 558.  
 Rubach 51, 544.  
 v. Rudolphi 384.  
 Rumpff 69.  
 Runge 51, 194, 209, 211,  
 222, 235, 254, 558, 559,  
 560.  
 Rutzki 547, 557.  
 Sabudski 57, 107, 124, 145,  
 153, 175, 275, 325, 391,  
 394, 433, 440, 479, 549,  
 560.  
 Sänger 563.  
 Sängewald 51, 52, 59, 225,  
 228, 254, 553.  
 v. Sanden 194, 203, 222, 223.  
 Sanley 558.  
 Schatte 192, 229, 255, 267,  
 324, 491, 492, 544, 547,  
 551, 554.  
 Scheer de Lionastre 544.  
 Scheffers 562.  
 Schell 556.  
 Scheve 57, 62, 142, 546.  
 Schilling 194, 553.  
 Schmidt, A., 49, 545.  
 Schmidt, J. C. E., 544, 545,  
 554.  
 Schmundt 353, 355, 358, 558.  
 Schöffler 560, 561.  
 Schrutka 194, 553.  
 Schultz 194, 255, 553.  
 Schütte 43.  
 Schubert 101, 215, 388.  
 Schumm 562.  
 Schwarzschild 228, 555.  
 Schwinning 488.  
 Selter 548.  
 Sempke 56, 58, 62, 69, 546.  
 Siacci 76, 90, 117, 125, 142,  
 147, 150, 153, 166, 170,  
 171, 174, 175, 177, 179,  
 186, 229, 240, 275, 283,  
 502, 548, 549, 552, 558,  
 561, 562.  
 Silvestre 544.  
 Simon 194.  
 Simpson 225, 402.  
 v. Sinner 544.  
 Sjöwist 87, 547.  
 Smeaton 54.  
 Sommerfeld 43, 51, 52, 358,  
 366, 369, 370, 546, 558,  
 559.  
 Soreau 194, 553.  
 de Sparre 76, 136, 358, 547,  
 555, 557.  
 Sprung 556.  
 Stacharowski 326, 557.  
 Stäckel 559.  
 Stauber 127, 552.  
 Stirling 394.  
 Stone 420, 422.  
 Strnad 561, 562.  
 Strödel 40.  
 Stübler 230, 242, 275, 280,  
 297, 304, 305, 307, 522,  
 524, 535, 536, 539, 550,  
 556, 564.  
 Sugot 553.  
 Tait 334, 359, 544, 557.  
 Takeda 229, 551, 554.  
 Tempelhof 197, 552.  
 Terada 84, 376, 559.  
 Terquem 331.  
 Thibault 544.  
 Thiel 336, 491, 545, 558.  
 Thiesen 54.  
 Tiemann 488.  
 Timmerhans 331, 557.  
 Touche 545, 547.  
 Tressider 563.  
 Uschold 409, 410.  
 Vahlen 49, 80, 144, 178,  
 186, 197, 219, 221, 254,  
 297, 357, 358, 546, 549,  
 552, 553, 558.  
 Valiron 548.  
 Vallier 57, 62, 153, 175,  
 181, 186, 206, 258, 275,  
 381, 412, 420, 421, 455,  
 459, 479, 501, 549, 550,  
 552, 560, 561, 562, 563.  
 Vauban 26.  
 Veit 563.  
 Veithen 197, 209, 218, 222,  
 224, 242, 254, 267, 275,  
 278, 527, 552, 553, 555.  
 Vieille 49, 52, 106, 545.  
 Vieth 557.  
 Vince 88.  
 Walker 558.  
 Walton 544.  
 Weierstraß 97.  
 Weigner 544, 561.  
 Weißbach 54.  
 Wellisch 409, 560.  
 Wellner 547.  
 Wernicke 463, 562.  
 Weygand 130, 326, 556.  
 Wiener 59, 105, 215, 225,  
 228, 254, 548, 553.  
 Wieschberger 51.  
 Wille 98, 559.  
 Withworth 98, 548.  
 Wolf 545, 564.  
 Wolff 70, 128, 547.  
 v. Wuich 76, 93, 153, 166,  
 229, 391, 463, 548, 562.  
 v. Zedlitz 168, 169, 170,  
 230, 242, 259, 437, 438,  
 551, 552, 554, 561.  
 Zemplén 545.  
 v. Zeppelin 545.  
 Zimmerle 98.  
 Zlamal 197, 549.

# Sachverzeichnis.

Abgangswinkel größter Schußweite 136.  
 Abteilungsschießen 439.  
 Abweichungen der Geschosse:  
   durch Wind 289.  
   durch Erdrotation 316.  
   durch das Seitengewehr 325.  
   durch schiefen Räderstand 287.  
   durch Geschosßrotation 328.  
   durch Eigenbewegung der Waffe 313.  
 Änderungen, kleine, der Schußweite 275.  
 Anfangsgeschwindigkeit 508.  
 Auffallwinkel 502.  
 Augustsche Geschosßspitze 91.  
 Anreißerregeln 419.  
 Ballistisches Problem 108.  
 Ballistischer Wind 308.  
 Ballistisches Luftgewicht 810.  
 Bombenabwurf 241, 311.  
 Cubisches Luftwiderstandsgesetz 56, 63, 168.  
 Dum-Dum-Wirkung 480.  
 Eindringen des Geschosses in das Ziel 457.  
 Einschießen der Artillerie 439.  
 Erdkrümmung, Berücksichtigung der 30.  
 Exzentrische Geschosse 328.  
 Explosivwirkung 480.  
 Fernschießen 248.  
 Flugbahnscharen 6.  
 Flugweite 477.  
 Flugzeug, Flakschußtafeln 526.  
 Flugzeit 135.  
 Formwert des Geschosses 84.  
 Genauigkeit der Flugbahnberechnungen 251.  
 Geschosßgeschwindigkeit, Verlauf der 130, 136.  
 Graphische Methoden 207.  
 Gruppierungsachsen eines Trefferbilds 425.  
 Gruppenweise Beobachtungen 415.  
 Haubengeschosse 98.  
 Hyperbolische Theorien 127.  
 Integrierbarkeit der Hauptgleichung 116.

Kappengeschosse 465.  
 Kleinste Quadrate, Methode der 450.  
 Kopfwelle des Geschosses 89.  
 Luftgewicht 98.  
 Luftkrieg, Ballistik des 526.  
 Luftwellen 38.  
 Luftwiderstand 36.  
 Magnuseffekt 332.  
 Mündungshorizont 3.  
 Ogivalgeschosse 86.  
 Panzerformeln 464.  
 Pendelungen der Geschosse 358.  
 Prellschüsse 493.  
 Quadratisches Luftwiderstandsgesetz 47, 54.  
 Ricochettieren 24, 494.  
 Ringscheiben 443.  
 Rotationsgeschwindigkeit des Geschosses 348.  
 Scheitel der Flugbahn 34.  
 Schiefes Gelände, Schuß auf 15.  
 Schiefstellung der Geschosßachse 68, 72.  
 Schußebene 3.  
 Schußfaktoren 166.  
 Schußgenauigkeit 413.  
 Schußtafeln 496.  
 Schußtafelberechnung 497.  
 Schußweite 35, 136.  
 Schwenken der Flugbahn 268.  
 Sekundäre Funktionen 186.  
 Seitenabweichungen s. Abweichungen.  
 Sprenghöhe, Sprengweite 477.  
 Steilbahnen 207, 233.  
 Streuung, mittlere usw. 395.  
 Streuungskegel 470.  
 Sukzessive Differenzen 410.  
 Tagesluftgewicht 98.  
 Trefferreihen 437.  
 Trefferprozentzahl 438.  
 Vertikaler Schuß 233.  
 Wind, Abweichungen durch 289.  
 Zielstreifen 432.  
 Zonengesetze 55.

(Außerdem vergleiche das Inhaltsverzeichnis S. XV—XX.)

